数理解析研究所講究録
第583巻 1986年 38-58

定符号3次ユニタリ群の類数について

早大理工 橋本喜一朗 (Ki-ichiro Hashimoto)
東大理 古関春隆 (Harutaka Koseki)

§0. 序

代数体上定義された非退化なHermite空間があるとき，その空間内のlatticeには(ユニタリ群，特殊ユニタリ群 etc に関する) genus と class が定義され，各genusにはその類数が定まる。この類数を決定することは，Hermite形式またはユニタリ群の整数論における最も基本的な問題のひとつであろう。

二次形式に対する同様の問題については多くの人々による研究(たとえばPonomarev[13], Pizer[12], Asai[2]など)があり，四元数Hermite形式の場合にもいくつかの結果(Eichler[4], Hashimoto-Ibukiyama[7], Hashimoto[6])がある。これらの場合にくらべると，Hermite形式の類数公式は従来あまり研究されてこなかったと言えよう。ただし不定

符号の場合には，Shimura [14] による一般的な結果（特殊ユニタリ群に対する強近似定理とその応用としてのユニタリ群に関する類数公式）がある。このノートでは，一般の虚二次体上のランク2およびランク3の定符号のHermite形式の類数公式について，ランク3の場合を中心として，述べることにする。

Kを虚二次体，$\mathcal{O}$を整数環，$d(K)$を判別式とし，VをK上のn次元ベクトル空間，HをV上の正定値Hermite形式とする。Kのideal $\mathfrak{a}$についてV内の$\mathcal{O}$-lattice Lが$\mathfrak{a}$-modularであるとは，$L = \mathfrak{a}L^*$が成立することである。ここで$L^* = \{x \in V \mid H(x, L) \subseteq \mathcal{O}\}$とする。非Archimedes素点における局所的な設定でもmodular latticeの概念を同様に定義できるが，それらのisometry classはJacobowitz [10] によって決定されている。また，任意のlocalなhermitian latticeはmodular latticeの直和としてJordan分解され，この意味でmodular latticeは基本的な対象であると言える。以下，globalなHermite空間(V, H)内のunimodular lattice (i.e. $\mathcal{O}$-modular lattice) から成るgenusを考える。ここでtを$d(K)$を割る素数の個数とすると，unimodular latticeを含むような(V, H)で与えられたランクnをもつものの isometric classは2^{t-1}個あることがわかる。すなわち$\mathbb{Q}$

の各有限素点$\mathfrak{p}$において，(V,H)のdiscriminantのノルム剰余記号の値を$\varepsilon_\mathfrak{p}$とおく；$\varepsilon_\mathfrak{p}=(d(V,H),K/\mathbb{Q})_\mathfrak{p}$。このとき上のisometric classは，$d(K)$を割る$\mathfrak{p}$に対する$\varepsilon_\mathfrak{p}$の列$(\varepsilon_\mathfrak{p})$で$\prod\varepsilon_\mathfrak{p}=1$をみたすものと1対1に対応する。さて$(V,H)$がunimodular latticeを含むとしよう。nがoddまたは2がKで不分岐ならば，unimodular latticeからなる$U(V,H)$-genusは1個しかない。nがevenで2がKで分岐している場合は，このような$U(V,H)$-genusは高々2個しかない。

さて，ランク$=2$としよう。この場合は上記の2^{t-1}個の(V,H)の各々についてunimodular latticeからなる$SU(V,H)$-genusの類数のexplicit formulaを与えることができる（定理7）。ここで特に(V,H)がstandardな場合，すなわち$\varepsilon_\mathfrak{p}$たちがすべて$+1$なる場合には，Hayashida[8]において既に我々の類数に相当するものが得られている。そこでは，Oを虚数乗法環とする楕円曲線の2個のコピーの直積上の種数2の曲線の研究に付随して，determinant 1の二変数正定値Hermite形式のある類数が決定された。この“ある類数”を決定する過程で我々の類数が計算されている。[8]に述べられているように，ランク2の場合の類数の決定は(V,H)に付随する$\mathbb{Q}$上の四元数環のあるorderの類数の決定に帰着し，我々の結果もこの方針によって得られたもの

である。

次にランク＝3とする。この場合，(V, H)が unimodular lattice を含めばそれらはひとつの$U(V, H)$－genus をなす。その類数はもちろん，“四元数環の類数”に帰着させることはできない。我々は跡公式によって類数を計算し，(V, H)が standard な場合に explicit formula を得た（定理8）。特にこの場合，$U(V, H)$に関する principal genus の類数と $SU(V, H)$に関する principal genus の類数の間に簡明な関係式が成立する（定理9）。また，$U(V, H)$，$SU(V, H)$上の保型形式（保型性をもつ調和多項式）の空間の次元公式も得られる。

以下，跡公式による（ランク3の場合の）類数の計算について述べる。

§1. 跡公式による類数の表示

ここでは(V, H)のランクはnとする。以下，$U(V, H)$をGで表わす。LをV内のO-lattice，$\mathcal{L}$をLを含むG-genus とする。すなわち，$L' \in \mathcal{L} \iff {}^{\exists} g_p \in G_p$ s.t. $L'_p g_p = L_p$ at ${}^{\forall} p < \infty$。このとき$G_{\mathbb{Q}}$は自然に$\mathcal{L}$に作用し，その orbit すなわち$\mathcal{L}$内のG－class の個数が$\mathcal{L}$の類数である。以下この類数を$h_n(\mathcal{L})$で表わす。各$p < \infty$におけるL_pの stabilizer を$U_p(L_p)$

とおく：

$$U_p(L_p) := \{ g \in G_p \mid L_p g = L_p \}.$$

さらにアデールG_Aの開コンパクト部分群$\mathcal{U}(L)$を

$$\mathcal{U}(L) := G_\infty \times \prod_{p<\infty} U_p(L_p)$$

により定める。このとき$h_n(\mathcal{L})$は$|\mathcal{U}(L)\backslash G_A/G_Q|$に一致する。Borel-Harish Chandraのreduction theoryによりG_A/G_Qは体積有限であるから，$h_n(\mathcal{L})$は有限になる。

さて，Brandt行列の跡公式の特別な場合として，$h_n(\mathcal{L})$をある意味で閉じた形に表示することができる。G_Qの共役類$[g]_{G_Q}$が（$\mathcal{L}$に関して）locally integralであるとは，それを含むG_Aの共役類が$[g]_{G_A} \cap \mathcal{U}(L) \neq \phi$をみたすことである。$[g]_{G_Q}$がlocally integralならば$g$はtorsion elementになる。$F$を$G_Q$のtorsion elementの固有多項式となり得る多項式全体とする。Fは有限集合であり，ランクnが与えられたときFを決定することは容易である。$f = f(X)$をFの元とするとき，§2で述べるようにfを固有多項式とするG_Qの共役類は一般には無限個ある。しかしそれらの中でlocally integralなものは有限個しかないことがわかる。さて，$g \in G_Q$に対しその中心化群を$G(g)$で表わす。gはsemisimpleであるから$G(g)$はQ上のreductive groupになる。各素点vにおいて$G(g)_v$のHaar測度dt_vを"適当に"normalizeしておき，$G(g)_A$のHaar

測度 dt を $dt = \prod_v dt_v$ により定める。

<u>定理1</u>. 類数 $h_n(\mathcal{L})$ は次の様に表示される：

$$h_n(\mathcal{L}) = \sum_{f \in F} \sum_{[g]} M(G(g):dt) \prod_{p<\infty} \Big(\sum_{\delta_p} \mathrm{Ind}(\delta_p : g) \Big)。$$

ここで $[g] = [g]_{G_{\mathbb{Q}}}$ は f を固有多項式とする locally integral な $G_{\mathbb{Q}}$－共役類全体を動く。各 $[g]$ に対し $M(G(g):dt)$ は 体積 $\mathrm{vol}(G(g)_A / G(g)_{\mathbb{Q}} : dt)$ を表わす。また δ_p は $G(g)_p \backslash G_p / U_p(L_p)$ の代表で $\delta_p^{-1} g \delta_p \in U_p(L_p)$ となるもの全体を動き，$\mathrm{Ind}(\delta_p : g)$ は $\mathrm{vol}(G(g)_p \cap \delta_p U_p \delta_p^{-1} ; dt_p)$ の逆数を表わす。

この定理は，四元数 Hermite 形式の場合の跡公式（Hashimoto [5]）と同様の議論により証明される。

上の定理における固有多項式の集合 F は容易に求められる。$n = 3$ で $d(K) \neq -3, -4, -7, -8$ のときは次の5種類の多項式が現われる。

$$f_1(X) = (X-1)^3,\ -f_1(-X),$$

$$f_2(X) = (X-1)(X+1)^2,\ -f_2(-X),$$

$$f_3(X) = (X-1)(X^2+1),\ -f_3(-X),$$

$$f_{41}(X) = (X-1)(X^2+X+1),\ -f_{41}(-X),$$

$$f_{42}(X) = (X-1)(X^2-X+1),\ -f_{42}(-X)。$$

$d(K) = -3, -4, -7, -8$ の場合には，各々，上の5種類はすべ

て現われ，その他に数種類の多項式が新しく現われる。このようにHermite形式の類数公式においてnが小さく虚二次体がgenericな場合には，固有多項式の数はあまり多くはない。しかし，虚二次体自体がパラメーターであるため，結果的にはかなり手間のかかる計算が必要になってくる。

§2. $G_{\mathbb{Q}}$の共役類

代数体上の古典群の共役類は，Asai[1]において研究され，parameterizationが与えられている。以下に述べる$G_{\mathbb{Q}}$の共役類のparameterizationも本質的には[1]におけるものと同じである。

ここでも(V, H)のランクはnとする。$f=f(X)$を定理1の表示に現われる固有多項式とする。fの各根は1の巾根である。$G_{\mathbb{Q}}$の元でfを固有多項式とするもの全体を$G_{\mathbb{Q}}(f)$で表わす。また$\mathbb{Q}$の各素点vにおいてG_vのsemisimpleな元でfを固有多項式とするもの全体を$G_v(f)$とする。$G_{\mathbb{Q}}(f)$や$G_v(f)$の元の最小多項式を$m(X)$とおく。$G_{\mathbb{Q}}(f)$内の$G_{\mathbb{Q}}$-共役類の集合$G_{\mathbb{Q}}(f)/\!/G_{\mathbb{Q}}$と$G_v(f)$内の$G_v$-共役類の集合$G_v(f)/\!/G_v$は以下のように記述される。

まず$G_v(f)/\!/G_v$について。K_v-algebra $K_v[X]/(m)$の

involution σ で

$K_v^\sigma = K_v$, $\sigma|K_v$ は $K_v/\mathbb{Q}_v$ の non-trivial な

自己同型,

$XX^\sigma = 1$ ("$X \bmod m$" を X と略記)

をみたすものが一意的に定まる。この σ に関して

$$K_v[X]/(m) = \bigoplus_i A_i$$

と分解する。ここで各 A_i は σ-stable な K_v-subalgebra であって，そのようなものの 2 個の直和には分解できないものとする。さて $g \in G_v(f)$ に対し（X の作用を g と定めることにより）自然に V_v 上の $K_v[X]/(m)$-加群の構造を対応させる。このとき g の属する G_v-共役類は部分空間 V_vA_i の discriminant の列 $(d(V_vA_i))$ によって特徴づけられることがわかる。（各 $d(V_vA_i)$ は $\mathbb{Q}_v^\times/N(K_v^\times)$ の元。）g が $G_v(f)$ 全体を動くとき，列 $(d(V_vA_i))$ は次の制限下で自由に動く：

(i) $\prod_i d(V_vA_i) = d(V_v)$,

(ii) K_v が体であって A_i が体でないとき，

$(d(V_vA_i), K/\mathbb{Q})_v = (-1, K/\mathbb{Q})_v^{\frac{1}{2}\dim_{K_v}(V_vA_i)}$,

(iii) v が無限素点のとき $(d(V_vA_i), K/\mathbb{Q})_v = +1$ ($\forall i$)。

次に $G_\mathbb{Q}(f)/\!/G_\mathbb{Q}$ を問題にする。K-algebra $K[X]/(m)$ を上と同様の意味で

$$K[X]/(m) = \bigoplus_j \mathcal{A}_j$$

と分解する。このとき各素点 v における $K_v[X]/(m)$ の分解を

$$K_v[X]/(m) = \bigoplus_{j} \bigoplus_{i=1}^{t(j,v)} A_{j,v,i} \ ;$$

$$\bigoplus_{i} A_{j,v,i} \cong \mathcal{A}_j \otimes_K K_v$$

と書くことができる。さて $[g] \in G_{\mathbb{Q}}(f)/\!/G_{\mathbb{Q}}$ に対し local な discriminant の集合 $(d(V_v A_{j,v,i}))$ を対応させるとき，この対応は injective であることがわかる（従って共役類に対し Hasse の原理が成立する（c.f. [1]））。この対応の image は，先の (i), (ii), (iii) と次の (iv), (v) によって特徴づけられる：

(iv) ほとんどすべての (j, v, i) に対し

$(d(V_v A_{j,v,i}),\ K/\mathbb{Q})_v = +1$,

(v) 各 j に対し $\displaystyle\prod_{v} \prod_{i} (d(V_v A_{j,v,i}),\ K/\mathbb{Q})_v = +1$。

§ 3. Mass formula

定理1における volume $M(G(g) : dt)$ は，Braun [3] による公式（Hermite 形式の場合の "Siegel formula"）を少し拡張したものにもとづいて計算される。$g \in G_{\mathbb{Q}}(f)$ とし，$K[X]/(m)$ の部分体 $\mathcal{A}_j$ を §2 のように定める。$\mathcal{A}_j$ における σ の固定体を $\mathcal{B}_j$ とおく。これらの体を $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体とみなすことにすれば，$\mathcal{B}_j$ は総実体で $\mathcal{A}_j$ はその総虚2次拡大である。さて g に付随して定まる $\mathcal{A}_j$-加群 $V\mathcal{A}_j$ 上には K-valued の

Hermite 形式 $H|VA_j$ が定まるが，これを VA_j 上の A_j－値の Hermite 形式 $\tilde{H}_j$ に自然に持ち上げることができる。B_j 上の代数群 $U(VA_j, \tilde{H}_j)$ を $\tilde{G}(g:j)$ で表わせば，容易に

$$G(g)_A/G(g)_{\mathbb{Q}} \cong \prod_j \tilde{G}(g:j)_A/\tilde{G}(g:j)_{B_j}$$

を得る。従って $M(G(g); dt)$ の計算は総実体上のユニタリ群の mass の計算に帰着する。

F を総実体，E を F の総虚 2 次拡大とし，E の整数環を R とする。m を正整数とし，$I \in M_m(E)$ を F の各無限素点において正定値であるような Hermite 行列とする。E^m 上の Hermite 形式 $I(x, y)$ を $I(x, y) = xI{}^t\bar{y}$ により定める。F の各有限素点 w において $U(E^m, I)_w$ の Haar 測度 du_w を $vol(U(E^m, I)_w \cap GL_m(R_w) : du_w) = 1$ により正規化し，F の各無限素点 w では $vol(U(E^m, I)_w : du_w) = 1$ と正規化しておく。$\prod_w du_w$ を du とおき，$vol(U(E^m, I)_A/U(E^m, I)_F : du$ を $M(m, I)$ で表わす。[3] の公式は $F = \mathbb{Q}$ の場合のものであるが，その議論を modify することにより次の命題を得る。

<u>命題 2.</u> $M(m, I)$ は次の様に表示される：

$$M(m, I) = 2\, d(F)^{m^2/2} N_{F/\mathbb{Q}}(d(E/F))^{m(m+1)/4}$$
$$\times N_{F/\mathbb{Q}}(\det(I))^m \prod_w \alpha(I)_w^{-1}\ 。$$

ここで $d(F)$ は F の判別式，$d(E/F)$ は E/F の相対判別式を

表わす。また F の素点 w に対し local density $\alpha(I)_w$ は次の様に定義される。

w：有限素点のとき，$w=\mathfrak{p}$ として，

$$\alpha(I)_\mathfrak{p} := \lim_{k\to\infty} A_{\mathfrak{p}^k}(I)/N(\mathfrak{p})^{km^2} ;$$

$$A_{\mathfrak{p}^k}(I) := \#\{ X \in M_m(R/\mathfrak{p}^k) \mid X I\, {}^t\overline{X} = I \}。$$

w：無限素点のとき，

$$\alpha(I)_w := \prod_{j=1}^{m} (2\pi)^j/(j-1)!\ 。$$

Otremba [11] は $E/F = K/\mathbb{Q}$ のとき Gauss 和を用いて $\alpha(I)_\mathfrak{p}$ を計算した。しかし Hermite 行列 I が簡単な形をしている時は直接 $A_{\mathfrak{p}^k}(I)$ を計算して $\alpha(I)_\mathfrak{p}$ を求めることができる。$E/F = K/\mathbb{Q}$ で $I = 1_m$ のときの結果は次の通り：

- $\left(\frac{K}{p}\right) \neq 0$ のとき：$\alpha(1_m)_p = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{K}{p}\right)^j p^{-j}\right)$，
- $\left(\frac{K}{p}\right) = 0$ で $p \neq 2$ のとき：

$$\alpha(1_m)_p = 2\prod_{j=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{K}{p}\right)^j p^{-j}\right) \times \begin{cases} \left[1 + \left(\frac{-1}{p}\right)^{m/2} p^{-m/2}\right]^{-1} \cdots m : \text{even} \\ 1 \cdots m : \text{odd} \end{cases}$$

- $\left(\frac{K}{p}\right) = 0$ で $p = 2$ のとき：

$$\alpha(1_m)_p = 2\prod_{j=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{K}{p}\right)^j p^{-j}\right) \times \begin{cases} (1 - p^{-m})^{-1} \cdots m : \text{even} \\ 1 \cdots m : \text{odd}\ 。\end{cases}$$

以上において $\left(\frac{K}{\ }\right)^j$ は $\left(\frac{K}{\ }\right)$ の primitive character としての j 乗を表わすものとする。これらを命題 2 の表示に代入し，

Dirichletの L 函数の整数点での値に関するよく知られた結果を適用することによって，次の定理を得る。

定理 3．$E/F = K/\mathbb{Q}$ のとき $M(m, 1_m)$ は次の様に表示される：

m : even のとき

$$M(m, 1_m) = 2^{1-t} \prod_{j=1}^{m} \frac{|B_{j,\chi^j}|}{2j} \prod_{\substack{p \mid d(K) \\ p \neq 2}} (p^{m/2} + (-1)^{m/2})$$

$$\times \begin{cases} 2^m - 1 & \cdots\ 4 \,\|\, d(K) \\ 2^{m/2}(2^m - 1) & \cdots\ 8 \,\|\, d(K) \\ 1 & \cdots\ 2 \nmid d(K) \end{cases}$$

m : odd のとき

$$M(m, 1_m) = 2^{1-t} \prod_{j=1}^{m} \frac{|B_{j,\chi^j}|}{2j} \quad \text{。}$$

ここで t は $d(K)$ を割る素数の個数，$\chi(\ ) = \left(\frac{K}{\ }\right)$ は K に対応する Dirichlet character，B_{j,χ^j} は primitive character χ^j に付随する j 番目の一般 Bernoulli 数を表わす。

一般に $E/\mathbb{Q}$ が abelian のときは上の定理と同様に $M(m, 1_m)$ を一般 Bernoulli 数を用いて表わすことができる。$M(G(g) : 1_t)$ で g が center の元でないときは，explicit な計算のためにその様な表示を用いる必要があるが，ここでは省略する。

定理３の応用として，$(K^n, 1_n)$ 内の $U(K^n, 1_n)$ に関する principal genus $\mathcal{L} \ni O^n$ の類数が１になる場合を決定できる。よく知られているように $\mathcal{L}$ の類数 $h_n(\mathcal{L})$ が１になるための必要十分条件は，O^n の自己同型群 $\Gamma = Aut(O^n, 1_n)$ の位数の逆数が $M(n, 1_n)$ に一致することである。$\Gamma \cong (O^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$（$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群）となるから，定理３および一般 Bernoulli 数の評価とあわせて，次の結果を得る。

<u>命題４</u>．記号を上の通りとして principal genus の類数 $h_n(\mathcal{L})$ が１になるのは次の場合に限られる：

(i) $n = 2$,　$d(K) = -3, -4, -7, -8$

(ii) $n = 3$,　$d(K) = -3, -4$

(iii) $n = 4$,　$d(K) = -3, -4$

(iv) $n = 5$,　$d(K) = -3$。

§３．Unimodular lattice と $U_p(L_p)$-共役類

定理１における $\sum_{\delta_p} Ind(\delta_p : g)$ を計算することは，$U_p = U_p(L_p)$ の共役類を決定することとほぼ同値である。このような計算はランク n が小さく L の属する genus $\mathcal{L}$ がある程度良いものでない限り困難である。ここではそのような良い

genus として unimodular lattice からなるものを考える。

Jacobowitz [10] は local field 上の modular lattice の同型類を分類した。特に $K_p/\mathbb{Q}_p$ 上の unimodular lattice については次の様に分類される。$\left(\frac{K}{p}\right)=+1$ の場合は話が極めて単純になるので $\left(\frac{K}{p}\right)\neq +1$ としよう。(V, H) を $K_p/\mathbb{Q}_p$ 上のランク n の非退化な Hermite 空間とする。(V, H) 内の O_p - lattice L_p に対し O_p - ideal $H(L_p, L_p)$ を $S(L_p)$ で表わし，$H(x, x)$ $(x \in L_p)$ で生成される O_p - ideal を $n(L_p)$ で表わす。明らかに $n(L_p) \subseteqq S(L_p)$ となるが，$n(L_p)=S(L_p)$ のとき L_p は normal，そうでないとき L_p は subnormal と言う。特に modular lattice については normal ということは O_p 上で直交基底をもつことと同値である。

<u>命題 5</u> (Jacobowitz). 記号は上の通りとする。

(i) $\left(\frac{K}{p}\right)=-1$ の場合，(V, H) が unimodular lattice を含むための必要十分条件は，discriminant が $(d(V, H), K_p/\mathbb{Q}_p) = +1$ をみたすことである。このとき (V, H) 内の unimodular lattice はすべて normal で 1 個の isometric class をなす。

(ii) $\left(\frac{K}{p}\right)=0$ で $p\neq 2$ の場合，(V, H) は unimodular lattice を含み，それらはすべて normal で 1 個の isometric class をなす。

(iii) $\left(\frac{K}{p}\right) = 0$ で $p = 2$ の場合，(V, H) は normal unimodular lattice を含みそれらは1個の isometric class をなす。(V, H) が subnormal unimodular lattice を含む場合にはそれらがもうひとつの isometric class をなす。

この命題の (iii) において，(V, H) が subnormal unimodular lattice を含むかどうかは容易に判定できる。たとえば n が奇数ならば含まない。$n = 2$ ならば，$8 \| d(K)$ のときおよび $4 \| d(K)$ かつ $(d(V, H), K_p/\mathbb{Q}_p) = -1$ のときにのみ含む。

[10] による次の命題は U_p-共役類の計算において重要である。

<u>命題 6</u>. $\left(\frac{K}{p}\right) \neq +1$ とし L_p を (V, H) 内の任意の O_p-lattice とすると，L_p を次の様に直交分解（Jordan 分解）できる：

$$L_p = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_t \ ;$$

各 L_i は modular で $S(L_1) \subsetneqq S(L_2) \subsetneqq \cdots \subsetneqq S(L_t)$。

列 rank $L_1, \cdots,$ rank L_t と $S(L_1), \cdots, S(L_t)$ は L_p によって一意的に定まる。

以上の命題5，6にもとづいて，$n = 3$ で (V, H)，L が

§0に述べたものである場合にU_p-共役類を計算できる。それは類数公式において最も繁雑な部分であり，ここでは省略する。

§4. 主結果

まず$n=2$の場合について述べる。§0で述べた様に，この場合の類数公式は四元数環の類数公式から得られたものであって上の§1〜§3の議論を適用したわけではない。(V, H)をK上の2次元正定値Hermite空間とし，(V, H)はunimodular latticeを含むとする。命題5からこの様な(V, H)のisometric classは§0で述べたもの（$(\varepsilon_p)_{p|d(K)}$に対応し2^{t-1}個ある）で尽されることがわかる。

定理7（$n=2$）. 記号は上の通りとし，(V, H)は$\varepsilon=(\varepsilon_p)_{p|d(K)}$に対応しているとする。$\mathcal{L}_\varepsilon$（resp. $\mathcal{L}'_\varepsilon$）を(V, H)内のnormal（resp. subnormal）unimodular latticeからなるひとつの$SU(V, H)$-genusとする。このとき類数$h_2(\mathcal{L}_\varepsilon)$（resp. $h_2(\mathcal{L}'_\varepsilon)$）は次式で与えられる：

$$h_2 = \frac{A}{12}\prod_{\substack{p|d(K)\\ p\neq 2}}\left(p+\varepsilon_p\left(\frac{-1}{p}\right)\right) + \frac{B}{4}\prod_{\substack{p|d(K)\\ p\neq 2}}(1+\varepsilon_p)$$

$$+\frac{C}{3}\prod_{\substack{p\mid d(K)\\ p\neq 2}}\left(1+\varepsilon_p\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-3}{p}\right)\right)\text{。}$$

ここで A, B, C は次の表で与えられる。

		ε_2	$2\nmid d(K)$	$4\,\|\,d(K)$	$d(K)\equiv 8\ (32)$	$d(K)\equiv -8\ (32)$
$\mathcal{L}_\varepsilon$	A		1	3	6	6
	B		1	3	2	2
	C		1	0	0	0
$\mathcal{L}'_\varepsilon$	A	+	×	×	3	1
		−		1	1	3
	B	+	×	×	1	1
		−		1	1	1
	C	+	×	×	0	2
		−		1	2	0

次に $n=3$ とし，3次元正定値 Hermite 空間 (V, H) として standard なものをとる：$V=K^3$, $H(x,y)=x\,{}^t\bar{y}$ $(x, y\in V)$。命題5とその下の注意から，(V, H) 内の unimodular lattice 全体はひとつの $U(V,H)$-genus をなすことがわかる。この genus $\mathcal{L}$ は $U(V,H)$ に関する principal genus に他ならない：$\mathcal{L}\ni O^3$。§1〜§3に述べた事にもとづいて $h_3(\mathcal{L})$ を計算し，次の結果を得る。

<u>定理8</u>（$n=3$）．記号は上の通りとする。類数 $h_3(\mathcal{L})$ は次の様に与えられる。

(i) $d(K) \neq -3, -4, -7, -8$ の場合は,

$$h_3(\mathcal{L}) = 2(T_1 + T_2 + T_3 + T_{41} + T_{42});$$

$$T_1 = h(K)|B_{3,\chi}|/2^{t+4}\cdot 3^2,$$

$$T_2 = (h(K)^2/2^{t+4}\cdot 3)\left[4|d(K)|-1-3\left(\frac{K}{2}\right)\right],$$

$$T_3 = (h(K)^2/2^{t+3})\left[3+\left(\frac{K}{2}\right)+\{1+(-2,K/\mathbb{Q})_2\}\{1+(5,K/\mathbb{Q})_2\}\right],$$

$$T_{41} = (h(K)^2/2^{t+2}\cdot 3)\left[7-\left(\frac{K}{3}\right)\right],$$

$$T_{42} = (h(K)^2/2^{t+2}\cdot 3)\left[1+\left(\frac{K}{3}\right)\right]。$$

ここで $h(K)$ は K の類数, t, $B_{3,\chi}$ は定理3と同じとする。各 T_j は§1で述べた固有多項式 $f_j(X)$ の寄与である。

(ii) $d(K) = -3, -4, -7, -8$ の場合は, 順に $h_3(\mathcal{L}) = 1, 1, 2, 2$ となる。

次に $n=3$ の場合の $SU(V,H)$ に関する類数を考える。一般にユニタリ群に関する類数と特殊ユニタリ群に関する類数の間の関係は, あまり知られていないようである。Iyanaga [9] では両者の間のある不等式が示されている。$n=3$ の場合は跡公式の比較によって次の結果が得られる。

<u>定理9</u> ($n=3$). (V,H) は standard なものとし, その中の $U(V,H)$ に関する principal genus を $\mathcal{L}$, $SU(V,H)$ に関する principal genus を $\mathcal{L}^{(1)}$ とする。このとき $\mathcal{L}$ の類数 $h_3(\mathcal{L})$

は $\mathcal{L}^{(1)}$ の類数 $h_3(\mathcal{L}^{(1)})$ の $h(K)/2^{t-1}$ 倍である。

最後に $n=2$，3 のときの standard な (V,H) 内の $SU(V,H)$ に関する principal genus の類数 h_2, h_3 の数値例をあげておく。

$d(K)$	-3	-4	-7	-8	-11	-15	-19	-20	-23	-24	-31	-35
$\frac{h(K)}{2^{t-1}}$	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	3	1
h_2	1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	3	4
h_3	1	1	2	2	2	5	3	7	10	7	13	10

$d(K)$	-39	-40	-43	-47	-51	-52	-55	-56	-59	-67	-68	-71
$\frac{h(K)}{2^{t-1}}$	2	1	1	5	1	1	2	2	3	1	2	7
h_2	4	4	4	5	4	5	6	4	6	6	6	7
h_3	21	12	8	31	16	18	31	31	26	17	42	66

$d(K)$	-79	-83	-84	-87	-88	-91	-95	-103	-104	-107	-111	-115
$\frac{h(K)}{2^{t-1}}$	5	3	1	3	1	1	4	5	3	3	4	1
h_2	7	8	6	6	6	8	10	9	8	10	8	12
h_3	59	43	56	77	40	40	107	88	97	66	133	62

文献

[1] Asai, T., The conjugacy classes in the unitary, symplectic, and orthogonal groups over an algebraic number field, J. Math. Kyoto Univ. 16 (1976), 325–350

[2] Asai, T., The class numbers of positive definite quadratic forms, Japan J. Math. 3 (1977), 239–296

[3] Braun, H., Zur Theorie der Hermitischen Formen, Abh. Math. Sem. d. Hansischen Univ. 14 (1941), 61–150

[4] Eichler, M., Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren, Math. Z. 43 (1938), 102–109

[5] Hashimoto, K., On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion hermitian forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980) 227–245

[6] Hashimoto, K., Class numbers of positive definite ternary quaternion hermitian forms, Proc. Japan Acad. 59 (1983) 490–493

[7] Hashimoto, K. and Ibukiyama, T., On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980), 549–601; —— (II), ibid 28 (1982), 695–699

[8] Hayashida, T., A class number associated with the product

of an elliptic curve with itself, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 26–43.

[9] Iyanaga, K., Class numbers of positive definite hermitian forms, J. Math. Soc. Japan 21 (1969), 359–374

[10] Jacobowitz, R., Hermitian forms over local fields, Amer. J. Math. 84 (1962), 441–465

[11] Otremba, G., Zur Theorie der hermitischen Formen in imaginar-quadratischen Zahlkörpern, J. reine angew. Math. 249 (1971), 1–19

[12] Pizer, A., Class numbers of positive definite quaternary quadratic forms, J. reine angew. Math. 286/287 (1976), 101–123

[13] Ponomarev, P., Class numbers of definite quaternary forms with square discriminant, J. of Number Theory 6 (1974), 291–317

[14] Shimura, G., Arithmetic of unitary groups, Ann of Math. 79 (1964), 369–409