数理解析研究所講究録
第582巻 1986年 9-18

Operators with one dimensional self-commutators

北大応電研　中村美浩　(Yoshihiro Nakamura)

§1. 序.　$\mathcal{H}$を可分な複素Hilbert空間、$\mathcal{L}(\mathcal{H})$を$\mathcal{H}$上の有界線型作用素の全体とする。$T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$は、self-commutator $[T^*,T]\equiv T^*T-TT^*$がpositive semi-definiteのときhyponormal operatorと呼ばれる。例えば、normal operatorはhyponormalである。また、self-commutatorがrank 1の作用素Tは、TまたはT^*がhyponormalである。$T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$は、normal summandを持たないとき（i.e. closed subspace $\mathfrak{M}$が$T\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$, $T^*\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$, $T|\mathfrak{M}$: normal $\Rightarrow \mathfrak{M}=\{0\}$）completely non-normalであると云われる。Tが$\operatorname{rank}[T^*,T]=1$のときは、$T$がcompletely non-normalであることとTがirreducible（自明でないreducing subspaceを持たない）であることは同値である。

self-commutatorがrank 1の作用素の例としては、unilateral shiftがまず上げられるが、一般に次のような例がある。

定理（Xia, 1962）． $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を irreducible な self-commutator が rank 1 の作用素とする。さらに、Re T が simple spectrum を持つとするならば、T は次のような $L^2(\alpha,\beta)$ 上の作用素と unitary 同値である： $S : L^2(\alpha,\beta) \longrightarrow L^2(\alpha,\beta)$,

$$Sf(t) = tf(t) + i\left\{a(t)f(t) + \frac{b(t)}{2i}\int_\alpha^\beta \frac{\overline{b(s)}f(s)}{t-s}ds\right\}, \quad f \in L^2(\alpha,\beta)$$

ただし、$a, b \in L^\infty(\alpha,\beta)$, $a = \bar{a}$ 。

一般の hyponormal operator についても、上のような singular integral model が知られている。T が completely non-normal hyponormal operator ならば、その real part Re T は absolutely continuous であることを注意しておく。（Clancey [3] 参照）

この稿では、hyponormal operator（特に self-commutator が 1 次元の作用素）に関する最近の結果を、principal function との関連に重点を置いて紹介する。

§2. Principal function. hyponormal operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が completely non-normal であるための必要十分条件としては次のようなものがある：

(i) ran D を含む最小の T で reducing な subspace は $\mathcal{H}$ である.

(ii) span$\{T^{*m}T^n f : f \in \text{ran } D,\ m, n = 0, 1, 2, \cdots\} = \mathcal{H}$.

(iii) span$\{T_w^{*-1}T_z^{-1} f : f \in \text{ran } D,\ |z|, |w| > \|T\|\} = \mathcal{H}$.

ただし、$D \equiv [T^*, T]$ とおいた。また、$T_z = T - zI$ $(z \in \mathbb{C})$。
上から次が容易にわかる。

定理. T と S を self-commutator が1次元, $[T^*, T] = \varphi \otimes \varphi$, $[S^*, S] = \psi \otimes \psi$ $(\varphi, \psi \in \mathcal{H})$, かつ irreducible な作用素とするとき、次は同値である。

(i) T と S は unitary 同値である.

(ii) $\langle T_z^{-1}\varphi, T_w^{-1}\varphi \rangle = \langle S_z^{-1}\psi, S_w^{-1}\psi \rangle$ for $|z|, |w| > M$.

(iii) $\| T_z^{-1}\varphi \| = \| S_z^{-1}\psi \|$ for $|z| > M$.

上は $\{ \| T_z^{-1}\varphi \| \}_{z > \|T\|}$ が1次元の self-commutator を持つ作用素の unitary invariant であることを示している。この他に、hyponormal operator の unitary invariant としては determining function ($T = X + iY$, $D = [T^*, T] \geq 0$ のとき)

$$E(z, w) = I + \frac{1}{2i} D^{\frac{1}{2}} (X - z)^{-1} (Y - w)^{-1} D^{\frac{1}{2}}, \quad z \notin \sigma(X), w \notin \sigma(Y).$$

などがあるが、Pincus によって導入された principal function は重要な unitary invariant である.

定理. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が $[T^*, T] \in$ trace class のとき、次を満す compactly supported real valued integrable function g が存在する:

$$\mathrm{tr}\,[p(T,T^*),\,q(T,T^*)] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \{\bar\partial p\,\partial q - \partial p\,\bar\partial q\}\, g\, dm_2$$

$$\text{for } {}^\forall p = p(z,\bar z),\ q = q(z,\bar z) : \text{polynomials}.$$

ただし、$\partial p, \bar\partial p$ は各々変数 $z, \bar z$ による微分を表し、dm_2 は2次元の Lebesgue measure である。また、$p(z,\bar z) = \sum a_{ij} z^i \bar z^j$ に対して $p(T,T^*) = \sum a_{ij} T^i T^{*j}$ とする。

上の g を T の principal function と呼ぶが、g は次の式から決まると云ってもよい：

$$\det\{(T-w)^*(T-z)(T-w)^{*-1}(T-z)^{-1}\}$$
$$= \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)(\bar\zeta - \bar w)}\, dm_2(\zeta)\right\} \quad \text{for } {}^\forall z, \bar w \in \mathbb{C}\setminus\sigma(T).$$

principal function は Fredholm index と密接に関連している：

$$g(z) = -\,\mathrm{ind}\,(T - z) \qquad \text{for } z \in \mathbb{C}\setminus\sigma_e(T).$$

$[T^*, T] \geq 0$ ならば $g \geq 0$ a.e. であり、さらに T が cyclic vector を持てば $0 \leq g \leq 1$ a.e. である。また、T が self-commutator が rank 1 の hyponormal operator ならば $0 \leq g \leq 1$ である。このとき、g は completely unitary invariant である。すなわち、compact support を持ち $0 \leq g \leq 1$ を満す可測関数と self-commutator が rank 1 の hyponormal operator は、unitary 同値を除いて一対一に対応する。（詳しくは、Clancey [3], Carey - Pincus [1] を参照。）

§3. Global local resolvent. principal function は local resolvent との関連で invariant subspace の存在のための十分条件の証明にも使われた（Clancey-Wadhwa [7], Nakamura [8]）。ここでは、global local resolvent との関係について述べる。

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を hyponormal operator, $D \equiv [T^*, T]$ とする。このとき、$D + T_z T_z^* = T_z^* T_z \quad (z \in \mathbb{C})$ より

$$\exists C(z), K(z) : \text{contraction s.t.}$$

$$T_z^* C(z) = D^{1/2}, \quad T_z^* = K(z) T_z$$

$$C(z)^* \ker T_z^* = K(z) \ker T_z^* = \{0\}.$$

$C(z), K(z)$ は $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T^*)^*$ で weakly continuous になる。また、$\ker T_z^*$ への projection を $P(z)$ とかけば、

$$C(z)C(z)^* + K(z)^* K(z) = I - P(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$[K(z), T] = D^{1/2} C(z)^* \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

が成り立つ。$C(z)$ を hyponormal operator T の global local resolvent と呼ぶ。（または、$C(z)f$, $f \in \mathcal{H}$ を呼ぶ。）

global local resolvent と principal function の間には、次のような関係がある。（Clancey [5]）

定理. $D^{1/2} \in$ trace class ならば、$tr\{D^{1/2} C(z)^*\} = \hat{g}(z)$ が成り立つ。ただし、$\hat{g}$ は measure $g\,dm_2$ の Cauchy 変換を表す。特に、$g(z) = -\bar{\partial}\, tr[K(z), T] = -\bar{\partial}\, tr\{D^{1/2} C(z)^*\}$ a.e. z.

T の self-commutator が rank 1, $[T^*,T]=\varphi\otimes\varphi$ ($\varphi\in\mathcal{H}$) のときは、$C(z)=T_z^{*-1}\varphi\otimes\frac{\varphi}{\|\varphi\|}$ ($T_z^{*-1}\varphi$ で $T_z^*x=\varphi$ の minimum norm solution を表す。) となるから上を言い換えると

$$\langle r(T)\varphi, T_z^{*-1}\varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{r(\zeta)}{\zeta-z}g(\zeta)\,dm_2(\zeta)$$
$$\text{for } {}^\forall r\in Rat(\sigma(T)),$$

$$g(z) = -\bar\partial\langle\varphi, T_z^{*-1}\varphi\rangle \quad \text{a.e.}$$

となる。global local resolvent $T_z^{*-1}\varphi$, $z\in\mathbb{C}$ には以下のような性質がある：

(i) $\|T_z^{*-1}\varphi\|\leqq 1$, $z\in\mathbb{C}$,

(ii) $\operatorname{span}\{T_z^{*-1}\varphi : z\in\mathbb{C}\} = \mathcal{H}_1 \equiv$ completely non-normal part

(iii) $\|T_z^{*-1}\varphi\| = 1$ on $\sigma_p(T_1^*)^*$, $T_1\equiv T|\mathcal{H}_1$

(iv) $T_z^{*-1}\varphi$ は weakly continuous on $\mathbb{C}$, strong continuous off $\{z\in\sigma(T) : \|T_z^{*-1}\varphi\|<1\}$.

さらに、(iv) の strongly continuous でない集合は principal function によって

$$\left\{z\in\mathbb{C} : \int_{\mathbb{C}}\frac{g(\zeta)}{|\zeta-z|^2}\,dm_2(\zeta)<+\infty\right\}$$

とも characterize できる。この集合は零集合だから、

$$\|T_z^{*-1}\varphi\| = 1 \quad \text{a.e. } z\in\sigma(T).$$

よって、g による $\sigma_p(T^*)$ の characterize と合せて、

${}^\exists z_0\in\sigma(T)$ s.t. $K(z_0)$ は co-isometry かつ $\operatorname{rank}(I-K(z_0)K(z_0)^*)=1$.

がわかる。すなわち、${}^\exists K=K(z_0)$ co-isometry s.t.

$$T_{z_0}^* = K T_{z_0}, \quad \mathrm{rank}(I - KK^*) = 1.$$

これから、次のような1次元の self-commutator を持つ作用素の Toeplitz model が導ける。(Clancey [4])

定理. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を $\mathrm{rank}[T^*, T] = 1$ の irreducible な hyponormal operator とすれば、$\exists z_0 \in \mathbb{C}$ が存在して T_{z_0} は Toeplitz model $T_{\eta(U)A}$ と unitary 同値になる：

$$\tilde{\mathfrak{G}} = L^2 \oplus \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathcal{H}(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad \tilde{\mathcal{H}} = H^2 \oplus \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathcal{H}(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$U : \tilde{\mathfrak{G}} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{G}}, \quad U\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} f \\ e^{i\theta} g \end{bmatrix}$$

P : $\tilde{\mathfrak{G}}$ から $\tilde{\mathcal{H}}$ への projection

$$T_{\eta(U)A}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{12}^* & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

$$AU = UA, \quad \eta(e^{i\theta}) = e^{i\theta/2}, \quad A = A^*.$$

global local resolvent $T_z^{*-1}\varphi$ を持いると、T の distributional model も考えることが出来る。すなわち、T が irreducible で $[T^*, T] = \varphi \otimes \varphi$ のとき線型作用素

$$V : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{E}' = \{\text{distributions with compact support}\}$$

$$Vf = -\bar{\partial}\langle f, T_z^{*-1}\varphi \rangle$$

は連続で一対一であり、

$$VTf = z\,Vf \qquad f \in \mathcal{H}$$

を満すので、$\mathcal{E}'$ に適当なノルムを入れてやれば、T を z-multiplication と unitary 同値にできる。(Putinar [9])

§4. Cyclic vector. hyponormal operator が cyclic vector を持てば、その principal function が $0 \leq g \leq 1$ となることから、十分大きい自然数 n で T^n が invariant subspace を持つことは以前に指摘されていた(Clancey [3] 参照)。その他の形でも、principal function を利用した cyclic vector の存在の判定がある。

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が irreducible で $[T^*, T] = \varphi \otimes \varphi$ のとき、次は容易にわかる:

$$\varphi : \text{cyclic vector for } T \iff T^*\varphi \in \bigvee \{ T_z^{-1}\varphi : |z| > \|T\| \},$$

$$\varphi : \text{rationally cyclic vector for } T$$

$$\iff T^*\varphi \in \bigvee \{ T_z^{-1}\varphi : z \notin \sigma(T) \}.$$

この条件と global local resolvent を合せて考えることにより例えば、

$$g = \chi_E \quad , \text{ E は closed set of finite perimeter}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ is rationally cyclic for } T$$

等のことを導くことが出来る。(Clancey [5])

REFERENCES

1. Carey, R. W. and Pincus, J. D.: Construction of seminormal operators with prescribed mosaic, Indiana Univ. Math. J., 23 (1974), 1155-1165.

2. Carey, R. W. and Pincus, J. D.: Mosaics, principal functions and mean motion in von Neumann algebras, Acta Math., 138 (1977), 153-218.

3. Clancey, K.: Seminormal operators, Springer Verlag, Lecture Notes in Math., No. 742, 1979.

4. Clancey, K.: Toeplitz models for operators with one dimensional self-commutators, Operator Theory: Advances Appl., Vol. 11, pp. 81-107, Birkhäuser Verlag, 1983.

5. Clancey, K.: The Cauchy transform of the principal function associated with a non-normal operaotr, Indiana Univ. Math. J., 34 (1985), 21-32.

6. Clancey, K.: Hilbert space operators with one dimensional self-commutators, J. Operator Theory, 13 (1985), 265-289.

7. Clancey, K. and Wadhwa, B. L.: Local spectra of seminormal operaotrs, Trans. Amer. Math. Soc., 280 (1983), 415-428.

8. Nakamura, Y.: Principal funcitons and invariant subspaces of hyponormal operators, Hokkaido Math. J., 12 (1983), 1-9.

9. Putinar, M.: Hyponormal operators are subscalar, J. Operator Theory, 12 (1984), 385-395.

10. Xia, D.: On non-normal operators, Chinese J. Math., 3 (1963), 232-246.

11. Xia, D.: Spectral theory of hyponormal operators, Operator Theory: Advances Appl., Vol. 10, Birkhäuser Verlag, 1983.