

# Elementary 作用素のスペクトラムについて

工越教育大 長 宗雄 (Muneo Chō)

## §1. Introduction

$H$  を complex Hilbert space とし.  $H$  上の bounded linear operators からなる 2 つの可換な  $n$ -tuples  $A=(A_1, \dots, A_n)$ ,  $B=(B_1, \dots, B_n)$  に対して.

$$R: B(H) \rightarrow B(H) \quad R(X) = \sum_{i=1}^n A_i X B_i$$

と定義された elementary 作用素  $R$  のスペクトラム  $\sigma(R)$  は  
1983年 R. Curto により

$$\sigma(R) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \sigma_T(A), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \sigma_T(B) \right\}$$

(ここで  $\sigma_T(\cdot)$  は Taylor による joint spectrum を記す.)

となることが示されたので. これについて報告する.

厂的には.

$$m(X) = AXB, \quad J(X) = AX - XB$$

なる elementary 作用素  $m, J$  のスペクトラム  $\sigma(m), \sigma(J)$

については. Lumer-Rosenblum により

$$\sigma(M) = \sigma(A) \cdot \sigma(B), \quad \sigma(J) = \sigma(A) - \sigma(B)$$

となることが示され. 一般の  $R$  については.

Davis-Rosenthal により

$$\sigma_{\pi}(R) \subset \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \mid \alpha_i \in \sigma_{\pi}(A_i), \beta_i \in \sigma_{\delta}(B_i) \right\}$$

$$\sigma_{\delta}(R) \subset \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid \alpha_i \in \sigma_{\delta}(A_i), \beta_i \in \sigma_{\pi}(B_i) \right\}$$

となることが示された.

次に. 2つの  $n$ -tuples  $A = (A_1, \dots, A_n)$ ,  $B = (B_1, \dots, B_n)$

に対して.

$$L_A = (L_{A_1}, \dots, L_{A_n}), \quad R_B = (R_{B_1}, \dots, R_{B_n})$$

を言うことにする.  $K$  に対し.  $L_T(x) = Tx$ ,  $R_T(x) = xT$  である.

また. complex Banach space  $X$  上の bounded linear operators の  $n$ -tuple  $A = (A_1, \dots, A_n)$  に対して.

$$\sigma_{\ell}(A, X) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \sum_{i=1}^n S_i (A_i - \lambda_i) \neq I, \forall S_i \in B(X) \right\}$$

$$\sigma_r(A, X) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \sum_{i=1}^n (A_i - \lambda_i) S_i \neq I, \forall S_i \in B(X) \right\}$$

と定義する.

最後に. Hilbert space  $H$  上の Hilbert-Schmidt class  $\mathfrak{C}_2$  を記し. この norm を  $\|\cdot\|_2$  で表わす.

## § 2. Theorem

Theorem.  $H \in$  complex Hilbert space とし.  $H$  上の bounded linear operators からなる 可換な 2 つの  $n$ -tuples  $A = (A_1, \dots, A_n)$

$$B = (B_1, \dots, B_n) \text{ に対して } R(X) = \sum A_i X B_i \quad (X \in B(H))$$

$$\text{とすると } \sigma(R) = \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \sigma_T(A), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \sigma_T(B) \right\}$$

である.

この定理の証明のためにいくつかの lemma を与える.

Lemma 1. complex Hilbert space  $H$  上の 2 つの  $n$ -tuples

$$A = (A_1, \dots, A_n), B = (B_1, \dots, B_n) \text{ に対して}$$

$$\sigma_\ell(A, H) = \sigma_\ell(L_A, \mathfrak{C}_2), \quad \sigma_r(B, H) = \sigma_r(L_B, \mathfrak{C}_2)$$

$$\text{pr. } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \notin \sigma_\ell(A, H) \text{ とすると } \exists S_i \in B(H); \sum S_i (A_i - \lambda_i) = I$$

$$\therefore \sum L_{S_i} (L_{A_i} - \lambda_i) = I$$

$$\text{よ) } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \notin \sigma_\ell(L_A, \mathfrak{C}_2)$$

逆に.  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \notin \sigma_\ell(L_A, C_2)$  とする.

$$\therefore \exists \delta > 0 ; \sum \| (L_{A_i} - \lambda_i) T \|_2 \geq \delta \| T \|_2 \quad (\forall T \in C_2)$$

そこで.  $\forall x \in H ; \|x\|=1$  なる vector に對して.  $T_{x,x} (\in C_2)$  を

代入して.

$$\sum \| (L_{A_i} - \lambda_i) T_{x,x} \|_2 \geq \delta \| T_{x,x} \|_2$$

$$\therefore \sum \| (A_i - \lambda_i) x \| \geq \delta > 0$$

$$\therefore (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \notin \sigma_\ell(A, H)$$

次に.  $\lambda \notin \sigma_r(B, H) \Rightarrow \lambda \notin \sigma_r(L_B, C_2)$  も同様を示される.

今.  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \notin \sigma_r(L_B, C_2)$  とする.

$\forall x \in H$  に對して.  $T_{x,x} \in C_2$  とする.

$$\exists X_i \in C_2 ; \sum (L_{B_i} - \lambda_i) X_i = T_{x,x}$$

$$\therefore \sum (B_i - \lambda_i) X_i x = x$$

$$\therefore (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \notin \sigma_r(B, H)$$

Q. E. D.

### Lemma 2. (Harte)

complex Hilbert space  $H$  上の 2 つの  $n$ -tuples  $A = (A_1, \dots, A_n)$

$B = (B_1, \dots, B_n)$  に對して.

$$(1). \sigma_\ell((L_A, R_B), B(H)) = \sigma_\ell(A, H) \times \sigma_r(B, H)$$

$$(2). \sigma_r((L_A, R_B), B(H)) = \sigma_r(A, H) \times \sigma_\ell(B, H)$$

Lemma 3. (Choi-Davis)

complex Banach space 上の可換な  $n$ -tuple  $A = (A_1, \dots, A_n)$  に対して,  $f$  を  $n$ 変数多項式とすると.

$$f(\sigma_\ell(A)) = \sigma_\ell(f(A)) \quad , \quad f(\sigma_r(A)) = \sigma_r(f(A))$$

Lemma 4. (Taylor)

complex Banach space 上の可換な  $n$ -tuple  $A = (A_1, \dots, A_n)$  に対して,  $f$  を  $n$ 変数多項式とすると.

$$f(\sigma_\tau(A)) = \sigma_\tau(f(A))$$

Lemma 5. complex Hilbert space  $H$  上の 2つの可換な  $n$ -tuples  $A = (A_1, \dots, A_n)$ ,  $B = (B_1, \dots, B_n)$  に対して.

$$\sigma_\ell(R, B(H)) = \sigma_\ell(R, C_2) \quad , \quad \sigma_r(R, B(H)) = \sigma_r(R, C_2)$$

pr.  $z, w \in \mathbb{R}^n$  に対して,  $f(z, w) = \sum z_i w_i$  とすると.

$R$  は,  $R = f((L_A, R_B))$  となるので.

Lemma 3 から

$$\begin{aligned} \sigma_\ell(R, B(H)) &= \sigma_\ell(\sum L_{A_i} R_{B_i}, B(H)) = \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid (\alpha, \beta) \in \sigma_\ell((L_A, R_B), B(H)) \right\} \\ &\stackrel{\text{Lemma 2}}{=} \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid \alpha \in \sigma_\ell(A, H), \beta \in \sigma_r(B, H) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Lemma 1}}{=} \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid \alpha \in \sigma_L(L_A, \mathbb{C}_2), \beta \in \sigma_r(L_B, \mathbb{C}_2) \right\} \\
& = \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid \alpha \in \sigma_L(L_A, \mathbb{C}_2), \beta \in \sigma_L(R_B, \mathbb{C}_2) \right\} \\
& = \sigma_L(R, \mathbb{C}_2)
\end{aligned}$$

$\sigma_r(\cdot)$  についても同様である。

Q. E. D.

Lemma 6 (Ceaușescu-Vasilescu)

$H, K$  は complex Hilbert space とする。  $A = (A_1, \dots, A_n) \in H$  上の可換な  $n$ -tuple,  $B = (B_1, \dots, B_n) \in K$  上の可換な  $n$ -tuple とし。

$A \otimes B = (A_1 \otimes B_1, \dots, A_n \otimes B_n)$  とするときは

$$\sigma_r(A \otimes B) = \sigma_r(A) \cdot \sigma_r(B)$$

Lemma 7 (Brown-Pearcy)

$H$  は complex Hilbert space とし。  $H'$  は  $H$  の opposed な Hilbert space とする。 また、  $T \in B(H)$  に対応する  $H'$  上の作用素  $T'$  を記すとき、

$$\begin{array}{ccc}
H' \otimes H & \longrightarrow & \mathbb{C}_2 \\
z \otimes x & \longrightarrow & T_{z,x}
\end{array}$$

なる map は isomorphic と isometric な extension である。

すなわち、

$$\begin{array}{ccc}
 B(H') \otimes B(H) & \longrightarrow & B(G_2) \times B(G_2) \quad \text{is isomorphism} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B^* \otimes A & \longrightarrow & (L_A, R_B)
 \end{array}$$

ここで:  $T_{z,x}(y) = (y, z)x$  である。

以上により定理の証明を与える。

pr.

$$\sigma(R) = \sigma_l(R, B(H)) \cup \sigma_r(R, B(H))$$

$$= \sigma_l(R, G_2) \cup \sigma_r(R, G_2) = \sigma(R, G_2)$$

Lemma 5

$$= \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid (\alpha, \beta) \in \sigma_T((L_A, R_B), G_2) \right\}$$

Lemma 4

$$= \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid (\beta, \alpha) \in \sigma_T(B^* \otimes A, H \otimes H) \right\}$$

Lemma 7

$$= \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid \alpha \in \sigma_T(A), \beta \in \sigma_T(B^*, H) \right\}$$

Lemma 6

$$= \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid \alpha \in \sigma_T(A), \bar{\beta} \in \sigma_T(B^*, H) \right\}$$

$$= \left\{ \sum \alpha_i \beta_i \mid \alpha \in \sigma_T(A), \beta \in \sigma_T(B) \right\}$$

Q. E. D.

## References

1. Brown & Pearcy, Spectra of tensor products of operators, Proc. A.M.S. 17 (1966), 162-166.
2. Ceaușescu & Vasilescu, Tensor products and the joint spectrum in Hilbert spaces, Proc. A.M.S. 72 (1978), 505-508.
3. Choi & Davis, The spectral mapping theorem for joint approximate point spectrum, Bull. A.M.S. 80 (1974), 317-321.
4. Curto, The spectra of elementary operators, 32 (1983), 193-197.  
Indiana U. Math. J.
5. Davis & Rosenthal, Solving linear operator equations, Canad. J. Math. 26 (1974), 1384-1389.
6. Harte, Tensor products, multiplication operators and the spectral mapping theorem, Proc. Roy. Irish Acad. A. 72 (1973), 285-302
7. Lumer & Rosenblum, Linear operator equations, Proc. A.M.S. 10 (1959) 32-41
8. Taylor, The analytic functional calculus for several commuting operators, Acta Math. 125 (1970), 1-38.