数理解析研究所講究録
第581巻 1986年 101-104

２次形式統計量の分布の高次漸近展開

Higher Order Asymptotic Expansions for the Distribution of Quadratic Form in Normal Variates

統計数理研究所　仁木　直人 (Naoto Niki)
(Inst. Statist. Math.)　小西　貞則 (Sadanori Konishi)

Higher order asymptotic expansions for the distribution function and the percentiles of the distribution of positive definite quadratic form in normal variates are obtained by using a computer algebra system. The resulting formulas guarantee accuracy almost up to fourth decimal place if the distribution is not very skew. The normalizing transformation investigated by Jensen and Solomon (1972) is reconsidered based on the discussion by Niki and Konishi (1985) about the effects of transformation in higher order asymptotic expansions.

§０．はじめに

本稿で紹介するのは，確率分布の正規近似の精密化とでも言うべき Edgeworth展開およびCornish-Fisher展開の，正値２次形式統計量への応用である．このような確率分布の漸近展開においても，良い近似を得ようとすれば，有理係数多項式の計算を大量にこなす必要があり，展開の次数を上げるにつれて，項の数および係数の大きさが指数的に増大する傾向がある．また，実際に求めた式を用いて数値計算をする場合にも，安定した計算が可能な段階まで数式処理システムを用いて変形を行わねばならないことが多い．

§１．２次形式統計量

確率変数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は、互いに独立に、標準正規分布（分布関数をΦで、確率密度関数をφで表わす）に従うとする。

いま、有限で正の値をもつ定数列

$$\underline{d}=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\},\ \underline{c}=\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$$

により、

$$Q_n=Q_n(\underline{d}, \underline{c})=\Sigma_{j=1}^{n} c_j (x_j+d_j)^2$$

を作り、この分布を考える。一般に、ｎ変量正規分布に従う確率ベクトルの正値２次形式の分布は、適当に線型変換することにより、Q_n の分布に帰着することができる。

２次形式統計量 Q_n のｒ次のキュムラント $\varkappa_r$ は、

$$\theta_r=\Sigma_{j=1}^{n} c_j^r (1+r a_j^2)$$

とおくと、

$$\varkappa_r=2^{r-1}(r-1)!\,\theta_r$$

と書ける。

$n\to\infty$ により、$\theta_1\to\infty$ とするとき、

$$w_r=\theta_r/\theta_1=O(1)$$

と仮定すれば、Q_n は正規分布に法則収束する。この場合、

$$X_n = \sqrt{\theta_1}\,(Q_n - \theta_1)/\sqrt{(2\theta_1\theta_2)}$$

の分布を、θ_1 に関してΦの周りで漸近展開する（$1/\sqrt{\theta_1}$ のベキ級数に展開）ことにより、求めるQ_n の分布の近似値を得ることができよう。

θ_1 が大きい値の場合はここまでで充分であるが、そうでない場合には、このような直接の漸近展開では充分な近似を得ることができない。そこで、適当な狭義の単調関数で統計量Q_n を変換し、正規分布への収束を速めてから漸近展開を行うことを考える。

§２．正値２次形式における正規化変換

高次の漸近展開を行うための正規化変換については、Niki & Konishi (1984) に一般論が述べられている。簡単にいえば、３次のキュムラントの漸近展開の主項（－１／２次の項）を０とするような『対称化変換』でなければならない、ということである。

正値２次形式について正規化変換を求めると、『ベキ乗変換』が得られる。これは、２次形式の最も簡単な場合であるカイ２乗変量に対して非常に有効なWilson-Hilferty の方法（１／３乗変換）を含んでいる。

べき乗変換された統計量

$$R_n = \sqrt{\theta_1}\,\{(Q_n/\theta_1)^h - 1\}/\sqrt{(2h^2 w_2)}$$

の３次のキュムラントの　$\theta_1^{-1/2}$の係数を０とするためには、

$$h = 1 - (2\theta_1\theta_3)/(3\theta_2^2) = 1 - (2w_3)/(3w_2^2)$$

とすればよいことがわかる。ここで、２次形式Q_n がカイ２乗変量となるような条件、すなわち、

$$\underline{d} = \{0,\ 0,\ \cdots,\ 0\},\ \underline{c} = \{1,\ 1,\ \cdots,\ 1\}$$

に対しては、$h = 1/3$となってWilson-Hilferty の変換に一致すること、また、nを固定した上で$\|\underline{d}\| \to \infty$とするような条件に対しては、$h \to 1/2$と、非心カイ２乗変量に用いられるFisherの平方根変換に一致すること、および、もともと対称に近い分布については$h = 1$（すなわち何もしない）に近いことを注意しておく。

§３．分布関数の漸近展開（Edgeworth 展開）

変換された統計量の分布の漸近展開については、

$$Y_n = R_n + (\theta_3\sqrt{2})/(3\theta_1\theta_2\sqrt{\theta_2})$$

とし、

$$\Pr\{Y_n < x\} \sim \Phi(x) - \phi(x)\sum_{j=1}^{\infty} a_j\,\theta_1^{-j/2}$$

と表わすと、a_j （$j = 1, 2, 3, 4$）は次のようになる。ここに、$H_j(x)$ はj次のエルミート多項式を示す。

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = w_2^{-3}\left\{H_3(x)\left(\frac{1}{2}w_4w_2 - \frac{20}{27}w_3^2 + \frac{2}{9}w_3w_2^2\right) + H_1(x)w_3\left(-\frac{2}{3}w_3 + \frac{2}{3}w_2^2\right)\right\}$$

$$a_3 = \sqrt{2}\,w_2^{-9/2}\left\{H_4(x)\left(\frac{2}{5}w_5w_2^2 - \frac{4}{3}w_4w_3w_2 + \frac{76}{81}w_3^3 + \frac{1}{9}w_3^2w_2^2 - \frac{1}{9}w_3w_2^4\right)\right.$$

$$+H_2(x)w_3\left(-2w_4w_2+\frac{184}{81}w_3^2+\frac{4}{9}w_3w_2^2-\frac{2}{3}w_2^4\right)+w_3\left(\frac{2}{9}w_3^2+\frac{1}{9}w_3w_2^2-\frac{1}{3}w_2^4\right)\Bigg\}$$

$$a_4=w_2^{-6}\Bigg\{H_7(x)\left(\frac{1}{8}w_4^2w_2^2-\frac{10}{27}w_4w_3^2w_2+\frac{1}{9}w_4w_3w_2^3+\frac{200}{729}w_3^4-\frac{40}{243}w_3^3w_2^2+\frac{2}{81}w_3^2w_2^4\right)$$

$$+H_5(x)\left(\frac{2}{3}w_6w_2^3-\frac{8}{3}w_5w_3w_2^2+\frac{7}{3}w_4w_3^2w_2+\frac{5}{3}w_4w_3w_2^3+\frac{56}{405}w_3^4-\frac{1016}{405}w_3^3w_2^2+\frac{32}{135}w_3^2w_2^4\right.$$

$$\left.+\frac{2}{15}w_3w_2^6\right)$$

$$+H_3(x)w_3\left(-\frac{16}{3}w_5w_2^2+\frac{104}{9}w_4w_3w_2+\frac{16}{3}w_4w_2^3-\frac{1106}{243}w_3^3-\frac{76}{9}w_3^2w_2^2+\frac{2}{27}w_3w_2^4+\frac{4}{3}w_2^6\right)$$

$$+H_1(x)w_3\left(\frac{28}{9}w_4w_3w_2+\frac{8}{3}w_4w_2^3-\frac{560}{243}w_3^3-\frac{392}{81}w_3^2w_2^2-\frac{20}{27}w_3w_2^4+2w_2^6\right)\Bigg\}$$

§４．Cornish-Fisher逆展開

分布のパーセントを求めるためのCornish-Fisher逆展開は、次のように与えられる。いま、q_α をQ_n の１００αパーセント点とし、

$$q_\alpha = \theta_1\ \{h\theta_1^{-1}x_\alpha\sqrt{(2\theta_2)}+1+h(h-1)\theta_1^{-2}\theta_2\}^{1/h}$$

とおくと、x_α は標準正規分布の１００αパーセント点u_α を用いて、

$$x_\alpha \sim u_\alpha + \Sigma_{j=1}^{\infty} b_j\,\theta_1^{-j/2}$$

と展開される。係数b_j （$j=1, 2, 3, 4$）は次のような値である。

$$b_1=0$$

$$b_2=w_2^{-3}\left\{u_\alpha^3\left(\frac{1}{2}w_4w_2-\frac{20}{27}w_3^2+\frac{2}{9}w_3w_2^2\right)+u_\alpha\left(-\frac{3}{2}w_4w_2+\frac{14}{9}w_3^2\right)\right\}$$

$$b_3=\sqrt{2}w_2^{-9/2}\Bigg\{u_\alpha^4\left(\frac{2}{5}w_5w_2^2-\frac{4}{3}w_4w_3w_2+\frac{76}{81}w_3^3+\frac{1}{9}w_3^2w_2^2-\frac{1}{9}w_3w_2^4\right)$$

$$+u_\alpha^2\left(-\frac{12}{5}w_5w_2^2+6w_4w_3w_2-\frac{272}{81}w_3^3-\frac{2}{9}w_3^2w_2^2\right)+\left(\frac{6}{5}w_5w_2^2-2w_4w_3w_2+\frac{62}{81}w_3^3\right)\Bigg\}$$

$$b_4=w_2^{-6}\Bigg\{u_\alpha^5\left(\frac{2}{3}w_6w_2^3-\frac{8}{3}w_5w_3w_2^2-\frac{9}{8}w_4^2w_2^2+6w_4w_3^2w_2+\frac{1}{3}w_4w_3w_2^3-\frac{1144}{405}w_3^4-\frac{52}{135}w_3^3w_2^2\right.$$

$$\left.-\frac{2}{15}w_3^2w_2^4+\frac{2}{15}w_3w_2^6\right)$$

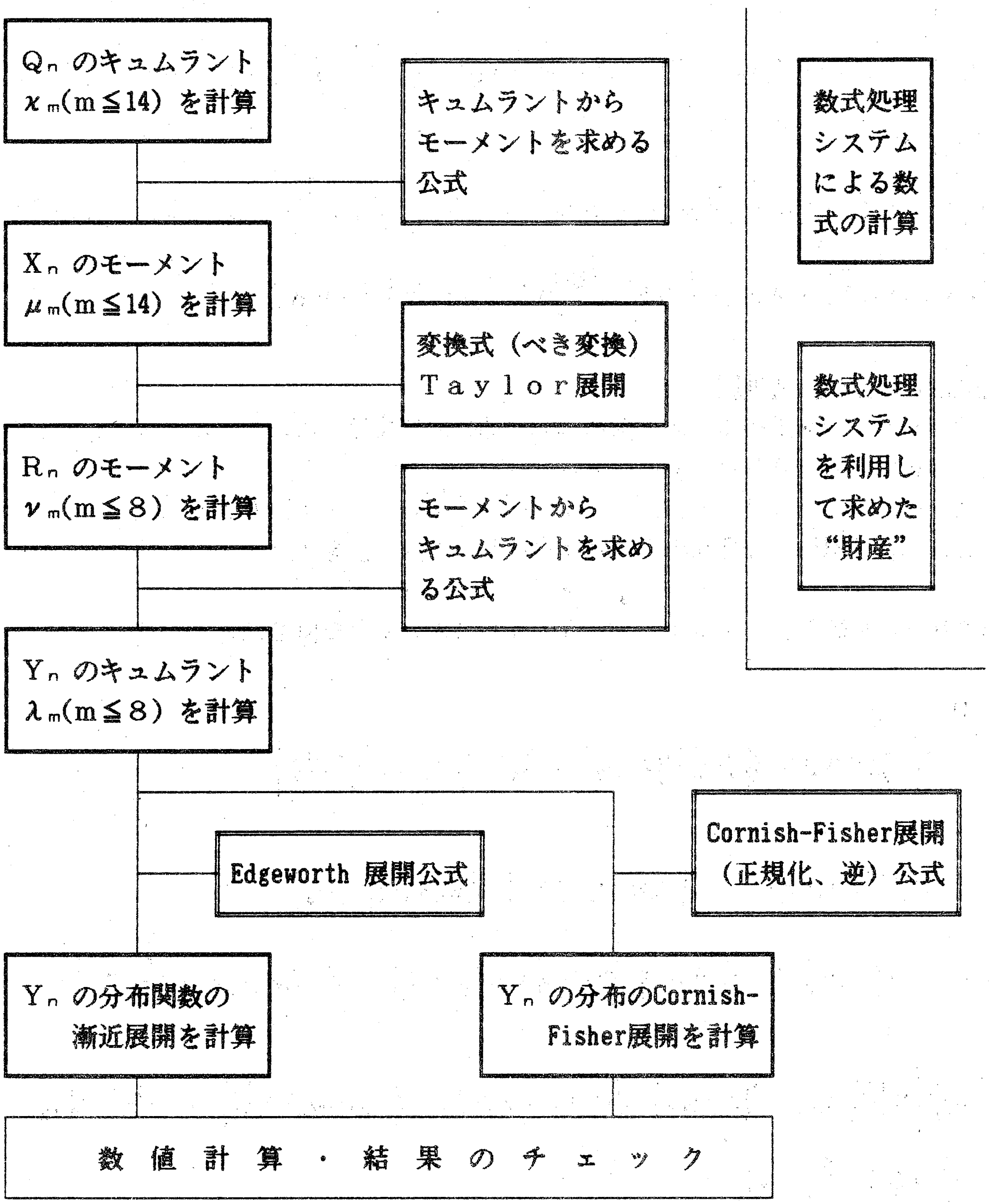
$$+u_\alpha^3\left(-\frac{20}{3}w_6w_2^3+\frac{64}{3}w_5w_3w_2^2+9w_4^2w_2^2-\frac{367}{9}w_4w_3^2w_2-w_4w_3w_2^3+\frac{4144}{243}w_3^4+\frac{20}{27}w_3^3w_2^2\right.$$

$$\left.+\frac{8}{27}w_3^2w_2^4\right)$$

$$+u_\alpha\left(10w_6w_2^3-24w_5w_3w_2^2-\frac{87}{8}w_4^2w_2^2+\frac{113}{3}w_4w_3^2w_2-\frac{350}{27}w_3^4+\frac{4}{27}w_3^3w_2^2\right)\Bigg\}$$

§５．数式処理

前記の式は、数式処理システムであるＲＥＤＵＣＥ 3.1を利用して、さらにθ_1^{-3}のオーダ（ｊ＝６）の項まで求めている。その結果、Q_n の分布が大きく歪んではいない場合、θ_1^{-2}のオーダまでの式で約３桁、θ_1^{-3}のオーダの式を用いれば約４桁の精度で分布関数の近似値を得ることができた。処理の概略は、次の図のようにまとめることができよう。



参考文献

Jensen & Solomon (1972). A Gaussian approximation to the distribution of a definite quadratic form, J. Amer. Statist. Assoc., 67.

Niki & Konishi (1984). Effects of transformations in higher order asymptotic expansions, Res. Memo. No. 284, Inst. Statist. Math.