数理解析研究所講究録
第 582 巻 1986 年 40-49

直　交　性　寸　見

富田林高非常勤講師　加藤佳宣　（ Yoshinobu Kato ）
（1986年1月1日現在）

直交性の概念が数学に於いて基本的重要性を有していることはピタゴラスの定理以来明らかなことである。そして実際、現在に至るまで直交性の概念は数学の様々な分野に様々な姿で現われてきている。しかし、反面で、この概念の現われ方を通覧するといった作業は恐らく殆んど行なわれてきていないように見受けられる。本稿では、不十分な試みながら、在野の気楽さから、筆者の現在まで入手し得た限りの資料に基いて、そのような直交性の直録（サーベイ）を作製してみたい。このような作業の結果、直交性の観点から、作用素論に関してさえも基本的な課題を幾つか発掘し得たのではないかと思っている。

本稿の構成は四章に分かれる。第一章では各分野での直交性の様相を通観する。ここでは様々な直交性の定義が紹介される。続く第二章ではそうした直交性と関連する種々の概念を直交性の観点から眺め直してみる。ここが本稿の中心部である。第三章は、そうした話を作用素論の中に捉え返してみようとする一つの試みである。最近筆者の得た過渡的結果を一つ紹介したい。そして最後の第四章では、まとめの意味で、直交性についての幾つかの課題と一展望を筆者なりに述べてみたい。

本稿を作成するに当たり、直交性概念の単なる紹介以上のものになるよう懸命に努力してみたものの、非力を痛切に感じている。収集し得た資料のレベルに於いてすら、十分な目配りが数学全般に対して為し得ていないこともある。特に幾何関係の資料は大部分埒外にある。敢えて「寸見」と弁明する所以である。ただ出来上がった草稿はそれなりに愛着もあり、駄文として余りスペースを占めることもためらわれ、このような変則的な形で発表させて頂くことにしたことをお許し願いたい。

なお、最後になってしまいましたが、泉野佐一先生にはこの演題での筆者の研究集会発表をお勧め頂いた上に、資料の大半について入手の便宜をはかって下さるなどお礼の申し上げようもありません。ともかくもここに記させて頂き、せめてもの感謝を表させて頂きたいと思うばかりでおります。

1. 直交性通観

本章では、不十分ながら、筆者の入手し得た限りの資料に基いて、数学の各分野に現われる直交性の様相を紹介したい。記述の便宜上、これらを四節に分けて解説する。

① 半内積空間での直交性

線形空間 V 上の半内積（semi-inner product）$(\ ,\ )$ とは、$V\times V$ 上の $\mathbb{C}$（複素数）値関数で

1. $(x+y,\ z)=(x,z)+(y,z)$，$(\lambda x, y)=\lambda(x,y)$ for $\lambda\in\mathbb{C}$
2. $(x,x)>0$ for $x\neq 0$
3. $|(x,y)|^2\leqq(x,x)(y,y)$　を満たすものをいう。半内積の与えられている線形空間を半内積空間と

称するが、そこではそれを利用して自然に直交性の概念が定式化できる。[4]では次のように定義している。 x *is transversal to* $y \Leftrightarrow (x, y) = 0$

x *is normal to* $y \Leftrightarrow (y, x) = 0$

この定義を見る限り半内積の性質2,3は不要な訳であるから不定内積空間についても同様に直交性が考察できる筈であるが、それを扱った文献は未見である。

そて、半内積空間は $\|x\| \equiv (x, x)^{1/2}$ とノルムを定めることでノルム空間となっているから、ノルム空間よりも強い概念と言えるが、逆にノルム空間は次のように半内積空間と見做すことが出来る([4],[6])。

定理1. ノルム空間には、均質性(*homogeneity property*)

4. $(x, \lambda y) = \lambda^*(x, y)$ for $\lambda \in \mathbb{C}$ を持つ半内積(,)で $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ となるものが存在する

そこで、ノルム空間に対してはこの半内積(,)を利用して直交性を導入することが出来る。この場合、難点はその半内積が一意的ではないことで、その為、その直交性もそれに応じて変動してしまう。但し或る程度の不変性は有り、例えば次が成立することは容易に示せる。

定理2. ノルム空間 $X \ni x, y$ が、それに関連した或るひとつの半内積に対して「x *is normal to* y」であるとき $x \rfloor y$ となる

ここで $x \rfloor y$ とは②で再述するJames直交性([5], Jの記号は私案である)すなわち、$\|x\| \leqq \|x + \lambda y\|$ for $\lambda \in \mathbb{C}$ を意味する。もし、ノルム空間 X がもう少し良い性質の半内積を持つときには、直交性の概念は次のように一意に確定してしまう([4])。

定理3. ノルム空間 X が次の意味の連続性

5. $\mathrm{Re}(y, x + \lambda y) \longrightarrow \mathrm{Re}(y, x)$ for $\lambda \in \mathbb{R}$(実数)$\longrightarrow 0$ (Reは実部) を満たす半内積(,)を持つときには、この半内積に対して、 x *is normal to* $y \Longleftrightarrow x \rfloor y$

しかしながら、X がそのような半内積を持つというのは X のノルムに対して相当に強い条件となる。例えば B(H)(可分なHilbert空間上の有界線形作用素が自然に成すBanach空間)さえそのような半内積を持ち得ない。特に次のことが言える([3],[4])。

定理4. ノルム空間 X が*smooth*であること、すなわち常に X に於いてGâteaux微分 $\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$ が存在することと、X に性質1-5を満たす半内積が存在することとは同値

こうして、この方向には*smooth*ノルム空間にまでは直交性の概念が自然に導入でき、それがJということになる。

[1]に於いては、Banach空間 X に、集合値をとる次のような"半内積"(;)を定義して、そこから別の直交性を導入している。 $X \ni x, y$ に対して $(x; y) \equiv \{\varphi_y(x);\ X \xrightarrow{\varphi_y} \mathbb{C}$: 線形的 $\varphi_y(x) = \|\varphi_y\|\|y\|,\ \|\varphi_y\| = \|y\|\}$

$x \lrcorner y$、すなわち、x *is semi-orthogonal to* $y \Leftrightarrow (y; x) \ni 0$

更に、より厳しい直交性、

$x \perp y$、すなわち、x *is orthogonal to* $y \Leftrightarrow (y; x) = \{0\}$ 及び、

$x \perp\!\!\perp y$(この記号は私案)、すなわち、x *and* y *are mutually orthogonal* $\Leftrightarrow x \perp y \perp x$ も導入している。これらの概念は明らかに、X のノルムだけに依存して定まる。そしてここでも、

定理5. $x \lrcorner y \Rightarrow x \rfloor y$

の成立が容易に示せる。なお、定理5の逆の成立する必要条件については[3]の p.25に定理として次のものが与えられているが、詳細は略する。

定理6. $f \in X^*$(Banach空間 X の共役空間)に対して $x \rfloor y\ (\forall y \in \ker f) \Longleftrightarrow |f(x)| = \|f\|\|x\|$

これらの話は2ノルム空間といった話へも展開できそうに思われるが、それについては未見である。

また内積が部分的にだけ適宜定義されている部分内積空間(*partial inner product space*, 定義の詳細は略す)の研究に於いての直交性の概念の利用は、例えば[2]に見られる。

② ノルム空間での直交性

ノルム空間 X に於いては次のような種々の直交性が、直接ノルムから導入されている。

James直交性(*James orthogonality*, [11], [12], Birkhoff [7]にも同じ概念)

$x \,\mathrm{J}\, y \Leftrightarrow \|x\| \leqq \|x+\lambda y\|$ for $\lambda \in \mathbb{C}$

Roberts直交性(*Roberts orthogonality*, [13], 記号は私案)

$x \,\mathrm{\Gamma}\, y \Leftrightarrow \|x+\lambda y\| = \|x-\lambda y\|$ for $\lambda \in \mathbb{C}$

ピタゴラス直交性(*Pythagorean orthogonality*, [11], 記号は[9]による、[9]では*son orthogonality*と称している)

$x \# y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

isosceles orthogonality ([11], [12], 記号は私案)

$x \,\mathrm{I}\, y \Leftrightarrow \|x+y\| = \|x-y\|$

更に最近、#とIの統合一般化として次の概念が[10](記号も[10]による)で与えられた。$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$に対して $(x \perp y)(\alpha)$、すなわち、x is α-orthogonal to y $\Leftrightarrow (1+\alpha^2)\|x-y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2 + \|y-\alpha x\|^2$ という定義である。ここで $(\perp)(0) = \#$, $(\perp)(-1) = \mathrm{I}$ となっている。([10]ではノルム空間は実係数としている。)

別の方向として[8]にある直交性の定義は興味深い。そこではBanach空間Xに直交性を導入するのに、まずX上の有界線形作用素全体の成すBanach環B(X)を考える。$B(X) \ni T$が$\|e^{i\lambda T}\| \leqq 1$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$を満たすときTを*Hermitian*(B(H)での*self-adjoint*にあたるもの)といい、そのTが更に$T^2 = T$となっているときHermitian projectionという。$\mathcal{F} \neq \phi$をB(X)のHermitian projectionのみを要素に持つ一つの集合とするとき、$\mathcal{F}$に対してXに次のような直交性(記号も[8]による)を定義できる。

$x \perp_{\mathcal{F}} y$、すなわち、x is $\mathcal{F}$-orthogonal to $y \Leftrightarrow {}^{\exists}E, F \in \mathcal{F}: EF = 0,\ x \in EX,\ y \in FX$

実際には[8]では、$\mathcal{F}$-orthogonalityに良い性質を保証するため、$\mathcal{F}$に対してこれが(i.c.)-familyであるという条件を付加している。その定義は次のようなものであるが、詳細は略する。

$\mathcal{F}$がintersection propertyを持つ $\Leftrightarrow E, F \in \mathcal{F}$に対して ${}^{\exists}Q \in \mathcal{F}: QX = EX \cap FX$

$\mathcal{F}$がcomplement propertyを持つ $\Leftrightarrow I - E \in \mathcal{F}$ for ${}^{\forall}E \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$がこれら二つの性質を持つとき、(i.c.)-familyであるという

なお、[3]のp.24には、非線形関数解析に直交性の概念が有用であると書かれているが、その方面の文献は未入手である。半ノルム空間(*seminormed space*)についての文献は見当らないように思われる。

③ *(対合)を持つ代数系での直交性

*と0を持つ代数系に於いては直交性を導入することができる。例えば[19]では行列に対して

A is *-orthogonal to B $\Leftrightarrow A^*B = AB^* = 0$ という直交性を定義している。[14], [16], [17]に於いては、それぞれC^*環を適当に一般化した代数系の中で種々の直交性が定式化され利用されている。特に[17]の場合には、J^*環(定義は略す)と呼ぶ代数系$\mathcal{A}$を新しく考えた上で、その$\mathcal{A}$に対して次の直交性が与えられている。

A and B are orthogonal $\Leftrightarrow A^*B = B^*A = 0$

A and B are very orthogonal $\Leftrightarrow AC^*B = BC^*A = 0$ $({}^{\forall}C \in \mathcal{A})$

また、[18]では、Baer*環の一般化にあたる、或る少し特殊な条件を満たす環Rに対して直交性を

a is orthogonal to $b \Leftrightarrow {}^{\exists}x \in R: xb = bx = 0,\ axa = xax$ で定義している。しかし、以上に挙げた四定義は形式的面だけから見れば、より一般的な代数系にそのまま配備できる。特に、最後のものは*さえ必要としていない。

更に、[15]に於いては、C^*環の*self-adjoint*元全体を特殊な順序集合として抽象化した理論の枠組の中で、直交性が議論されているが、この詳細は略す。なお、BCK代数や近環(*near ring*)についても関連した研究が有りそうに思われるが、現在までに資料を入手し得ていない。

④ 公理的に導入した直交性

直交性を、その満たすべき適当な性質により直接、公理的に導入するという試みも見られる。その代表的なものは束(*lattice*)での直交補子(*orthocomplementation*)であろう([20])。束Lの直交補子$\perp$とはL上の写像で (i) $x \vee x^{\perp} = 1$, $x \wedge x^{\perp} = 0$ (ここで$x^{\perp}$はxの$\perp$による像、1, 0はそれぞれLの最大元、最小元とする)

(ii) $x \leq y \Rightarrow y^{\perp} \leq x^{\perp}$ （ここで $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$）

(iii) $x^{\perp\perp} = x$ を満たすものをいう。この⊥に対してLでの直交性が $x \perp y \Leftrightarrow x \leq y^{\perp}$ として定められる。この直交補子⊥を持つ束Lを直交補(orthocomplemented)束と呼ぶが、これが更に

(iv) $x \leq y \Rightarrow y = x \vee (y \wedge x^{\perp})$ を満たすとき orthomodular束(以下、OMLと略す)という。OMLの実例としては、B(H)の orthogonal projection ($p = p^* = p^2$ なるp)全体$\mathcal{P}$などがある。$\mathcal{P}$に於いては「$p \perp q \Longleftrightarrow (x, y) = 0$ for ${}^\forall x \in pH, {}^\forall y \in qH$」が成立している。

より直接に直交性を公理的に扱ったものに[23]がある。ここでは linear orthogonal space というものを次の性質を満たす⊥という二項関係の備わった線形空間として定義している。

(a) $x \perp y \Rightarrow y \perp x$

(b) $\{x\}^{\perp} \equiv \{y ; y \perp x\}$ が線形部分空間

(c) $x \perp {}^\forall y \Rightarrow x = 0$

直交性の公理にこのような性質を仮定することは確かに理論の展開をスムーズなものにするが、問題はこれが十分に包括性を持つ仮定かということである。例えばB(H)での $\rfloor$ は(a)も(b)も満たしていないし、B(H)での ⌟, #, 工 なども(b)を満たしてはいない。 [11], [12]に於いてはノルム空間Xの直交性に関して次の四性質

Ⅰ. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ (symmetry (対称性))

Ⅱ. $x \perp y \Rightarrow \lambda x \perp \mu y$ ($\lambda x, \mu y$はそれぞれx, yの係数倍) (homogeneity (均質性))

Ⅲ. $x \perp y, z \Rightarrow x \perp (y + z)$ (additivity (加法性))

Ⅳ. x, yに対して ${}^\exists \lambda$(係数): $x \perp (\lambda x + y)$ (名付けられていないので、仮に、可直性とでもしておく)

を論じている。これらの条件の強さについては、例えば[11]に、#や工がもしⅡかⅢを満たすだけで既にX自身が内積空間となってしまうことが示されている。

一般の集合Xに対して直交性の公理を与えようとした試みに[22]がある。そこではX上の二項関係⊥に対して、

⊥がX上の直交性 $\Leftrightarrow$ (i) $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ (対称性)

(ii) ${}^\exists 0 \in X$:「$0 \perp {}^\forall x \in X$」,「$X \ni {}^\forall x \perp 0$」,「$x \perp x \Rightarrow x = 0$」(在零性とでも?)

と定式化している。これは良く出来た公理系で、OMLでの⊥もこれを満たすし、また第二章の⑦で詳述する覧の構成も可能であるが、勿論B(H)での$\rfloor$は満たさない。やはり対称性の条件は強すぎるように思われる。ここで$\rfloor$を

$x \rfloor\!\lfloor y \Leftrightarrow x \rfloor y \rfloor x$ のように対称化してやれば確かに$\rfloor\!\lfloor$は公理系を満たせるが、このようなものは(⫫はあっても)文献には見当らないし自然ともいい難い。他方、在零性については、調べた限りに於いて、文献に現われたような意味のある直交性についてはすべて満たしている(但し、部分内積空間での⊥は、はじめから二項関係になっていない訳であるが、これも実質的には(i)(ii)を満たしているとは言いうる)ようである。この意味でこの在零性は直交性という概念の核にあるものだと言えるかもしれない。そうだとすると、これが何故、不定内積空間や半ノルム空間での直交性や過度に一般的な*代数系での直交性の定義などが文献に現われてこないのかの理由の一端を説明してくれそうでもある。そこで以下では、一般的に直交性というとき、これを在零性を持つ二項関係のことと解することにして、そのイメージを固めておきたい。なお、直交性をこうした広い意味で用いるとき、H自身の中にも通常の直交性とは異なるものが存在し得る。[22]にはその例として $x \perp y \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x, y) \leqq 0$ というものが提示されている。この⊥は対称性すら満たしている。

このように、直交性についての公理的な考察には興味深い試みが為されているものの、なお十分に本格的な公理的取り扱いは手持ちの資料中には未だ現われていないように思われる。

2. 直交性と関連する概念

直交性というものが直観的イメージとして非常に基本的なものであることから考えて、これが数学の様々な局面に顔を出し、いろいろな概念とつながりのあることは自然であると感じられる。そこで、そういった数学のいろいろな概念を、直交性の視点から改めて眺め直してみることも、意味のあることと思う。こうした考えから本章では、そうした散策を行なってみたい。

① 直交補集合

恐らく直交補空間の概念は解析学で最も重要な概念の一つであろう。これは既に紹介した[2],[8]などにも扱われている。一般に集合Xの部分集合Yに対してその直交補集合を $Y^\perp \equiv \{x\in X;\ x\perp Y\ (x\perp {}^\forall y\in Y$ の意味$)\}$ で定めることが出来る。[9]ではそれをノルム空間Xでの#について行ない、更に射影(projection)にあたるものを次のように導入している。　$X\ni x \xrightarrow{P_Y} y\in Y:\ (x-y)\,\#\,Y$　　xの像yの存在は常に保証される訳ではないが、存在しないxに対しては定義せずに置く。存在の一意性は保証される。[9]では、P_Yが全域で定義できる為の条件や、$Y^\perp$が剰余空間X/Yと同型になる為の条件などを論じている。

直交補集合に類似した概念に、台(support)が有る。これは、例えば$B(X)\ni T$に対して(ここでXはBanach空間)定義されるもので、　$Tx=0$ for ${}^\forall x\perp Y$　を満たす最小閉部分空間Y、といったふうに定式化される。双対的に、YがTの余台(cosupport)というのを、　$T^\forall x\perp Y$　を満たす最小閉部分空間のことと定めることも出来る。しかしこれらについてのまとまった取り扱いは、手持ちの資料中には見当らないようである。

② 可約性・既約性

[17]では、C^*環の一般化した或る代数系の設定下で、可約性を

xが可約 $\Longleftrightarrow {}^\exists y, {}^\exists z: y\perp z,\ x=y+z$　と定義している。可約でないとき既約である。直観的には可約というのは二個の直和因子に分解されることである。当然ながら直交性と関連がついてくる訳である。

③ 可換性

OMLでの可換性Cは　$xCy \Longleftrightarrow x=(x\wedge y)\vee(x\wedge y^\perp)$　で定義される。明らかに $x\perp y \Rightarrow xCy$ であり、直交性は可換性と関連している。そればかりではなく、この場合Cを⊥から

$$xCy \Longleftrightarrow {}^\exists p,{}^\exists q,{}^\exists r:\ p\perp q,\ q\perp r,\ p\perp r,\quad x=p\vee r,\ y=q\vee r$$

として再定義することも出来る。OMLの公理をもう少し弱めて、二元x, yの上限、下限の存在を$x\perp y$の場合にのみ仮定したものがOMP(*orthomodular partially ordered set*)であるが、このOMPにおいては可換性と直交性のつながりはもっと明確に現われてくる。[24]においてはOMPへ可換性(*commutativity*)の代わりに可較性(*compatibility*, 私訳)と呼びかえたものを、二元集合$\{x,y\}$でなく一般の部分集合Sに対して次のように導入している。

Sが可較的 $\Longleftrightarrow$ Sの任意の有限部分集合Fが必ず直交的被覆C_F(すなわちC_FはFのどの元もC_Fの或る部分集合の上限となっているような直交系(相互に直交的な元から成る集合)である)を持つ

④ 独立性

線形空間での二元x, yが直交していればそれらが一次独立であるというのは直観的イメージとしては自然であろう。実際、第一章で紹介した$\rfloor$, $\lrcorner$, #, I, $\dashv$, $\perp_S$などの直交性については、すべてこのことが成り立っている。こうして直交性は独立性とも関連していることになる。この関連を抽象的に取り扱ったものに[25]がある。そこでは集合X上の抽象的な直交性⊥に対して部分集合$Y\subset X$の独立性を

Y: 独立 $\Longleftrightarrow x\notin \bigvee_{y\in A\setminus\{x\}}\{y\}^{\perp\perp}$ for ${}^\forall x\in X$　と定義している。但し、この右辺の式が意味を持つためにXには相当に強い条件を付ける必要がある。その意味で十分自然な定式化とは言えないが、しかし少なくともこの定義が線形空間の一次独立性を念頭に置いたイメージとしては極く素朴なものであることは確かであろう。

なお、線形空間の一次独立性の概念を抽象化した他の概念としては近年来注目を浴びている擬陣(マトロイド)(*matroid*)がある。すると直交性はこの擬陣とも関連するということになる。更に擬陣はグラフ理論などとも重要な関連があるので、この方向からグラフの中に何か有用な直交性の概念を導入できるかもしれない。

⑤ 平行性・数域

直交性を角度として捉えるならば、平行性とのつながりも出てくる。恐らく直交性からの平行性の定義で最も素直なものは

$x\parallel y \Longleftrightarrow$「$x\perp z \Leftrightarrow y\perp z\ ({}^\forall z)$」(または「$z\perp x \Leftrightarrow z\perp y\ ({}^\forall z)$」であろう。すると、通常のHでの平行性は一次従属性と一致していることから、$B(H)\ni T$の通常の数域を

$W(T) \equiv \{(Tx, y)/(x, y) \,;\, x \mathbin{\backslash\!\backslash} y\}$ のように定義し直すことが出来る。この方向から、新しい数域の概念が作用素論に導入できるかもしれない。

⑥ 次元・階数

集合Xの次元を、Xに含まれる直交系の濃度(基数)の上限と定めれば、最も簡単に次元が定められる。別に集合Xの次元をXの元の階数の上限と捉えることも出来る。Xの元の階数については、Φを念頭に置けば次のような定式化が考えられてくる。まずXに前順序(*preorder*)

$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow$「$x \perp z \Rightarrow y \perp z \ (\forall z)$」 を定めれば、このとき「$x \succcurlyeq 0$」,「$0 \succcurlyeq x \Rightarrow x = 0$」が成り立つ(第一章④の直交性の性質より)。すなわち0はこの前順序に対して最小元となっている。そこでX∋xの階数は、0からxまでを結ぶ"組成列"長の上限として定めて置けばよい。

⑦ 覧(*manual*…「便覧」、ここでは覧と私訳しておく)

OMLは、いわゆる量子論理の一つの公理化とされているものであるが、最近OMLよりも更に基本的な公理化と称されているものに覧がある([21])。覧は直交性と非常に密接な関連が有るので、ここに定義を書きつけて置きたい。

まず、$\mathcal{A}$を或る集合$X \neq \Phi$に対して$\mathcal{A} \subset 2^X$かつ$\bigcup\{A \,;\, A \in \mathcal{A}\} = X$なるものとする。$X$, $\mathcal{A}$の元をそれぞれ、起象(*outcome*, 私訳)、試行(*operation*, 私訳)と呼ぶ。更に、$\mathcal{E}(\mathcal{A}) \equiv \{E \,;\, E \subset {}^{\exists}A \in \mathcal{A}\}$の元を行事(*event*, 私訳)という。ここで直交性を次のように導入する。

$X \ni x, y \quad x \perp y \Leftrightarrow x \neq y$ かつ $x, y \in {}^{\exists}A \in \mathcal{A}$

$\mathcal{E}(\mathcal{A}) \ni A, B \quad A \perp B \Leftrightarrow x \perp y$ for ${}^{\forall}x \in A$, ${}^{\forall}y \in B$

このとき$\mathcal{A}$が覧であるとは次を満たすことである。

(i) $\mathcal{A} \ni A, B \quad A \subset B \Rightarrow A = B$, (ii) $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \ni A, B \quad A \perp B \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$

すなわち、覧とは何かしら極大直交系の族といったイメージのものである。実際、第一章④での対称性と在零性をもつ$\perp$からそのような覧を作ることができる。特に、OMLの直交性に対してそのような覧が構成できるから、OMLは覧の特別なものと見做せることになる。

⑧ その他

直交性に関連した古典的な結果には、例えばピタゴラスの定理、三垂線の定理、Fourier展開、Gram-Schmidtの直交化法などがまず頭に浮かぶ。このうち最後のものは[26]に公理的な枠組で取り扱われたが、他はまだそのような考察が為されていないようである。また、$\rfloor$と近似子(*approximant*)との間に次のような関連があることを注意しておきたい。(証明は容易であるので略す。)

定理7. ノルム空間Xとその部分空間Yをとる。$X \ni x$に対し$dist(x, Y) (\equiv \inf_{y \in Y} \|x - y\|) = dist(x, y)$なる$y$(この$y$を$x$のY近似子という)が存在すれば、このとき$(x - y) \rfloor Y$となる。

但し、一般に$Y \rfloor (x - y)$とは限らないし、また$(x - y) \rfloor Y$であってもY近似子ではない。

なお、他にも直交性に関連した事項には、例えば$\rfloor$の或る性質がそのBanach空間の*strict convex*性を特徴づけるといった話([3])なども有るが、一応これ位にして次章に移りたい。

3. 作用素論での一考察

以上述べて来たような種々の直交性やそれに関連した概念は作用素論(B(H)の研究)に於いてはどの程度論じられてきているだろうか。例えばそれらの直交性の条件がB(H)の中で作用素論的にどのように特徴づけられているのだろうか。こういったことが、実は筆者が直交性の考察を始めたそもそものきっかけであった。そうした眼で見渡してみた処、作用素論の領域は殆んど全く未開拓のまま放置されているらしいと判った。手持ちの資料に依る限り、[28]に$\rfloor$に関しての次のような結果が見られるだけである。

定理8. $B(H) \ni T$に対して $T \rfloor I \Leftrightarrow 0 \in W^0(T)$

但しここで$W^0(T)$は*maximal numerical range*と呼ばれ、$W^0(T) \equiv \{\mu \in \mathbb{C} \,;\, \|{}^{\exists}x_n\| = 1,\ \|Tx_n\| \to \|X\|,\ (Tx, x) \to$

$\mu\}$ で定義されるものである。

これは非常に重要な応用を持つ結果で、証明も全く自明ではない。しかし、このことで J の特徴づけの極く特殊な場合が解明されたに過ぎない。例えば現時点で $I\ J\ T$ の場合すら同様の良い特徴づけは見つけられていないようである。勿論、他の直交性に対しては未だ手をつけられていない現状のようである。しかし J に限ってみても、ここには何か非常に本質的な問題が潜んでいるのかもしれないと感じさせる。

そこで問題を取り敢えず周辺から攻めてみることにしよう。"James平行性" $S \backslash\!\backslash T :\Leftrightarrow$「$S\ J\ R \Leftrightarrow T\ J\ R\ (^\forall R)$」についてはどうであろうか。この場合、次を予想するのはそれほど不自然ではないであろう。

予想9. $B(H) \ni S, T$ に対して　$S \backslash\!\backslash T \Leftrightarrow S = \lambda T\ \ ^\exists\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0$

残念ながら、この予想も現在の処、解決を見ていない。しかし $S = I$ の場合には確かに成立していることが何とか示せたのでここに紹介して置きたい。すなわち、以下では次を証明する。

定理10. $B(H) \ni T$ に対して　$I \backslash\!\backslash T \Leftrightarrow T \in \mathbb{C},\ T \neq 0$

$\Leftarrow$ は明らかなので $\Rightarrow$ のみ示せば十分である。五つの補題を用意する。$\mathcal{S}$ を $B(H)$ の非可逆元全体、$\mathcal{U}$ を unitary 全体、$\mathbb{C}\mathcal{U} \equiv \{\mu U;\ \mu \in \mathbb{C},\ U \in \mathcal{U}\}$ として置く。

補題11. $I\ J\ \mathcal{S}$

証明. $I\ J\ T$ でないとすれば $^\exists\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0$,　$1 = \|I\| > \|I + \lambda T\|$ であるから $T \notin \mathcal{S}$ となってしまう。

補題12. $\mathcal{S} \not\ni T$, $W^0(T^{-1}) \ni 0$ ならば $I\ J\ T$

証明. $I\ J\ T$ でなければ $^\exists\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0$　$1 > \|I + \lambda T\|$ であるから、$\mathcal{S} \not\ni T$ のとき $\|T^{-1}\| > \|T^{-1}\|\|I + \lambda T\| \geqq \|T^{-1} + \lambda\|$ となり、$T^{-1}\ J\ I$ とはならない。こうして定理8より $W^0(T^{-1}) \not\ni 0$ となってしまう。

補題13. $\mathcal{U} \ni U$ に対して　$I\ J\ U \Leftrightarrow \overline{W}(U) \ni 0$　但し $\overline{W}(U)$ は U の数域 $W(U)$ の閉包

証明. $I\ J\ U \Leftrightarrow 1 \leqq \|I + \lambda U\|\ (^\forall\lambda \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow U^{-1}\ J\ I$　ここで定理8より

$\Leftrightarrow W^0(U) \ni 0 \Leftrightarrow \|^\exists x_n\| = 1 : \|U^{-1}x_n\| = 1,\ (U^{-1}x_n, x_n) \to 0 \Leftrightarrow \|^\exists x_n\| = 1 : (Ux_n, x_n) \to 0$

$\Leftrightarrow \overline{W}(U) \ni 0$

次の補題は[27]の結果などを用いて容易に証明できる。

補題14.
$$dist(T, \mathcal{S}) = \begin{cases} 0 & \text{if } T \in \mathcal{S} \\ \|T^{-1}\|^{-1}\ (\equiv m(T)) & \text{if } T \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

補題15. $T\ J\ \mathcal{S} \Leftrightarrow T \in \mathbb{C}\mathcal{U}$

証明. $\Leftarrow$: $\mathbb{C}\mathcal{U} \ni T = \mu U\ (\mu \in \mathbb{C},\ U \in \mathcal{U})$ を取る。このとき $^\forall S \in \mathcal{S}$ に対して $U^{-1}S \in \mathcal{S}$ であるから、補題11により $I\ J\ U^{-1}S$、すなわち、$1 \leqq \|I + \lambda U^{-1}S\|\ (^\forall\lambda \in \mathbb{C})$　こうして $\|T\| \leqq \|\mu U(I + \lambda U^{-1}S)\| = \|T + \lambda S\|\ (^\forall\lambda \in \mathbb{C})$ となり、$T\ J\ S$ が示せた。　$\Rightarrow$: $T\ J\ \mathcal{S}$ とすれば $\|T\| \leqq \|T + \lambda S\|\ (^\forall\lambda \in \mathbb{C},\ ^\forall S \in \mathcal{S})$ ということより、$\|T\| = dist(T, \mathcal{S})$ となる。そこで補題14より $T = 0$ または $\|T\| = \|T^{-1}\|^{-1}$
$T = 0$ ならば直ちに $T \in \mathbb{C}\mathcal{U}$ であるから $T \neq 0$ と仮定して $U \equiv T/\|T\|$ と置く。すると $\|U\| = 1$ かつ $\|U^{-1}\| = \|\|T\|T^{-1}\| = 1$ より $U \in \mathcal{U}$ と判る。こうして $T = \|T\|U \in \mathbb{C}\mathcal{U}$ が言える。

定理10の証明. $I \backslash\!\backslash T$ とする。このとき $T \neq 0$ は明らかである。また、補題11より $I\ J\ \mathcal{S}$ であることから $T\ J\ \mathcal{S}$ となる。こうして補題15が使えて $T \in \mathbb{C}\mathcal{U}$ が判る。そこで以下証明は T の代わりに $U\ (\in \mathcal{U})$ としてよい。このとき $\overline{W}(U^{-1}) \not\ni 0$ となっている。なぜなら $\overline{W}(U^{-1}) \ni 0$ であるときには補題13から $I\ J\ U^{-1}$ となるが、これは $U\ J\ I$ ということであり、他方 $I\ J\ I$ は明らかに成立していないので $I \backslash\!\backslash U$ に反してしまうからである。さて、U^{-1} のスペクトル $\sigma(U^{-1})$ が一点集合でないと仮定してみよう。すると $\sigma(U^{-1})$ を含む最小の、原点中心半径1の扇形の中心角 Θ は $0 < \Theta < \pi$ となっている。ここで $0 < \Theta$ は当然であるが、$\Theta < \pi$ であることは U^{-1} の normal 性から $\overline{W}(U^{-1}) = co\,\sigma(U^{-1})$ ($\sigma(U^{-1})$ の凸包) の成立することと $\overline{W}(U^{-1}) \not\ni 0$ から判る。そこで次に $\sigma(U^{-1})$ 上の関数 $f(z) \equiv z^{\pi/\Theta}$, $g(z) \equiv z^{(\pi/\Theta)-1}$ (適当な分枝で定める) を考えてやると、U^{-1} の normal 性から functional calculus $f(U^{-1})$, $g(U^{-1})$ が well-define されて、$f(U^{-1}) = U^{-1}g(U^{-1})$ となる。$f(U^{-1})$, $g(U^{-1})$ の unitary 性 (従って normal 性) に注意しておく。$R \equiv g(U^{-1})$ と置く。すると $\sigma(f(U^{-1})$

を含む最小の、原点中心半径1の扇形の中心角はπとなるから $\overline{W}(U^{-1}R) = co\,\sigma(U^{-1}R) \ni 0$ が言える。こうして補題13より $I \mathrel{J} U^{-1}R$ が判り、結局 $U \mathrel{J} R$ となる。他方 $I \mathrel{J} R$ ではない。なぜなら $\sigma(R)$ を含む最小の、原点中心半径1の扇形の中心角は $\pi-\theta$ で、これは $0<\pi-\theta<\pi$ ということから $\overline{W}(R) = co\,\sigma(R) \not\ni 0$ となり、補題13が使えるからである。そこで $I \mathrel{\backslash\!\!\backslash} U$ に反することになり、従って $\sigma(U)$ が一点集合ということになるが、これは U の normal 性から直ちに $U \in \mathbb{C}$ を導くことになる。こうして証明が終わった。

系16. $U \in \mathcal{U}$ に対して $U \mathrel{\backslash\!\!\backslash} T \Longleftrightarrow T = \lambda U \quad {}^{\exists}\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0$

しかしながら、isometry や coisometry に対しては部分的結果しか今の処得られていない。その他の作用素族に関しても、orthogonal projection を除きまだ手がついていない。

残念ながら、作用素論の直交性に関する研究に対しても、開拓すべき領域の大きさにもかかわらず、現状での成果は余りにも貧弱と言ってよい。

4. まとめと展望

以上、不十分ながらも筆者の力の及ぶ限りで直交性の様々な考察を行なってきた。筆者は、案外となおざりにされてきたこの概念が、将来ますますそれ自体の重要性を増していくものと信じている。本稿がそのような発展に多少とも寄与できればというのが筆者の願いである。

最後に本章では、前章までに挙げられなかった二文献[29], [30]と、幾つかのその他の未解決課題を述べて結びとしてみたい。

まず作用素論では当面、James 平行性と一次従属性との関連を調べることが目標であるが、これが解決できたとしてもなお、James 平行性に対してさえ考察すべきことは幾つも有る。例えば直ちに、

(1). James 平行性を B(H) の特定の作用素族内で定義した場合の一次従属性との関係の考究

(2). James 平行性を C^*環 A で定義した場合、それが一次従属性に一致するための A の条件は何か

(3). James 平行性が一次従属性と一致しない場合に、その James 平行性の特徴づけ、及び、James 平行性が一次従属性に一致する範囲の確定

などが課題となってくる。更に James 平行性をより深く理解するために、James 平行性から派生する諸概念の考察も必要となるだろう。

こういった方向から J を考えていく以外にも、J に対する研究はいろいろと考えられる。例えば

(4). 様々な作用素族($\subset B(H)$)に対する直交補集合の確定

(5). J が対称性などの良い性質を持つような C^*環の特徴づけ

(6). 作用素族の J による特徴づけや特定の作用素族内での J に対する特定条件成立の検定

などといったことが挙げられるだろう。更には J から派生する第二章で取り挙げたような様々な概念が作用素論の脈絡でどのように展開できるかということが問題ともなってくる。

同様の問題意識が ⊥, #, I, ⅃ などといった他の直交性の場合にも勿論考えられる。そして作用素論でそれらも考察していくことになると、

(7). B(H) や一般の C^*環でのそれらの直交性の間の関連の考察

が大きな問題として出てくる。具体的にはそれは、例えば

(8). 或る特定の二つの直交性が一致するような C^*環 A の特徴づけ

(9). B(H) での直交性間の強弱関係の決定

(10). B(H) での或る直交性の他の直交性からの再定義

(11). B(H) での、或る特定の直交性を直交性全体から特定すること

が問題とされるだろう。

その他、C^*環の可換性や有限性といった性質を直交性の言葉で特徴づけることが作用素論では研究に値するかもしれない。また直交性の概念を利用して作用素論に新しい"不変量"(数域、指数といったような)が

導入されればこの研究は非常に面白くなるのではないだろうか。これは現在の筆者の一つの夢である。

以上は作用素論での話であるが、直交性の考察はOMLやOMPに対してさえも決して容易なものとは思われない。作用素論と束論をつなぐ有用な環の一つが$\mathcal{P}$であるが、この$\mathcal{P}$を通じてJや$\mathcal{J}$などをOMLやOMPへと移すことがまず問題となってくる。新しい直交性の導入はOMLの研究に新しい結果を生み出す可能性が期待できる。

その他の分野に関しても直交性の概念はもっと研究されるべきであるように思われる。残念ながら筆者の力量不足のため、現時点では十分な成果が報告できなかったが、筆者の紹介できた殆んど関数解析関係ばかりといってよい文献の他にも多くの文献が多くの分野に有るはずであるし、そこには筆者が見逃してしまった多くの可能性が展開され示唆されているものと思う。中でも幾何関係の資料中には本来多くの言及すべき点が有るはずにもかかわらず、全く触れ得なかったことは極めて悔やまれるところである。改めて深くお詫びしたい。

なお、直交性の統一的、組織的な取り扱いについては大きなテーマであるが、これについて気になっていることを幾つか書きつけてみたい。

(12). 現在までに知られている直交性の実例で零在性以外に共通する自然な性質が何か存在しているだろうか

(13). 他の形式での直交性の定義は出来ないか、例えばもっと基本的な概念から組み立てるとか、圏論の用語で定義づけるとかいったこと

この(13)については、直交性のイメージの原型がn次元初等空間(やH)にあるということをもう少し直接的に表現したいという気持が根底にある。もし仮に、「或る公理系$\mathcal{A}$がHをモデルとして含む(或る解釈の下に)とそこに⊥が直交性であるとは(その解釈の下での)Hに対する⊥がH自身の直交性と一致していることをいう」などという"抽象的"定義を与えてみたなら、少しは考察に値するものであろうか。

(14). 直交性の一般化を考えられないか、例えばn項関係としてみること、零在性を弱めることなど

在野の気楽さといってもこれ以上続けぬ方が無難であろう。そろそろ幕を閉じることにしたい。

終わりに本文中に引用した主な文献名を掲げて置く。このほかにも、例えば作用素論の基礎事項を断わりなく引用したりしているがそれらは文献としては取りあげていない。更に幾つかの事情で、入手し得た直交性関係の文献のうち数篇は、誠に申し訳ないことに、引用を他日に持ち越すことになってしまった。それと、以下の文献中には *orthogonal* の他に *transversal*, *normal*, *perpendicular* などの用語が用いられており、それぞれにニュアンスが異なるようであるが、本稿ではすべて直交性としてまとめてしまったことを諒とされたい。

参考文献

[1] J.L.Abreu and J.A.Canavati, A generalization of semi-inner product spaces, Bull. U. M. I., (5)18-B(1981), 67-86.

[2] J.-P.Antoine, Orthocomplemented subspaces of nondegenerate partial inner product spaces, J. Math. Phys., 19(1978), 329-335.

[3] J.Diestel, Geometry of Banach Spaces, Selected Topics, Springer LNM, No. 485, 1975.

[4] J.R.Giles, Classes of semi-inner product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 129(1967), 436-446.

[5] J.C.James, Inner products in normed linear spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 559-566.

[6] G.Lumer, Semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 100(1961), 29-41.

[7] G.Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, Duke.

Math. J., 1(1935), 169-172.
[8] E.Birkson, Hermitian projections and orthogonality in Banach spaces, Proc. London Math. Soc., (3)24(1972), 101-113.
[9] A.-S. Dai, The son orthogonal projections and son orthogonal sets in Banach space, J. Nanjing Univ. Nat. Sci. Ed. 1980, Special Issue, (1980), 130-134.
[10] C.R.Diminnie, R.W.Freese and E.Z.Andalafte, An extension of Pythagorean and isosceles orthogonality and a characterization of inner product spaces, J. Approx. Theory, 39(1983), 295-298.
[11] R.C.James, Orthogonality in normed linear spaces, Duke Math. J., 12(1945), 291-302.
[12] R.C.James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 61(1947), 265-292.
[13] R.D.Roberts, On the geometry of abstract vector spaces, Tohoku Math. J., 39(1934), 42-59.
[14] E.M.Alfsen and F.W.Shultz, A Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras, Advances in Math., 28(1978), 11-56.
[15] E.M.Alfsen and F.W.Shultz, Non-commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets, Memoirs AMS, No. 172, 1976.
[16] S.K.Berberian, Baer *-Rings, Springer-Verlag, 1972.
[17] L.A.Harris, A generalization of C*-algebras, Proc. London Math. Soc., III., Ser., 42(1981), 331-361.
[18] R.E.Hartwig and J.Luh, Decomposition of an orthogonally complete atomic unit-regular ring, preprint
[19] M.R.Hestenes, Relative Hermitian matrices, Pacific J. Math., 11(1961), 224-245.
[20] G.Birkhoff, Lattice Theory, 3ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25, Providence, R. I., AMS, 1967.
[21] D.J.Foulis and C.H.Randall, Manuals, morphisms, and quntum mechanics, in Mathematical Foundations of Quantum Theory (A.R.Marlow, Ed.), Academic Press, 1978.
[22] J.Havrda, Orthogonality on sets, Čas. Pěstovani Mat., 100 (1975), 339-354.
[23] P.Sorjonen, Charactrizations of quadratic spaces, Ber. Univ. Jyväskylä, 25(1983), 7.
[24] J.Brabec, Compatibility in orthomodular posets, Čas. Pěstovani Mat., 104(1979), 149-153.
[25] J.Havrda, Independence in a set with orthogonality, Čas. Pěstovani Mat., 107(1982), 267-272.
[26] J.Havrda, Gram-Schmidt's orthogonalization based on the concept of generalized orthogonality, Čas. Pěstovani Mat., 106(1981), 335-346.
[27] S.Izumino, Inequalities on operators with index zero, Math. Japon., 23(1979), 565-572.
[28] J.G.Stampfli, The norm of a derivation, Pacific J. Math., 33(1970), 737-747.
[29] S.Goldstein, Orthogonal scalar products on von Neumann algebras, Stud. Math., 80(1984), 1-15.
[30] H.Gross and H.A.Keller, On the definition of Hilbert space, Manuscripta Math., 23(1977), 67-90.