数理解析研究所講究録
第 582 巻 1986 年 130-139

Shiftのcyclic vectorsと正定値関数の分解

福岡教育大学　内山　充　(Mitsuru Uchiyama)

1.　H^2によって単位円周∂D上のHardy空間を表わす。そのn-直交和をH_n^2、その上の移動作用素をS_nと書く。$T \in B(\mathcal{H})$に対して$\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \mathcal{L} = \mathcal{H}$となる集合$\mathcal{L}$はcyclicと呼ばれる。$h \in H_1^2$が$S_1$のcyclicである必要十分条件は$h$がouterfunctionである。これについては次のような拡張が得られた。

<u>命題1.</u> 集合$\{h_1, \cdots, h_m\} \subset H_n^2$が$S_n$に対してcyclicであるための必要十分条件は$m \geq n$かつ行列$M = (h_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$の$n$次小行列式のうち少なくとも一つは0でなく，又それらは共通なinner functionを因子にもたない。ここで$h_j = \begin{pmatrix} h_{1j} \\ \vdots \\ h_{nj} \end{pmatrix}$と表記している。

<u>証明</u>（必要性）H_n^2に属する関数$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} k i$を$e_i$と書く。各$i$に対し多項式$p_{ij}^{(k)}$を

$$e_j = \lim_{k\to\infty} (p_{1j}^{(k)} h_1 + \cdots + p_{mj}^{(k)} h_m) \quad \text{in} \quad H_n^2 \qquad (1)$$

となるようにとる。$m\times n$行列$(p_{ij}^{(k)})$を$P^{(k)}$とおく。H_n^2に属するn個の関数から成る行列の行列式はあるfに対し

H^2 に属し，その関数に関して連続である。従って(1)から

$$1 = \lim_{k\to\infty} \det(M \cdot P^{(k)}) \qquad \text{in } H^2$$

となる。これから $m \geqq n$ かつ

$$1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{\sigma} \det M_\sigma \cdot \det P_\sigma^{(k)} \qquad (2)$$

を得る。ここで σ は m 個から n 個取り出す組み合せで，M_σ, $P_\sigma^{(k)}$ はそれに対応する小行列である。(2)から，$\det M_\sigma \neq 0$ なる σ は存在し，$\det M_\sigma$ は共通な inner function を因子にもたない事が分る。

（十分性） $\bigvee_{k=0}^{\infty} S_n^k\{h_1, \cdots, h_m\}$ が H_n^2 ではないと仮定すればある $n \times l$ $(l \leq n)$ 行列値 inner function Θ によって ΘH_l^2 と表わされる。従って $h_j = \Theta g_j$ $(1 \leq j \leq m)$ となる $g_j \in H_l^2$ がある。H^2 の関数を成分にもつ $l \times m$ 行列 $(g_1, \cdots, g_m)$ を G と表わせば

$$M = \Theta G \qquad \therefore \quad M_\sigma = \Theta G_\sigma$$

となる。ここで G_σ は $l \times n$ 小行列である。ある σ について $\det M_\sigma \neq 0$ から $l = n$ となる。従って $\det M_\sigma$ は $\det \Theta$ を共通因子とするから仮定に反する。

2. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の contraction T の unitary part がルベーグ測度に関して絶対連続なら

は, H^∞ に属する φ について $\varphi(T)$ が定義できる。
Alexander は

$\varphi_1(T)x_1 + \cdots + \varphi_n(T)x_n = 0$ for $\varphi_i \in H^\infty \Rightarrow \varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0$

をみたす ベクトル $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ は $\overbrace{\text{解析的}}^{T\text{に対し}}$ に一次独立であると定義した。Alexander は次の命題を証明しているが基本的には M.Cambern , M.Uchiyama の結果そのものである。

命題(Alexander). H^2_n のベクトル $h_j = (h_{ij})_{1\le i\le n}$ $1\le j\le n$ が S_n に対して解析的一次独立である $\Leftrightarrow \det(h_{ij}) \neq 0$

証明 $\Leftarrow$ 明白.

($\Rightarrow$) Cambern , Uchiyama の結果により各 t について $(h_{1j})_{1\le j\le n}, \cdots, (h_{nj})_{1\le j\le n}$ の張る空間の次元は一定でかつ, その直交補空間は共役正則関数によって張られる.
従って $\det(h_1, \cdots, h_n) = 0$ ならば $f_j \in H^2$ で

$$\left(\overline{f_j(e^{it})}\right)_{1\le j\le n} \perp \left(h_{kj}(e^{it})\right)_{1\le j\le n} \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

なるものがある. これは $\sum_{j=1}^{n} f_j(e^{it}) h_{kj}(e^{it}) = 0$ を意味し

$f_1 h_1 + \cdots + f_n h_n = 0$ となる。

これから $\varphi \cdot f_i \in H^\infty$ となる φ をとれば 証明終り.

系2. $\{h_1, \cdots, h_n\}$ が S_n に対して cyclic ならば解析的一次独立である。

系3. $\{h_1, \cdots, h_n\}$ が S_n に対して 解析的一次独立 $\Leftrightarrow$

$\{h_1(e^{it}), \cdots, h_n(e^{it})\}$ が a.e. 一次独立である。

片側移動作用素に擬相似になる作用素はどのようなものか、という問題がある。これについて Alexander は $T < S$ かつ T が解析的一次独立な cyclic vectors をもてば $T \sim S$ である事を示した。これについてもう少し精しい結果を得た。

<u>定理4.</u> $T < S_n$, n 個のベクトルから成る集合が T に対して cyclic ならば $T \sim S_n$。特に $XT = S_n X$ $TY = YS_n$ なる quasi-affinity X, Y で、ある outer function ψ に対して $XY = \psi(S_n)$ $YX = \psi(T)$ をみたすようなものが存在する。

<u>補助定理</u> H_n^2 上の S_n に対して $\langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ が cyclic であるとき、ある outer $\psi \in H^\infty$ に対して $Xf_i = \psi e_i$ $XS_n = S_n X$ なる quasi-affinity X が存在する。

(証) $h \in H^\infty$ を $|h(e^{it})| = 1/(\|f_1(e^{it})\|^2 + \cdots + \|f_n(e^{it})\|^2 + 1)^{1/2}$ となる outer function とする。H_n^2 の列ベクトルから $n \times n$ 行列 $(f_1, \cdots, f_n)$ を Δ とおくと $\|h \cdot \Delta(e^{it})\| \leq 1$ 。

$h \cdot \Delta$ の algebraic adjoint を Γ とおく。

$$h\Gamma f_1 = \Gamma \cdot h \cdot \Delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \det(h\Delta) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \det(h\Delta)\, e_1$$

$$\det(h\Delta) = h^n \cdot \det \Delta$$

命題1 から $\det \Delta$ は outer である。従って

hP を X, $\det(k\Delta)$ を ψ とすればよい。

<u>定理4の証明</u>　X_1 を $X_1T = S_nX_1$ なる quasi-affinity, $\{h_1, \cdots, h_n\}$ を T に対して cyclic としよう。$\{X_1h_1, \cdots, X_1h_n\}$ は S_n に対して cyclic だから系2によって S_n に対して解析的一次独立。従って $\{h_1, \cdots, h_n\}$ は T に対して解析的一次独立。Alexander と同じように

$$TY = YS_n, \quad Ye_i = F(T)h_i \quad \text{for some } F \in H^\infty$$

なる quasi-affinity Y の存在を示す事は容易。補助定理から $CS_n = S_nC$, $CX_1h_i = \psi e_i$ なる C, ψ がある。$X = CX_1$ とおけば

$$YXh_i = \psi(T)F(T)h_i, \quad XYe_i = F\cdot\psi e_i$$

となり，定理は証明できた。

3.　T の生成する weakly closed algebra を $\mathcal{A}(T)$ と表わす。$*$-algebra に対する Von Neumann の double commutant theorem と同じような事がいつ成立するかという問題がある。すなわち $\mathcal{A}(T)'' = \mathcal{A}(T)$ となるような T はどのようなものか？ これについて K. Takahashi の次のような定理がある。ここではその簡単な証明を与えよう。T の unitary part は絶対連続であるとしよう。

<u>定理 (K. Takahashi)</u>. $XT = SX$ なる dense range をもつ X があれば　$\{\mathcal{A}(T)\}'' = \mathcal{A}(T)$

証明　$XT=SX$ なる dense range をもつ X が存在すれば

$A\in\{\mathcal{A}(T)\}'' \Rightarrow A\in \mathrm{alg\,Lat}\,T$ を示そう。

実際，$^\forall x\in\mathcal{H}$ に対して $\mathcal{L}x=\bigvee_{n\geq 0}T^n x$ とおこう。

$^\exists Y_1 : H_1^2\to\mathcal{L}x$ dense range $Y_1S_1=TY_1$．

今 $CS=S_1C$ なる dense range をもつ C は存在する。

$Y: H_1^2\to\mathcal{H}$ を Y_1 の値域を拡大したものとすれば

$$YCS=YS_1C=Y_1S_1C=TY_1C=TYC$$

$\therefore\ YCX\,T=TYCX \qquad \therefore\ YCXA=AYCX$

$\therefore\ A\,\overline{YCX\mathcal{H}}\subset\overline{YCX\mathcal{H}} \qquad \therefore\ A\mathcal{L}x\subset\mathcal{L}x$

次に　$(X\oplus X)(T\oplus T)=(S\oplus S)(X\oplus X)$，$A\oplus A\in\{\mathcal{A}(T\oplus T)\}''$ より

$A\oplus A\in \mathrm{alg\,Lat}(T\oplus T)$．

一般に　$\underbrace{A\oplus\cdots\oplus A}_{n}\in \mathrm{alg\,Lat}\,(\underbrace{T\oplus\cdots\oplus T}_{n})$

$\therefore\ A\in\mathcal{A}(T)$．

4．ここでは $L^2(\partial D)$ 上の e^{it} による積作用素を V とする。Szegö の定理から $f\in L^2$ が V に対して cyclic である必要十分条件は $f\neq 0$ a.e. $\int_0^{2\pi}\log|f(e^{it})|dt=-\infty$．

$\Theta(e^{it})$ を ∂D 上で定義された n 次正値行列を値にもつ関数で，各成分は L^1 級であるとしよう。このとき $f_1,\cdots,f_n\in H_n^2$ があって，各 (i,j) 成分が (f_j,f_i) となれば Θ は分解

可能(factorable)と呼ばれる。特に scalar の場合には Szegö − Beurling の結果から，$0 \leq f \in L^1$ について次の命題は同値である。

(a) f は分解可能である

(b) $\int_0^{2\pi} \log f(e^{it})\,dt > -\infty$

(c) $\bigvee_{n=0}^{\infty} V^n f^{1/2}$ が V^* によって不変ではない。

更に一般の正値関数 Θ については次の Masani − Wiener の定理がある。

<u>定理.(M−W)</u> $\Theta^{1/2}$ の列ベクトルを $(h_1, \cdots, h_n)$ とすれば Θ が分解可能である必要十分条件は $\bigvee_{k=0}^{\infty} V_n^k (h_1, \cdots, h_n)$ が V_n, V_n^* に対して不変であるような部分空間を含まない。ここで V_n は n個の V の直交和，すなわち L_n^2 上の e^{it} による積作用素である。

<u>定理.(Devinatz)</u> $\Theta(e^{it})^{-1}$ が a.e. 存在し

$\int_0^{2\pi} \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\|\,dt < \infty$ ならば Θ は分解可能

<u>定理.(Wiener)</u> $\Theta(e^{it})$ が有限行列で，a.e. 可逆のとき，Θ が分解可能である必要十分条件は

$$\int_0^{2\pi} \log \det \Theta(e^{it})\,dt > -\infty .$$

以上の事が分解可能性について分っている大きな結果だと思うが，Devinatz の定理は一般的には逆は成立しない。

例えば 各自然数jについて $|f_j(e^{it})|^2 = e^{-\frac{1}{t+\frac{1}{j}}}$ なる $f_j \in H^2$ が存在する。 $\Theta(e^{it}) = diag(|f_1|, \cdots, |f_n|, \ )$ とすれば $\|\Theta(e^{it})^{-1}\| = e^{\frac{1}{t}} < \infty$ しかし

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt = \infty .$$

それでも有限行列の場合には Devinatz の逆も成立する。

<u>命題5.</u> Θが$\overbrace{\text{有限行列}}^{n\text{次}}$で a.e. 可逆 のとき次は同値.

(1) Θは分解可能

(2) $\int_0^{2\pi} \log \det \Theta(e^{it})\, dt > -\infty$

(3) $\int_0^{2\pi} \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt < \infty$

(∵) (2) ⇒ (3) を示せばよい。

$$\|\Theta(e^{it})^{-1}\| \leqq \frac{\|\Theta(e^{it})\|^{n-1}}{\det \Theta(e^{it})} \leqq \frac{\|\Theta(e^{it})\|_1^{n-1}}{\det \Theta(e^{it})}$$

ここで $\|\Theta(e^{it})\|_1$ は Θ の対角成分の和であるから可積分である。従って

$$\int \log \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt \leq (n-1) \int \log \|\Theta(e^{it})\|_1 dt - \int \log \det \Theta\, dt < \infty .$$

無限の場合について次の結果を得た。

<u>定理6.</u> $\Theta(e^{it})$ が a.e. 可逆とする。

$$\left.\begin{array}{ll} I - \Theta(e^{it}) \in (\tau.c) & \text{a.e.} \\ \int \log \det \Theta(e^{it})\, dt > -\infty & \end{array}\right\} \Rightarrow \Theta \text{は分解可能}$$

証明. (i) $0 \leqq \Theta(e^{it}) \leqq I$ a.e. としよう。 $\|\Theta(e^{it})^{-1}\| \geqq 1$

$\therefore \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| = \log \|\Theta(e^{it})^{-1}\|$. $\Theta(e^{it})$ の contractive algebraic adjoint $\Theta(e^{it})^a$ と $0 \le \det\Theta(e^{it}) \le 1$ があって

$$\Theta(e^{it})^{-1} = \frac{\Theta(e^{it})^c}{\det\Theta(e^{it})}$$ である。

これから $\int \log^+\|\Theta(e^{it})^{-1}\|dt < \infty$ となる。

(ii). $I - \Theta(e^{it}) \in (\tau.c)$ より $\Theta(e^{it})$ は a.e. 有界である。しかし一様有界とは限らない。$\|\Theta(e^{it})\| = M(t)$ とおく。

$$I - \Theta(e^{it}) = A^+(e^{it}) - A^-(e^{it}),\quad A^+, A^- \geqq 0 \text{ a.e.}$$

と分解する。 $\Theta(e^{it}) = \int_{(0,M(t)]} \lambda\, dE_t(\lambda)$ としたとき

$$A^+(e^{it}) = E_t(0.1] - \int_{[0.1]} \lambda\, dE_t(\lambda),\quad A^-(e^{it}) = -E_t(1.M(t)] + \int_{(1.M(t)]} \lambda\, dE_t(\lambda)$$

ここで

$$B(e^{it}) \equiv E_t(1.M(t)] + \int_{[0.1]} \lambda\, dE_t(\lambda),\quad C(e^{it}) \equiv E_t(0.1] + \int_{(1,M(t)]} \lambda\, dE_t(\lambda)$$

とおけば

$$I - B(e^{it}) = A^+(e^{it}) \in (\tau.c),\qquad \|B(e^{it})\| \leqq 1 \quad \text{a.e.}$$

$$I - C(e^{it}) = -A^-(e^{it}) \in (\tau.c) \qquad C(e^{it}) \geqq 1 \quad \text{a.e.}$$

$B(e^{it})C(e^{it}) = \Theta(e^{it})$ となるから

$$\det\Theta(e^{it}) = \det B(e^{it}) \cdot \det C(e^{it})$$

ここで $\det B(e^{it}) \le 1$, $\det C(e^{it}) \ge 1$ に注意すれば

$$-\infty < \int \log\det\Theta(e^{it})dt = \int \log\det B(e^{it})dt + \int \log\det C(e^{it})dt$$

から $-\infty < \int \log\det B(e^{it})dt$ である。(i) より

$\int \log^+\|B(e^{it})^{-1}\|dt < \infty$ となる。従って

$\|\Theta(e^{it})^{-1}\| \leqq \|C(e^{it})^{-1}\| \cdot \|B(e^{it})^{-1}\| \leqq \|B(e^{it})^{-1}\|$ から

$\int \log^+\|\Theta(e^{it})^{-1}\|dt < \infty$ となり Θ は分解可能である。

(注) 定理の逆は成立しない。その例は以下によって得られる。

$[0, 2\pi]$ において $l_n(t)$ を $\angle \ni l_n(t) \overset{n\to\infty}{\downarrow} e^{-\frac{1}{t}}$ $l_n(t) \geq {}^{\exists}\delta_n > 0$

となるようにとる。$l_{n+1}(t)/l_n(t)$ を $g_{n+1}(t)$, $l_0=1$

とおく。

$\int \log g_{n+1}(t)\,dt = \int \log l_{n+1}(t)\,dt - \int \log l_n(t)\,dt > -\infty$

従って $g_n(t) = |f_n(t)|^2$ $f_n \in H^2$ なる f_n がある。

$$\prod_i g_i(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{l_{n+1}(t)}{l_0(t)} = e^{-\frac{1}{t}}$$

$\Omega = \mathrm{diagonal}(f_1, \cdots, f_n, \cdots)$ とおけば

$\Omega^*\Omega$ は factorable. しかし

$\int \log \det(\Omega^*\Omega)\,dt = \int \log(\prod g_i(t))\,dt = -\infty.$