数理解析研究所講究録
第581巻 1986年 82-84

ある非線形波動方程式の解の予想 II.

広大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

次の波動方程式 (Spherical Boussinesq equation)

$$w_{tt} + \frac{2}{t} w_t - 3(w^2)_{xx} - w_{xxxx} = 0, \qquad (1)$$

に厳密解 (Explode-decay solitary wave solution) が存在することが中村明氏(大阪外大)によって発見されている (J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985) 4111)。この式の厳密解と前稿 I. でのべた Classical Boussinesq equation

$$\begin{cases} u_t = [(1+u)v + v_{xx}]_x, \\ v_t = (u + \frac{1}{2}v^2)_x, \end{cases} \qquad (2)$$

の解との関係について述べる。

(1)式は変換 $w = 2(\log f)_{xx}$ によって、次の2次形式に変換される

$$\left(D_t^2 + \frac{2}{t}\frac{d}{dt} - D_x^4 + c\right) f \cdot f = 0, \quad c : \text{const.} \qquad (\ )$$

この式は semilarity variable を

$$z = \frac{x}{\sqrt{2t}} \qquad \text{（前稿の } z \text{ の定義と } 2^{-1/2} \text{ だけ異なる）}$$

と選ぶと，

$$\left(D_z^4 - z^2 D_z^2 + z\frac{d}{dz} - 4n^2\right) f_{2n-1} \cdot f_{2n-1} = 0 \qquad (5)$$

となる　ここで $c = 4n^2$, $f = f_{2n-1}$ とおいた。

一方 classical Boussinesq equation は上記の semilarity variable z で表わすと

$$\begin{cases} \left(D_z^2 + z D_z\right) f_{2n} \cdot \hat{f}_{2n} = 0, \\ \left(D_z^3 + \frac{\partial}{\partial z} + z D_z^2\right) f_{2n} \cdot \hat{f}_{2n} = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

となる。ここで前稿の f, g を $f_{2n}, \hat{f}_{2n}$ と書き直している。

Spherical Boussinesq equation の解と classical Boussinesq equation の解に対して同じ記号 f_n を用いたのには理由があって，どちらも同じ Wronskian を使って，

$$f_n(z) = W(H_n(z), H_{n-1}(z), \cdots, H_{n-[(n-1)/2]}(z)), \quad n=1,2,\cdots \tag{7}$$

と表現出来るからである．そして $\hat{f}_{2n}(z)$ は

$$\hat{f}_{2n}(z) = W(H_{2n}(z), H_{2n-1}(z), \cdots, H_{n+1}(z), H_n(z)) \tag{8}$$

で定義され，次式

$$D_z f_{2n-1} \cdot f_{2n+1} + (-1)^{[n/2]}(2n+1)n!\, f_{2n} \hat{f}_{2n} = 0 \tag{9}$$

の関係をみたす。

ここで $[n]$ は Gauss の記号で n を越えない最大の整数を表わす．$H_n(z)$ は Hermite function で次の微分方程式

$$y'' - xy' + ny = 0 \tag{10}$$

の解（第2種の Hermite function も含む）である．

以上の結果が数式処理 REDUCE 3.1 を使って n が小さいときに証明され，その後，一般の n に対しても理論的に証明された。(9)式の関係を発見するのに因数分解の機能が非常に役に立ったのを附記しておく。