数理解析研究所講究録
第582巻 1986年 75-88

Majorization による norm の評価

北大応電研 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

§1. 目標と準備

以下では (n行n列) の行列の全体を $\mathbb{M} = \mathbb{M}_n$ であらわし, Hermitian 行列の全体を $\mathbb{H}$, skew-Hermitian の全体を $\mathbb{SH}$ で, また unitary の全体を $\mathbb{U}$ であらわす.

正規行列 A の固有値を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ としたとき, これを対角線上に並べた対角行列を $\mathrm{Eig}(A)$ とかく. $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換 σ に対して $\{\lambda_{\sigma 1}, \cdots, \lambda_{\sigma n}\}$ からできる対角行列を $\mathrm{Eig}_\sigma(A)$ とかこう.

われわれの問題は, $\mathbb{M}$ に norm $\|\cdot\|$ が与えられたときに,

$$\|A - B\| \leqq \gamma \cdot \max_\sigma \|\mathrm{Eig}(A) - \mathrm{Eig}_\sigma(B)\| \tag{1}$$

が (nに無関係に) 全ての正規行列 A, B に成り立つような γ の最小値および

$$\min_\sigma \|\mathrm{Eig}(A) - \mathrm{Eig}_\sigma(B)\| \leqq \delta \cdot \|A - B\| \tag{2}$$

となる δ の最小値を評価しようということにある.

norm があまり一般であると, n に無関係な γ, δ の評

価は難かしいし，また実際的でないので，以下では unitarily invariant な norm のみを考察する。ここで norm $\|\cdot\|$ が unitarily invariant とは

$$\|UTV\| = \|T\| \qquad (T \in \mathbb{M};\ U, V \in \mathbb{U})$$

が成り立つときを云う。よく知られたように（[5], [9], [10], [12]）そのような norm は $\mathbb{R}^n_+$ 上の symmetric gauge function φ と

$$\|T\| = \varphi(s_1(T), \cdots, s_n(T)) \qquad (T \in \mathbb{M}) \quad (3)$$

の関係で一対一に対応している。ここで $\{s_j(T)\}_j$ は T の特異値，すなわち $|T| = (T^*T)^{1/2}$ の固有値である。最も親しまれる p-norm は φ として $\varphi(t_1, \cdots, t_n) = \sum_{j=1}^{n} t_j^n$ （$1 \leqq p < \infty$ のとき），$= \max_j t_j$ （$p = \infty$ のとき）をとったものである。φ と (3) で結びつく norm を明示するために $\|\cdot\|_\varphi$ とかく，特に

$$\|T\|_p = \begin{cases} \left\{\sum_1^n s_j(T)^p\right\}^{1/p} & (1 \leqq p < \infty) \\ \max_j s_j(T) & (p = \infty) \end{cases}$$

である.

norm $\|\cdot\|_\varphi$ に関しての (1), (2) の optimal な γ, δ をそれぞれ γ_φ, δ_φ と書こう。特に p-norm に対しては γ_p, δ_p とかく. 正規行列 A, B を，例えば $\mathbb{H}$ に制限したときの optimal な γ, δ を $\gamma_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, $\delta_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ であらわす. 同様に $\gamma_\varphi(\mathbb{U}, \mathbb{U})$, $\gamma_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{SH})$, $\cdots$ 等が考えられる。

正規行列 A の unitary 軌道 $= \{V^*AV : V \in \mathbb{U}\}$ を $A(\mathbb{U})$ で書こう。A の V^*AV の固有値は同じであるから (1), (2) の関係から,

$$A(\mathbb{U}) \text{ と } B(\mathbb{U}) \text{ の } \|\cdot\|_\varphi \text{ による最長距離} \leqq \gamma_\varphi \max_\sigma \|\mathrm{Eig}(A) - \mathrm{Eig}_\sigma(B)\|_\varphi$$

および

$$A(\mathbb{U}) \text{ と } B(\mathbb{U}) \text{ の } \|\cdot\|_\varphi \text{ による最短距離} \geqq \delta_\varphi^{-1} \min_\sigma \|\mathrm{Eig}(A) - \mathrm{Eig}_\sigma(B)\|_\varphi$$

が出る。

unitary invariant な norm に関する不等式を導くのに majorization の考えが有効であることがよく知られている ([1], [5], [9])。$\mathbb{R}^n$ の vector $x = \{x_j\}_j$, $y = \{y_j\}_j$ に対して majorization $x \prec y$ が成り立つとは

$$\sum_{j=1}^{k} x_{[j]} \leqq \sum_{j=1}^{k} y_{[j]} \quad (k=1,\dots,n-1) \quad \text{かつ} \quad \sum_1^n x_{[j]} = \sum_1^n y_{[j]}$$

のときである。ここで $\{x_{[j]}\}_j$ は $\{x_j\}_j$ を減少順に並べ換えたものである。上で最後の等式を不等式にしたときには submajorization と呼び $x \prec_w y$ と書く。

majorization に関する基本的な性質として次が有用である ([1], [5], [8]): $f(t)$ が x_i, y_j すべてを含む区間で凸なら

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad \{f(x_j)\}_j \prec_w \{f(y_j)\}_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \leqq \sum_{j=1}^{n} f(y_j). \tag{4}$$

$g(t)$ がそのような区間で凹関数なら, $-g(t)$ を考えて (4) より

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} g(x_j) \geqq \sum_{j=1}^{n} g(y_j). \tag{5}$$

submajorization に関しては, $f(t)$ が増加, 凸ならば

$$x \prec_w y \Rightarrow \{f(x_j)\}_j \prec_w \{f(y_j)\}_j \Rightarrow \sum_1^n f(x_j) \leq \sum_1^n f(y_j). \quad (6)$$

symmetric gauge function φ との関係では([1], [5], [9])

$$x, y \in \mathbb{R}^n_+,\ x \prec_w y \Rightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n) \leqq \varphi(y_1, \cdots, y_n)$$

したがって (3) より

$$s(S) \prec_w s(T) \Rightarrow \|S\|_\varphi \leqq \|T\|_\varphi. \quad (7)$$

A が Hermitian のときは固有値は実数であるから，これを減少順に番号をつけたとき $\lambda^{\downarrow}(A)$ であらわし，増加順に番号をつけたとき $\lambda^{\uparrow}(B)$ で書こう．A, B が共に Hermitian のとき，A, B, A+B の固有値の間 基本的な関係は次の Lidskii - Wielandt の定理 ([1], [7], [15]) で規定される．

$$\lambda^{\downarrow}(A) + \lambda^{\uparrow}(B) \prec \lambda^{\downarrow}(A+B) \prec \lambda^{\downarrow}(A) + \lambda^{\downarrow}(B). \quad (8)$$

S, T が一般の行列のときは，次の関係はよく知られている ([1], [5])

$$s^{\downarrow}(S+T) \prec_w s^{\downarrow}(S) + s^{\downarrow}(T). \quad (9)$$

ここで $s^{\downarrow}(S)$ は S の特異値を減少順に番号をつけたものである。

この報告では，これ等の majorization 関係を援用して γ_φ, δ_φ の評価に関して幾つかの情報を与えようとするものであるが，未だ最終的なものとは言えない．

なお §2 の内容は北大応電研中村美浩氏との，§§3-4 の内容はインド統計研究所 R. Bhatia 教授との討論に基づいている。

§2. 一般の正規行列 A, B の場合.

先づ A, B が共に Hermitian のときは (8) に凸関数 $|t|$ を適用し (4) を使うと

$$|\lambda^{\downarrow}(A) - \lambda^{\uparrow}(B)| \prec_w |\lambda^{\downarrow}(A-B)| \prec_w |\lambda^{\downarrow}(A) - \lambda^{\downarrow}(B)|$$

となるから (7) により次がわかる

$$\delta_{\varphi}(\mathbb{H}) = \gamma_{\varphi}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) = 1 \tag{10}$$

一般の正規行列の場合も, スペクトル分解と majorization より Hoffman-Wielandt [6] は Hilbert-Schmidt norm $\|\cdot\|_2$ に

$$\delta_2 = \gamma_2 = 1 \tag{11}$$

を示した。一方 Bhatia-Davis-McIntosh [3] は Fourier 解析, combinatorics を巧みに使って

$$\delta_{\infty} \leqq \text{const} < \pi \tag{12}$$

を得ている.

[定理 1] $\gamma_{\varphi} \leqq 2.$

証明. $Re(A)$, $Re(B)$ に対して (10) および (1) を使って

$$\| Re(A) - Re(B) \|_{\varphi} \leqq \max_{\sigma} \| Eig(Re(A)) - Eig_{\sigma}(Re(B)) \|_{\varphi}.$$

A, B が正規なことより

$$Eig(Re(A)) = Re(Eig(A)), \quad Eig_{\sigma}(Re(B)) = Re(Eig_{\sigma}(B))$$

であり結局

$$\| Re(A) - Re(B) \|_{\varphi} \leqq \max_{\sigma} \| Eig(A) - Eig_{\sigma}(B) \|_{\varphi}. \tag{13}$$

となる。$Im(A) - Im(B)$ にも同様で, それ等を加えるとよい. ■

p-norm に関しては，上の定数 2 は改良の余地がある．これを実行するために，一般の行列 T と $Re(T)$, $Im(T)$ の p-norm の関連を調べよう．ここで基本的な関係式は

$$|Re(T)|^2 + |Im(T)|^2 = |T|^2 + |T^*|^2 \tag{14}$$

である．$Re(T)$, $Im(T)$ の固有値を $\{\lambda_j\}_j$, $\{\mu_j\}_j$ として

$$|\lambda_1| \geqq \cdots \geqq |\lambda_n| \quad , \quad |\mu_1| \geqq \cdots \geqq |\mu_n|$$

とし，$s^{\downarrow}(T) = s^{\downarrow}(T^*)$ に注意すると，Lidskii-Wielandt の式 (8) より

$$\{|\lambda_j|^2 + |\mu_{n-j+1}|^2\}_j \prec \{s_j^2\}_j \tag{15}$$

$$\{(s_j^2 + s_{n-j+1}^2)/2\}_j \prec \{|\lambda_j|^2 + |\mu_j|^2\} \tag{16}$$

が出る．ここで $s^{\downarrow}(T) = \{s_j\}_j$ である．

$p \geqq 2$ のときは凸関数 $t^{p/2}$ を (16) に適用して，(4) より

$$2^{-p/2} \sum_{j=1}^{n} (s_j^2 + s_{n-j+1}^2)^{p/2} \leqq \sum_{j=1}^{n} \{|\lambda_j|^2 + |\mu_j|^2\}^{p/2}$$

$$\leqq 2^{p/2-1} \sum_{j=1}^{n} (|\lambda_j|^p + |\mu_j|^p)$$

また $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (s_j^2 + s_{n-j+1}^2)^{p/2} \geqq \sum_{j=1}^{n} (s_j^p + s_{n-j+1}^p) = 2\sum_{j=1}^{n} s_j^p$

であるから

$$\|T\|_p^p \leqq 2^{p-2} \{\|Re(T)\|_p^p + \|Im(T)\|_p^p\}. \tag{17}$$

$2 \geqq p \geqq 1$ のときは凹関数 $t^{p/2}$ を (15) に適用し，(5) より

$$\|Re(T)\|_p^p + \|Im(T)\|_p^p \geqq \|T\|_p^p \tag{18}$$

が出る．

【定理2】 $\gamma_p \leqq \max(2^{1/p}, 2^{1-1/p})$.

証明. $T = A - B$ に (17), (18) を適用し, (13) を使へばよい. ∎

この評価では $\gamma_1 = \gamma_\infty = 2$ となり定理1よりよくなっていない. γ_∞ に関しては次が成り立つ.

【定理3】 $\gamma_\infty \leqq \sqrt{2}$.

証明. n^2行 n^2列行列 $A \otimes I - I \otimes {}^tB$ を考えるとこれも正規で, A, B の固有値を $\{\lambda_j\}_j$, $\{\mu_j\}_j$ とすると

$$\max_\sigma \| \mathrm{Eig}(A) - \mathrm{Eig}_\sigma(B) \|_\infty = \max_{j,k} |\lambda_j - \mu_k| = \| A \otimes I - I \otimes {}^tB \|_\infty$$

であるから, 一般に

$$\| A - B \|_\infty \leqq \sqrt{2} \| A \otimes I - I \otimes {}^tB \|_\infty$$

すなわち

$$|\langle (A-B)x, y \rangle| \leqq \sqrt{2} \| A \otimes I - I \otimes {}^tB \|_\infty \|x\| \|y\| \tag{19}$$

が全ての vector x, y に成り立つことを示せばよい.

$\mathbb{M}$ の線形写像 Δ を

$$\Delta(T) = AT - TB$$

で定義すると

$$\langle (A-B)x, y \rangle = \mathrm{tr}\, \Delta(x \otimes \bar{y}). \tag{20}$$

ここで $x \otimes \bar{y}$ は rank 1 の行列 $[x_i \bar{y}_j]$ である. $\Delta(x \otimes \bar{y})$ が rank $\leqq 2$ に着目すると

$$\| \Delta(x \otimes \bar{y}) \|_1 \leqq \sqrt{2} \| \Delta(x \otimes \bar{y}) \|_2$$

であるから，(20) より

$$|\langle (A-B)x, y\rangle| \leqq \|\Delta(x\otimes\bar{y})\|_1 \leqq \sqrt{2}\,\|\Delta(x\otimes\bar{y})\|_2 .$$

一方

$$\|A\otimes I - I\otimes {}^tB\|_\infty = \Delta \text{ の } (\mathbb{M}, \|\cdot\|_2) \text{ に関する operator norm}$$

であるから

$$\begin{aligned}\|\Delta(x\otimes\bar{y})\|_2 &\leqq \|A\otimes I - I\otimes {}^tB\|_\infty \|x\otimes\bar{y}\|_2 \\ &= \|A\otimes I - I\otimes {}^tB\|_\infty \|x\|\cdot\|y\|\end{aligned}$$

となり，(19) が出る． ■

§3. A が Hermitian で B が skew-Hermitian の場合

A, B の固有値を $\{\lambda_j\}_j$, $\{\mu_j\}_j$ として

$$|\lambda_1| \geqq \cdots \geqq |\lambda_n| \quad , \quad |\mu_1| \geqq \cdots \geqq |\mu_n|$$

とする。A が Hermitian なことから λ_j は実数，B が skew-Hermitian なことから μ_j は純虚数となるので

$$|\lambda_j - \mu_k|^2 = |\lambda_j|^2 + |\mu_k|^2 \quad (j, k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (21)$$

となることに注意する．

【定理4】 $\gamma_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{S}\mathbb{H}) \leqq \sqrt{2}$ また $\delta_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{S}\mathbb{H}) \leqq 2.$

証明. (9) と (21) から

$$\begin{aligned}s^{\downarrow}(A-B) \prec_w s^{\downarrow}(A) + s^{\downarrow}(B) &= \{|\lambda_j| + |\mu_j|\}_j \\ &= \sqrt{2}\,\{|\lambda_j - \mu_j|\}_j\end{aligned}$$

が出て，(7) より $\gamma_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{S}\mathbb{H}) \leqq \sqrt{2}$ がわかる． $\delta_\varphi(\mathbb{H}, \mathbb{S}\mathbb{H})$ の

評価は，(9) より

$$\{|\lambda_j|\}_j = s^{\downarrow}(A) \prec_w \{s^{\downarrow}(A-B) + s^{\downarrow}((A-B)^*)\}/2 = s^{\downarrow}(A-B),$$

同じく $\{|\mu_j|\}_j \prec_w s^{\downarrow}(A-B)$ が出て

$$\{|\lambda_j-\mu_j|\}_j \leqq \{|\lambda_j|+|\mu_j|\}_j \prec_w s^{\downarrow}(A-B)$$

となり，(7) から導かれる. ■

$\delta_\varphi(\mathbb{H}, S\mathbb{H})$ の評価は $\sqrt{2}$ まで改良出来ると予想される.

$\delta_\infty(\mathbb{H}, S\mathbb{H}) = 1$ は Sunder [13] が示したが，一般の p-norm に関し

【定理 5】 $\gamma_p(\mathbb{H}, S\mathbb{H}) \leqq \max(1, 2^{1/2-1/p})$ また $\delta_p(\mathbb{H}, S\mathbb{H}) \leqq \max(1, 2^{1/p-1/2})$.

証明. (21) に注意すると (15), (16) と同様に

$$\{|\lambda_j - \mu_{n-j+1}|^2\}_j \prec \{s_j^2\} \tag{22}$$

$$\{(s_j^2 + s_{n-j+1}^2)/2\} \prec \{|\lambda_j-\mu_j|^2\}_j \tag{23}$$

が出る. ここで $s^{\downarrow}(A-B) = \{s_j\}_j$ とする.

$p \geqq 2$ のとき $t^{p/2}$ は凸関数であるから (23) と (4) より

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \mu_{n-j+1}|^p \leqq \sum_{j=1}^{n} s_j^p$$

となり $\delta_p(\mathbb{H}, S\mathbb{H}) = 1$ がわかる. また (23) と (4) より

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \mu_j|^p \geqq 2^{-p/2}\sum_{j=1}^{n} (s_j^2 + s_{n-j+1}^2)^{p/2}$$

$$\geqq 2^{-p/2}\sum_{j=1}^{n} (s_j^p + s_{n-j+1}^p) = 2^{1-p/2}\sum_{j=1}^{n} s_j^p$$

となり，$\gamma_p(\mathbb{H}, S\mathbb{H}) \leqq 2^{1/2-1/p}$ が出る.

$1 \leqq p \leqq 2$ のときは凹関数 $t^{p/2}$ を (22), (23) に適用して

(5) を使うことにより次が出ることよりわかる:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^p \leqq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \mu_{n-j+1}|^p, \quad \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \mu_j|^p \leqq 2^{1-p/2}\sum_{j=1}^{n} s_j^p. \quad ■$$

§4. A, B が共に unitary の場合.

Bhatia - Davis [2] および Bhatia - Holbrook [4] は

$$\delta_\infty(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = 1 \quad \text{および} \quad \delta_\varphi(\mathbb{U}, \mathbb{U}) \leqq \pi/2 \tag{24}$$

を示し, さらに trace norm $\|\cdot\|_1$ に関しては定数 $\pi/2$ が最良なことも証明した.

以下では, unitary で固有値がすべて上半平面にあるものの全体を $\mathbb{U}_+$ で, またさらに全ての固有値が第一象限にあるものの全体を $\mathbb{U}_{++}$ であらわす.

unitary の組に対して Lidskii - Wielandt の関係式の役割を果たすのが次の Nudelman - Svarzman ([11], [14]) である.

A, B が unitary で, その固有値を $\{e^{i\alpha_j}\}_j$, $\{e^{i\beta_j}\}_j$ として

$$\alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_n \quad , \quad \beta_1 \geqq \cdots \geqq \beta_n \tag{25}$$

とする. もし

$$(\alpha_1 - \alpha_n) + (\beta_1 - \beta_n) < 2\pi$$

であれば unitary AB の固有値 $\{e^{i\theta_j}\}_j$ の偏角 $\{\theta_j\}_j$ は区間 $[\alpha_n + \beta_n, \alpha_1 + \beta_1]$ の中に選ぶことができる. このとき

$$\alpha_1 + \beta_1 \geqq \theta_1 \geqq \cdots \geqq \theta_n \geqq \alpha_1 + \beta_1$$

とすると, 次の majorization が成りたつ:

$$\{\theta_j - \beta_j\}_j \prec \{\alpha_j\}_j \tag{26}$$

したがって

$$\{\theta_j\}_j \prec \{\alpha_j + \beta_j\}_j \tag{27}$$

[定理6] $\gamma_\varphi(\mathbb{U}_+,\mathbb{U}_+) \le \pi/2$ また $\gamma_\varphi(\mathbb{U}_{++},\mathbb{U}_{++}) \le \pi/2\cdot\sqrt{2}$.

証明. A, B の固有値 $\{e^{i\alpha_j}\}_j$, $\{e^{i\beta_j}\}_j$ として

$$\pi \ge \alpha_1 \ge \cdots \ge \alpha_n \ge 0, \quad \pi \ge \beta_1 \ge \cdots \ge \beta_n \ge 0$$

とする. B^* の固有値は $\{e^{-i\beta_{n-j+1}}\}_j$ であるから AB^* の固有値 $\{e^{i\theta_j}\}_j$ を

$$\pi \ge \theta_1 \ge \cdots \ge \theta_n \ge -\pi$$

として, Nudelman - Svarzman (27) で β_j の代りに $-\beta_{n-j+1}$ を使って, 凸関数 $|t|$ を適用して (4) より

$$\{|\theta_j|\}_j \underset{\cdot}{\prec} \{|\alpha_j - \beta_{n-j+1}|\}_j \tag{28}$$

が出る. 一方 $|s|, |t| \le \pi$ で

$$|e^{is} - 1| \le |s| \quad \text{および} \quad |s-t| \le \pi/2\,|e^{is} - e^{it}|$$

であるから, (28) から

$$\{|e^{i\theta_j} - 1|\}_j \underset{\cdot}{\prec} \frac{\pi}{2}\{|e^{i\alpha_j} - e^{i\beta_{n-j+1}}|\}_j \tag{29}$$

となる. $s^\downarrow(A-B) = s^\downarrow(AB^*-I)$ であるから, (29) から (7) を使って $\gamma_\varphi(\mathbb{U}_+,\mathbb{U}_+) \le \pi/2$ が出る.

$\mathbb{U}_{++}$ に関しては, $|s-t| \le \pi/2$ の所で考えればよいので定数 $\pi/2$ が $\pi/2\cdot\sqrt{2}$ まで小さく出来る. ∎

$\mathbb{U}_{++}$ に関しては, p-norm ($p \ge 2$) のときはもっと改良できる.

[定理7] $p \ge 2$ のとき, $\gamma_p(\mathbb{U}_{++},\mathbb{U}_{++}) = \delta_p(\mathbb{U}_{++},\mathbb{U}_{++}) = 1$.

証明. $|e^{it} - 1|^p$ は $|t| \le \pi/2$ で凸であることに注目

し，これを

$$\{\theta_j\}_j \prec \{\alpha_j - \beta_{n-j+1}\}$$

に適用して (4) より

$$\|A-B\|_p^{\,p} = \sum_{j=1}^{n} |e^{i\theta_j}-1|^p \leqq \sum_{j=1}^{n} |e^{i(\alpha_j-\beta_{n-j+1})}-1|^p$$
$$= \sum_{j=1}^{n} |e^{i\alpha_j} - e^{i\beta_{n-j+1}}|^p$$

が出て，$\gamma_p(\mathbb{U}_{++}, \mathbb{U}_{++}) = 1$ がわかる．

$A = (AB^*)B$ に Nudelman-Svarzman (26) を適用して

$$\{\alpha_j - \beta_j\}_j \prec \{\theta_j\}$$

が出るので，上と同様に

$$\sum_{j=1}^{n} |e^{i\alpha_j} - e^{i\beta_j}|^p \leqq \|A-B\|_p^{\,p}$$

が出て，$\delta_p(\mathbb{U}_{++}, \mathbb{U}_{++}) = 1$ が出る． ■

上の定理で $1 \leqq p \leqq 2$ のときどうなるかは未だ判らない．この他にも，さらに A, B の固有値の分布域を適当に制限することにより，幾つかの結果が出るが省略する．

全般に関する survey として R. Bhatia の草稿「Perturbation of eigenvalues」150頁，1985 が大変参考になる．

文献

[1] Ando, T., Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues, Lecture Note Sapporo, Japan 1982.

[2] Bhatia, R. and Davis, C.; A bound for the spectral varia-

tion of a unitary operator, Linear Multilinear Alg., 15(1984), 71-76.

[3] Bhatia, R., Davis, C. and McIntosh, A., Perturbation of spectral subspaces and solution of linear operator equations, Linear Alg. Appl. 52/53(1983), 45-67.

[4] Bhatia, R. and Holbrook, J.A.R., Short normal paths and spectral variation, Proc. Amer. Math. Soc., 94(1985), 377-382.

[5] Gohberg, I.C. and Krein, M.G., Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators, Transl. Math. Monographs 18, Amer. Math. Soc. 1969.

[6] Hoffman, A.J. and Wielandt, H.W., The variation of the spectrum of a normal matrix, Duke Math. J. 20(1953), 37-39.

[7] Lidskii, V.B., Inequalities for eigen- and singular values, Appendix to Gantmacher's Theory of matrices 2nd ed. pp.535-559.

[8] Marshall, A.W. and Olkin, I., Inequalities: Theory of majorization and its applications, Academic Press, 1979.

[9] Mirsky, L., Symmetric gauge functions and unitarily

invariant norms, Quart. J. Math. (2), 11(1960), 50-59.

[10] von Neumann, J., Some matrix inequalities and metrization of matric space, in Collected Works IV, 205-219, Pergamon Press, 1961.

[11] Nudelman, A. and Svarzman, P., The spectrum of the product of unitary matrices, Uspehi Mat. Nauk 13 (1958), no.6, 111-117.

[12] Schatten, R., Norm ideals of completely continuous operators, Springer, 1960.

[13] Sunder, V.S., Distances between normal operators, Proc. Amer. Math. Soc. 84(1984), 483-484.

[14] Thompson, R.C., On the eigenvalues of a product of unitary matrices I, Linear Multilinear Alg. 2(1974), 13-24.

[15] Wielandt, H.W., An extreme property of sums of eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc. 6(1955), 106-110.