数理解析研究所講究録
第583巻 1986年 133-139

cubic theta function について

名大理　吉本　明宣

cubic theta function と呼ばれる上半空間の保型関数の構成について S. J. Patterson [3] の構成法より少し易しい方法がみつかったので、それについて簡略に述べてみたい。

H を上半空間とする。すなわち $w=(z,v)\in H$ ならば $z\in\mathbb{C}$, $v>0$ である。w は $\begin{pmatrix} z & -v \\ v & \bar{z}\end{pmatrix}$ と同一視できる。そのとき $SL(2,\mathbb{C})$ は H に次の様に作用する。$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{C})$ に対して

$$\sigma(w) = (\tilde{a}w+\tilde{b})\cdot(\tilde{c}w+\tilde{d})^{-1},$$

ここで $\tilde{z}=\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z}\end{pmatrix}$, $(z\in\mathbb{C})$ である。

また $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\lambda=\sqrt{3}i$, $e(z)=\exp(2\pi i(z+\bar{z}))$, $(z\in\mathbb{C})$, $\mathcal{O}=\mathbb{Z}[\omega]$ とおく。さらに $N\in\mathcal{O}$ に対して

$$\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathcal{O}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ N)\right\}$$

とおくと、$\Gamma(N)$は体積有限な基本領域をもつ不連続群になる。

いま $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma(3)$ に対して

$$\chi(\sigma)=\begin{cases}\left(\frac{c}{a}\right)_3 & (c\neq 0),\\ 1 & (c=0)\end{cases}$$

と定義する。ここで $\left(\frac{c}{a}\right)_3$ は $\mathbb{Q}(\omega)$ の3乗剰余記号である。そのとき χ は $\Gamma(3)$ の指標になることが知られている。

そこで上の χ を使って $\mathrm{Re}\, s>2$ に対してEisenstein級数 $E(w,s)$ を

$$E(w,s)=\sum_{\sigma\in\Gamma(3)_\infty\backslash\Gamma(3)}\overline{\chi}(\sigma)\,v(\sigma(w))^s$$

と定義する。ここで $\Gamma(3)_\infty=\{\sigma\in\Gamma(3)\mid\sigma\infty=\infty\}$, $v(w)=v$ である。$E(w,s)$ は全平面に有理型関数として解析接続され，ある関数等式を満足することが知られている。さらに $E(w,s)$ は $s=\frac{4}{3}$ で1位の極を持つ。$E(w,s)$ の $s=\frac{4}{3}$ での留数を cubic theta function と呼ぶ。この cubic theta function のフーリエ係数を具体的に求めることは興味のある問題で、これは S.J. Patterson によって本質的に cubic Gauss sums であることが証明された[3]。ここで $\mu\in\frac{1}{\lambda^3}\mathcal{O}$, $c\equiv 1\,(3)$

に対して, cubic Gauss sum $g(\mu, c)$ は

$$g(\mu, c) = \sum_{\delta \bmod c} \left(\frac{\delta}{c}\right)_3 e\left(\frac{\mu\delta}{c}\right)$$

で定義されている。係数が cubic Gauss sums である保型関数が構成されることによって cubic Gauss sum の性質がよくわかるようになった。さらに次の様な一般的な問題がでてくる。

n べき剰余記号の指標から作られる一般化されたテータ関数のフーリエ展開の係数を具体的に求めること。

一般の n 次の Gauss sums を係数にもつ保型関数が作れないか。

§1. Patterson の方法

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\Gamma(3)$ から生成される群を Γ_0 とする。$\chi\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right) = \chi\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right) = 1$ と定義すると χ は Γ_0 の指標に拡張される。

Γ_0 の $SL(2, \mathcal{O})$ に対する指数は 27 であるが、$\Gamma_0 \backslash SL(2, \mathcal{O})$ の coset の代表系を γ_j とする。F を Γ_0 のもとで指標 χ をもつ保型関数とする。$F_j(w) = F(\gamma_j(w))$ とおくと, $g \in SL(2, \mathcal{O})$ ならば

$\gamma_j g = g_j(g)\gamma_{k_j(g)}$, $g_j(g) \in \Gamma_0$, $1 \leqq k_j(g) \leqq 27$

ととれる。すると

(*) $F_j(g(w)) = \chi(g_j(g)) F_{k_j(g)}(w)$

が成り立つ。

逆に $SL(2,\mathbb{Q})$ の生成元である $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\omega&0\\0&\omega^2\end{pmatrix}$ について27個の $F_j(w)$ で(*)を満たすものが存在するならば、$F_1(w)$ は指標 χ をもつ Γ_0 のもとでの保型関数になる。従ってまず g_j を具体的に求めてさらに $F_j(w)$ を(*)を満たす様に $\Gamma(3)$ の Eisenstein 級数のフーリエ展開の係数によって構成する。

§2. Weilの定理の類似による構成

cubic theta function を Weilの定理の類似を使って構成する。計算を少し楽にしたため $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\Gamma(9)$ から成る群についておこなった。この群を Γ_1 とする。$K_{\frac{1}{3}}(v)$ を変形ベッセル関数, $a_m \in \mathbb{C}$ $(m \in \lambda^{-3}\mathbb{Q})$, $a_m = a_{-m}$ とする。

(仮定1) r を $r \equiv 1\ (9)$ なる素数とする。Ω を mod r の原始的な指標, $\ell \in \mathbb{Z}$ とする。

$$\Psi(s,\Omega,\ell) = \sum_{m \in \lambda^{-3}\mathbb{Q}} a_m \Omega(m) |m|^{1-2s} \left(\frac{m}{|m|}\right)^{\ell}$$

がある所で絶対収束する。さらに

$$\Phi(s,\Omega,\ell) = |r|^{2s} (2\pi)^{-2s} \Gamma\left(s+\frac{|\ell|}{2}-\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(s+\frac{|\ell|}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

$\times \ \Psi(s, \Omega, \ell)$

とおいたとき，$\Phi(s, \Omega, \ell)$ が整関数として全平面に解析接続され，任意の帯領域において $|Im(s)|$ が十分大きいとき有界である。$\Phi(s, \Omega, \ell)$ は次の関数等式を満たす。

$$\Phi(s, \Omega, \ell) = \Omega(-1)(-1)^{\ell}\left(\frac{r}{|r|}\right)^{2\ell} C_{\Omega} \cdot \Phi\left(2-s, \bar{\Omega}\cdot\left(\frac{\ }{r}\right)_3, -\ell\right),$$

ここで $C_{\Omega} = G\left(\Omega\cdot\overline{\left(\frac{\ }{r}\right)_3}\right) / G(\bar{\Omega})$，$G(\Omega) = \sum_{a \bmod r} \Omega(a)\, e\left(\frac{a}{r}\right)$ である。

定理1．$F(w) = a_0 v^{\frac{2}{3}} + \sum_{m \in \lambda^{-3}\mathfrak{O}-\{0\}} a_m v K_{\frac{1}{3}}(4\pi|m|v)\, e(mz)$ に対して Ω^3 が自明でなく，$\Omega(-1)(-1)^{\ell} = 1$ の様な Ω について（仮定1）が成り立っていて，$F\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(w)\right) = F(w)$ であるならば，$\sigma \in \Gamma(9)$ に対して

$$F(\sigma(w)) = \chi(\sigma) F(w)。$$

定理2．$m \in \lambda^{-3}\mathfrak{O}$ に対して

$$\begin{aligned}
\tau_0(m) &= g(\lambda^2, c)\left|\frac{d}{c}\right| 3^{\frac{n}{2}+2}, &&(m = \pm\lambda^{3n-4}cd^3,\ n \geqq 1),\\
&= e^{-\frac{2\pi i}{9}} g(\omega\lambda^2, c)\left|\frac{d}{c}\right| 3^{\frac{n}{2}+2}, &&(m = \pm\omega\lambda^{3n-4}cd^3,\ n \geqq 1),\\
&= e^{\frac{2\pi i}{9}} g(\omega^2\lambda^2, c)\left|\frac{d}{c}\right| 3^{\frac{n}{2}+2}, &&(m = \pm\omega^2\lambda^{3n-4}cd^3,\ n \geqq 1),\\
&= g(1, c)\left|\frac{d}{c}\right| 3^{\frac{n+5}{2}}, &&(m = \pm\lambda^{3n-3}cd^3,\ n \geqq 0),\\
&= 0, &&（その他），
\end{aligned}$$

ここで $c, d \equiv 1 \ (3)$，c は square free である。

そのとき

$$\theta(w) = \sigma_0 v^{\frac{2}{3}} + \sum_{m \in \lambda^{-3}\mathfrak{O}} \tau_0(m) v K_{\frac{1}{3}}(4\pi|m|v) e(mz)$$

が指標 χ をもつ Γ_1 のもとでの保型関数となる様な σ_0 が存在する。

証明. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ については明らかである。$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ については $\Gamma(3)$ の Eisenstein 級数のフーリエ展開の係数からディリクレ級数をつくる。

$\Gamma(9)$ については $\Gamma(3r)$ の Eisenstein 級数から定理1の仮定を満たすディリクレ級数を作る。そのとき Davenport - Hasse の公式を使う。$p = r\bar{r}$ としたとき $\tau(\alpha) = \sum_{a \bmod p} \alpha(a) \exp\left(\frac{2\pi i a}{p}\right)$ とおく。Davenport-Hasse の公式は $\chi(\neq 1)$ を $\bmod p$ の位数3の指標とすると

$$\tau(\alpha \cdot \chi) \cdot \tau(\alpha \cdot \bar{\chi}) \tau(\alpha) = \overline{\alpha^3}(3)\, \tau(\alpha^3) \cdot p$$

である。また次の Gauss の乗法公式

$$\frac{\Gamma(3t-3)}{\Gamma(t-1)} = \frac{3^{3(t-1)}}{2\pi\sqrt{3}} \Gamma\left(t - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(t - \frac{2}{3}\right)$$

も使われている。

注意. 4乗の場合に同様な事を行うと、全くの類似では4乗の Gauss 和をもつ保型関数はつくれない。

文 献

[1] H. Davenport and H. Hasse, Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fallen, J. reine angew. Math., 172 (1934), 151-182.

[2] T. Kubota, Some results concerning reciprosity law and real analytic automorphic functions, Proc. Sympos. Pure Math., 20(1971), 382-395.

[3] S. J. Patterson, A cubic analogue of the theta series, J. reine angew. Math., 296 (1977), 125-161.

[4] T. Suzuki, Some results on biquadratic theta series, J. reine angew Math., 340 (1984), 70-117.

[5] A. Weil, Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann., 168 (1967), 149-156.