数理解析研究所講究録
第582巻 1986年 31-39

Intertwining by Non-Zero Operators

琉球大学教養部　呉屋　永徳　(Eitoku Goya)
琉球大学理学研究科　星野　朗　(Akira Hoshino)

§1. 序文.　複素ヒルベルト空間H上の有界作用素の作る代数をB(H)で表わす。Stampfli-Wadhwaは[1]でhyponormal作用素の自然な拡張であるdominant作用素を導入し，一般化されたPutnam-Fuglede theoremを証明した。その後で，T，W，S $\in$ B(H)として次の問題を提示した。

問題 : $TW=WS$，Tをhyponormalで Sをcohyponormalとする。Wがdense rangeを持てば，Tはnormalか。

この問題はM. Radjabalipour [3 : Theorem 3]によって肯定的に解決されたがその証明法はTがM-hyponormal，Sがcodominantのときでも有効である。そこで我々は，T，Sに対する条件をかえ，Tをdominant，Sをco-M-hyponormalとしてこの問題を考えた。

この小論の目的は、上記の問題をはじめIntertwiningに関する最近の結果を紹介することである。

§2.　まずdominant作用素の定義から始める。

定義：　$T \in B(H)$は任意の$\lambda \in \mathbb{C}$に対して、$(T-\lambda I)H \subset (T-\lambda I)^*H$ をみたすとき、dominantという。この条件は任意の$\lambda \in \mathbb{C}$に対して、正の数M_λがあって、すべての$x \in H$に対して、$\|(T-\lambda I)^* x\| \leqq M_\lambda \|(T-\lambda I)x\|$をみたすことと同値であることはよく知られている。もし正の数Mがあって、すべての$\lambda \in \mathbb{C}$に対して、$M_\lambda \leqq M$のときTをM-hyponormalという。hyponormal作用素は1-hyponormal作用素のことである。

さて次の定理1では、0でない作用素とIntertwiningするdominant作用素やco M-hyponormal作用素のnormal direct summandsを考える。

定理1.　$T, W, S \in B(H)$, $TW = WS$とする。ここに, Tはdominant, SはcoM-hyponormalで, Wは任意の0でない作用素とする。　このとき, T, Sは次の如きnormal direct summandsをもつ。

(1)　$\ker W^* \oplus (\ker W^*)^\perp$で$T = T_1 \oplus T_2$,

$\ker W \oplus (\ker W)^\perp$ で $S = S_1 \oplus S_2$ である。ここに，T_2，S_2 は normal である。

(2)　特に W が normal なら，$\ker W \oplus (\ker W)^\perp$ で，$T = T_1 \oplus T_2$，$S = S_1 \oplus S_2$ である。

（証明）　$TW = WS$ より，$\overline{(WH)}$ は T の不変部分空間である。$\mathcal{E} = \overline{(WH)}$ とおき，$W_1 : H \longrightarrow \mathcal{E}$ を $W_1 x = Wx$ $(x \in H)$ で定義するとき，$W_1 \in B(H, \mathcal{E})$ は dense range をもち，$(T|\mathcal{E})W_1 = W_1 S$ である。ここで adjoint をとれば，$S^* W_1^* = (T|\mathcal{E})^* W_1^*$ となる。$\mathcal{L} = \overline{(W_1^* \mathcal{E})}$ とおき，$W_2 : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}$ を $W_2 x = W_1^* x$ $(x \in \mathcal{E})$ で定義すれば，$\mathcal{L} = \overline{(W^* H)}$ で，$(S^*|\mathcal{L})W_2 = W_2 (T|\mathcal{E})^*$，$W_2 \in B(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ は，1:1，dense range をもつ。ここで再び adjoint をとれば，$(T|\mathcal{E})W_2^* = W_2^*(S^*|\mathcal{L})^*$ である。$T|\mathcal{E} \in B(\mathcal{E})$ は dominant，$(S^*|\mathcal{L})^* \in B(\mathcal{L})$ は coM-hyponormal，$W_2^* \in B(\mathcal{L}, \mathcal{E})$ は 1:1，dense range をもつから [4: Theorem 3 (a)] により $T|\mathcal{E}$，$(S^*|\mathcal{L})^*$ は normal（よって，$S^*|\mathcal{L}$ も normal である）。よって，[1: Lemma 2] により，$\mathcal{E}$，$\mathcal{L}$ はそれぞれ T，S^* を reduce する。$\mathcal{E} = (\ker W^*)^\perp$，$\mathcal{L} = (\ker W)^\perp$ であるから (1) が示された。

次に，W が normal なら，$\ker W^* = \ker W$ であるから(2)が示された。

（証明終り）

Remark 1. 吉野氏は[6]で各作用素の行列表現を用いて一般化された Putnam Fuglede theorem を証明した。その証明を注意深くよめば彼はそこですでに定理1を得ていたことがわかる。しかしながら我々は，作用素の行列表現を用いずに直接これを証明した。定理1 (2) は [1 : Theorem 2] の一般化である。彼等は W が positive，S が normal のとき，これを証明した。

系1．[4 : Corollary 2]。定理1の仮定の下で，$\ker W$ が有限次元ならば，S は normal である。

（証明） 定理1より，$S = S_1 \oplus S_2$，$S_1 = S|\ker W$，S_2 normal とかける。$\ker W$ は S の有限次元 reducing subspace で，S^* は M-hyponormal であるから，$S^*|\ker W$ は normal である。よって $S_1 = (S^*|\ker W)^*$ も normal となる。これは S の normality を示している。

（証明終り）

Remark 2. M. Radjabalipour による系1の証明は解析的であり，かなり複雑である。

系2. 定理1の仮定の下で，$\ker W^*$ が有限次元（特にWが dense range を持つ）ならば，Tは normal である。もしWが dense range をもち，Sが coisometry ならば，Tは unitary である。

（証明） 定理1より $T = T_1 \oplus T_2$ とかける。ここに，T_2 は normal で，$T_1 = T|\ker W^*$，$\ker W^*$ はTの有限次元な reducing subspace である。よって，T_1 は normal となり，Tも normal である。次に，Wが dense range を持ち，Sが coisometry とする。このとき［6］より $T^*W = WS^*$ である。［5：Theorem 1］より，Tは coisometry である。Tは normal であるから，Tは unitary でなければいけない。

（証明終り）

Remark 3. 系2はT，S^* が dominant のときは成立しない。実際T，T^* が dominant である non normal 作用素Tが存在する［2］。

系3. 定理1の仮定の下で、T、Sは nontrivial reducing subspace をもつ。

(証明) Wが dense range を持てば、系2より Tは normal である。Wが dense range を持たなければ、定理1より $\ker W^*$ はTの nontrivial reducing subspace となる。次にWが1:1なら、定理1より $S=S_2$ は normal である。Wが1:1でないとき、定理1より、$\ker W$ はSの nontrivial reducing subspace となる。

(証明終り)

定理2. 次の三つの主張は同値である。

(1) 定理1.

(2) $T, W, S \in B(H)$; $TW=WS$ とする。Tが dominant, Sが co M-hyponormal, Wが1:1で dense range を持てば、T, Sは normal である。[4: Theorem 3 (a)].

(3) $T \in B(K)$ を dominant, $S^* \in B(H)$ をM-hyponormalとする。$TW=WS$ ($W \in B(H, K)$) ならば、$T^*W=WS^*$

である。[6]。

（証明）（1）から（2），（3）から（2）を示せば十分である。

はじめに（1）を仮定し，T，W，Sは（2）の条件をみたすものとする。そのとき，$\ker W = \ker W^* = \{0\}$ であるから、定理1より，$T = T_2$，$S = S_2$ は normal である。

次に（3）を仮定し，T，W，Sは（2）の条件をみたすものとする。$TW = WS$ であるから，（3）より $T^*W = WS^*$ を得る。[5：Theorem 1] の証明と全く同様にして，我々は T^* が M-hyponormal であることを示すことが出来る。よって [4：Theorem 2] により，すべての $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* \geqq D^2$ （$D \geqq 0$）である。ここに、Dは十分小さな $k > 0$ に対して $D = k|TT^* - T^*T|$ である。Tは dominant であるから、このときDが0でなければいけないことはよく知られている。これはTの normality を意味している。また $S^*W^* = W^*T^*$ であるから，[1：Theorem 1] より S は normal となる。

（証明終り）

我々は定理1をTが dominant，Sが coM-hyponormalという設定の下で考えて来たが、[5：Theorem 2]を用いることにより，Tがparanormal contraction，Sがcoisometryでも成り立つことがわかる。

参考文献

[1] J. G. STAMPFLI AND B. L. WADHWA : An asymmetric Putnam-Fuglede theorem for dominant operators, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 359 - 365.

[2] J. G. STAMPFLI AND B. L. WADHWA : On dominant operators, Monatshefte für Math. 84(1977), 143 - 153.

[3] M. RADJABALIPOUR : Ranges of hyponormal operators, Illinois J. Math. 21 (1977), 70 - 75.

[4] M. RADJABALIPOUR : ON MAJORIZATION AND NORMALITY OF OPERATORS, Amer. Math. soc., 62 (1977), 105 - 110.

[5] E. GOYA AND T. SAITO : ON INTERTWINING BY AN OPERATOR HAVING A DENSE RANGE, Tohoku Math. J. 33 (1981), 127-131.

[6] T. YOSHINO : REMARK ON THE GENERALIZED PUTNAM-FUGLEDE THEOREM, Proc. Amer. Math. soc., (to appear).