数理解析研究所講究録
第582巻 1986年 89-99

On Spectral Manifolds of S-decomposable Operators

東北薬科大学　棚橋浩太郎（Kôtarô Tanahashi）

§1 序.　ヒルベルト空間上の正規作用素については，そのスペクトル分解はよく知られている。Dunford は，この分解をバナッハ空間で考えて，spectral operator の理論をつくった。さらに Foias らは，もっとゆるやかな"分解"を考え，decomposable operator の理論をつくり，その解析を行なった。

ここでは，更に一般化された S-decomposable operator を考えるが，まず，その由来を簡単に説明しよう。例として，ヒルベルト空間 H 上の有界自己共役作用素 T のスペクトル分解 $T=\int\lambda\, dE_\lambda$, $\sigma(T)\subset[a,b]$ を考える。このとき，$[a,b]$ の分割 Δ: $a=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=b$ に対し，$H=E(\sigma(T))H=E([\lambda_0,\lambda_1])H+E([\lambda_1,\lambda_2])H+\cdots+E([\lambda_{n-1},\lambda_n])H$ なので，$H_i=E([\lambda_{i-1},\lambda_i])H$ とおくと，

(i) $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$

(ii) $\sigma(T|H_i) \subset [\lambda_{i-1}, \lambda_i] \quad i = 1, 2, \cdots, n$

とTがゆるやかに"分解"されることになる。ここで各H_iは，もちろん，Tの不変部分空間であるが，それだけではなくて，

$$\sigma(T|Y) \subset \sigma(T|H_i) \Rightarrow Y \subset H_i$$

という性質をもち（Tの *spectral maximal space*），また，

$$H_i = \{x \in H \mid {}^{\exists}f \text{ analytic}; (\lambda - T)f(\lambda) \equiv x \text{ on } [\lambda_{i-1}, \lambda_i]^c\}$$

とも表される（Tの *spectral manifold*）ことが分っている。このように，$\sigma(T)$の任意の"分割"に対し，(i), (ii)をみたすようなTの *spectral maximal space* の族が存在するような作用素Tを，Foiasは *decomposable operator* とよんで，その性質を調べたわけだが，そのなかで，次の問題を提出した（[4]）。以下，特に断わらない限り，複素バナッハ空間X上の有界線形作用素Tを考える。

問題　Yが *decomposable operator* Tの *spectral maximal space* なら，$T|Y$は *decomposable operator* か。

この問題は，Albrecht（[1]）が反例をつくって，否定的に解かれたが，しばらくたって，Bacalu が次のような興味ある結果をだした。

定理([2]) Y が decomposable operator T の spectral maximal space なら，$T|Y$ は $\sigma(T/Y)\cap\partial\sigma(T|Y)\equiv S$ の部分を除いて decomposable の性質をもつ。（T は S-decomposable という。）但，T/Y は T の X/Y への商作用素で，∂ は境界を表す。

その後，S-decomposable operator と decomposable operator の関係が調べられ，Nagy，Bacalu，Vasilescu Erdelyi，Lang，Shengwang らによって，

定理([7]) 任意の T に対し，T が S-decomposable operator となるような最小の S（spectrum residuum S_α）が存在する。

定理([3]) T が S-decomposable operator で $\dim S = 0$ ならば，$S_\alpha = \phi$，つまり，T は decomposable operator である。

定理([8]) ヒルベルト空間上の有界作用素 T が

isometry であるが unitary ではないならば，$S_\alpha = \sigma(T) =$ unit disc である。

定理([9]) T が X 上の S-decomposable operator であることと，共役作用素 T′ が X′ 上の S-decomposable operator であることは同値である。

などの結果が得られている。ここでは，Y が S-decomposable operator T の spectral manifold である場合に，$T|Y$，T/Y，$(T|Y)'$，$(T/Y)'$ のスペクトルとその "duality" を調べ，その応用として，S-decomposable operator の特徴づけを行なう。

§2　主な結果．　以下，複素バナッハ空間 X 上の有界線形作用素 T を考える。

定義 1．T の不変部分空間 Y が T の spectral maximal space であるとは，

$$\sigma(T|Z) \subset \sigma(T|Y) \Rightarrow Z \subset Y$$

をみたすときをいう。T の spectral maximal space の全体を SM(T) と表す。

定義 2．$S \subset \sigma(T)$，S は閉集合とする。開集合の族 $\{G_1, \cdots, G_n; G_0\}$ が S-covering of $\sigma(T)$ とは，

(i) $G_1 \cup \cdots \cup G_n \cup G_0 \supset \sigma(T)$

(ii) $\overline{G_i} \cap S = \phi$, $i=1,\cdots,n$.

をみたすときをいう。TがS-decomposable operator とは，任意のS-covering of $\sigma(T)$ $\{G_1,\cdots,G_n;G_0\}$ に対し，

(i) $X = X_1 + \cdots + X_n + X_0$

(ii) $\sigma(T|X_i) \subset G_i$　　$i=0,1,\cdots,n$

をみたすようなTのspectral maximal space の族 $\{X_1,\cdots,X_n;X_0\}$ が存在するときをいう。

定義3.　閉集合Fに対し

$X_T(F) = \{x \in X \mid \exists f \text{ analytic}, (\lambda - T)f(\lambda) \equiv x \text{ on } F^c\}$

と定める。また，任意の集合Eに対し

$X_T(E) = \cup\{X_T(F) \mid F \subset E,\ F\text{は閉}\}$

と定め，これらをTのspectral manifoldという。

たとえば，Tがspectral operatorであれば，そのspectral measureを $E(\cdot)$ とおくと，任意の閉集合Fに対して，

$X = E(F)X \oplus E(F^c)X = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F^c)}$

である。但，$\overline{Y}$ は $Y \subset X$ の（強）-閉包である。また，Tがdecomposable operatorなら，

定理([4]) 任意の閉集合Fに対し,$X_T(F)$は閉で,Tのspectral maximal spaceであり,$\sigma(T|X_T(F))\subset F$をみたす。

定理([6]) 任意の閉集合Fに対して,$X_T(F^c)^\perp = X'_{T'}(F)$が成立する。

が知られている。本稿の最初の結果は,この定理に対応するものであるが,S-decomposable operatorでは次の定理が成立することである。

定理1. TがS-decomposable operatorなら

(i) $F\supset S$, F閉 $\Rightarrow$ $X_T(F)$ 閉, $\in SM(T)$,

$$\overline{(F^i\setminus S)\cap\sigma(T)}\subset\sigma(T|X_T(F))\subset F\cap\sigma(T)$$

$$\overline{\sigma(T)\setminus F}\subset\sigma(T/X_T(F))\subset\overline{\sigma(T)\setminus F}\cup S$$

(ii) $G\supset S$, G開 $\Rightarrow$ $X_T(\overline{G})$ 閉, $\in SM(T)$,

$$\overline{G\cap\sigma(T)}\subset\sigma(T|X_T(\overline{G}))\subset\overline{G}\cap\sigma(T)$$

$$\sigma(T/X_T(\overline{G}))=\overline{\sigma(T)\setminus\overline{G}}$$

(iii) $F\cap S=\phi$, F閉 $\Rightarrow$ $X_T(F)$ 閉, $\in SM(T)$

$$\overline{F^i\cap\sigma(T)}\subset\sigma(T|X_T(F))\subset F\cap\sigma(T)$$

$$\sigma(T/X_T(F))=\overline{\sigma(T)\setminus F}$$

が成立する。(但,F^i はFの内点の集合である。)

定理2. TがS-decomposable operatorで、Fが $F\supset S$ または $F\cap S=\phi$ をみたす閉集合ならば、
$X_T(F^c)^\perp = X'_{T'}(F)$ が成立する。

注. これらの結果はいずれも部分的には知られている。たとえば、定理1の(ii)については、$\sigma(T/X_T(G)) \subset G^c$ をShengwangとGuangyu([9])が、また定理2については、$F\supset S$ の場合にVasilescu([10])が証明している。このほかについても同様なので、ここでは、いちいち書かないことにする。(参照, [2], [3], [5], [7], [8], [9].)

従って、$Y\subset X$ に対して、

$$(X/Y)' = Y^\perp,\quad X'/Y^\perp = Y',\quad \sigma(T') = \sigma(T)$$

の関係式が成立することと、定理1, 2より次の結果が成立する。

定理3. TがS-decomposable operatorで、Gが $G\supset S$ または $\overline{G}\cap S=\phi$ をみたす開集合ならば、

$$\sigma(T|\overline{X_T(G)}) = \overline{G\cap\sigma(T)}$$

$$\overline{\sigma(T)\setminus\overline{G\cap\sigma(T)}} \subset \sigma(T/\overline{X_T(G)}) \subset \sigma(T)\setminus G$$

が成立する。

従って，$X_T(\overline{G})$，$\overline{X_T(G)}$ の場合が得られたわけだが，特にこの間にある $X_T(\overline{G\cap\sigma(T)})$ は興味ある性質をもっていて，次の結果が得られる。

定理4．　T が S decomposable operator で，G が $G\supset S$ または $\overline{G}\cap S=\phi$ をみたす開集合ならば，$X_T(\overline{G\cap\sigma(T)})$ は閉，$\in SM(T)$ で，

$$\sigma(T|X_T(\overline{G\cap\sigma(T)}))=\overline{G\cap\sigma(T)}$$
$$\sigma(T/X_T(\overline{G\cap\sigma(T)}))=\overline{\sigma(T)\setminus\overline{G\cap\sigma(T)}}$$

が成立する。

また，これらの定理の逆として，次の定理が成立する。

定理5．(i) $G\supset S$ をみたす任意の開集合 G に対して，$\sigma(T|Y)\subset\overline{G}$，$\sigma(T/Y)\subset G^c\cup S$ をみたす T の不変部分空間 Y が存在する，または，(ii) $\overline{G}\cap S=\phi$ をみたす任意の開集合 G に対して，$\sigma(T|Y)\subset\overline{G}\cup S$，$\sigma(T/Y)\subset G^c$ をみたす T の不変部分空間

が存在する，のいずれかが成立すれば，T は S-decomposable operator である。

注．従って，定理 1, 3, 4 の逆が成立するし，また，定理 1, 4 では，逆をいうとき，"$\in SM(T)$" の条件は不必要であることがわかる。

また，定理2と次の定理6をあわせて，定理7が得られる。

定理6．　T が S-decomposable operator で F が，$F \supset S$ または $F \cap S = \phi$ をみたす閉集合ならば、$JX_T(F) = JX \cap X''_{T''}(F)$　が成立する。(但、$J : X \longrightarrow X''$ は自然な写像である。)

定理7．　T が S-decomposable operator で，F が $F \supset S$ または $F \cap S = \phi$ をみたす閉集合ならば、$X_T(F)^{\perp} = X'_{T'}(F^c)$ の w^*-閉包　が成立する。

参考文献

1. E. Albrecht, On two questions of I. Colojoară and C. Foiaş, Manuscripta Math., 25 (1978) 1-15.

2. I. Bacalu, On restrictions and quotients of decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 18 (1973) 809-813.

3. I. Bacalu, Some properties of decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 21 (1976) 177-194.

4. I. Colojoară and C. Foiaş, Generalized spectral operators, Gordon and Breach, New York, 1968.

5. I. Erdelyi and W. Shengwang, On strongly decomposable operators, Pacific J. Math., 110 (1984) 287-296.

6. S. Frunză, A duality theorem for decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 16 (1971) 1055-1058.

7. B. Nagy, On S-decomposable operators, J. Operator Theory 2 (1979) 277-286

8. B. Nagy, Local spectral theory, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 37 (1981) 433-443.

9. W. Shengwang and L. Guangyu, On the duality theorem of Bounded S-decomposable operator, J. Math. Anal. and Appl. 99 (1984) 150 – 163.
10. F. H. Vasilescu, On the residual decomposability in dual spaces, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 16 (1971) 1573 – 1587.