数理解析研究所講究録
第583巻 1986年 140-160

Jacobi forms に付随するL-函数について

東大理　　村瀬 篤

講演では，Jacobi formに付随するL-函数（の一つ）を定義し，その解析的性質について述べた。本稿では講演で詳しく触れなかったL-函数のPiatetski-Shapiro & Rallis型の積分表示（[PS-R]）を中心に扱う。local factorの具体的な計算については，現在準備中の論文を参照していただきたい。

§1. Jacobi forms

Jacobi formを扱うには，T. Shintani（[Sh]）により導入された次のような$\mathbb{Q}$上の代数群$\underline{G}$のアデール群$\underline{G}_A$上の保型形式ととらえるのが便利である。整数$n \geq 1$, $m \geq 0$に対し$\mathbb{Q}$上の代数群$H = H_{n,m}$を

$$H = M(m,n) \times M(m,n) \times Z_m$$

（ただし，$M(m,n)$およびZ_mは，それぞれ$m \times n$次行列およびm次対称行列のなす$\mathbb{Q}$上の代数群），乗法演算を，

$$(\xi,\eta,\zeta)(\xi',\eta',\zeta') = (\xi+\xi',\ \eta+\eta',\ \zeta+\zeta'+\xi\,{}^t\eta'+\eta'\,{}^t\xi)$$

により定めるものとする。 H は，two step nilpotent な代数群で，"Heisenberg group" と呼ばれる。 H には，n 次の symplectic 群 $G = G_n = \{ g \in GL(2n) \mid {}^tg J_n g = J_n \}$ ($J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$) が次のように作用する； $h = (\xi,\eta,\zeta) \in H$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ に対し，

$$h^g = (\xi',\ \eta',\ \zeta + \xi'\,{}^t\eta' - \xi\,{}^t\eta)$$

ただし， $(\xi',\eta') = (\xi\ \eta)\,g = (\xi a+\eta c,\ \xi b+\eta d)$.

そこで， $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}_{n,m}$ を， $H_{n,m}$ と G_n との半直積

$$\underline{\underline{G}}_{n,m} = H_{n,m} \rtimes G_n$$

により定義する。 $\underline{\underline{G}}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された連結な代数群である。 $\underline{\underline{G}}$ の中心は， $\underline{\underline{Z}} = \{ (0\,0\,\zeta) \mid \zeta \in Z_m \}$ だから， $m \geqq 1$ ならば， $\underline{\underline{G}}$ は reductive ではない。 $\underline{\underline{G}}$ は，

$$(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{1_{m+n}} & & m & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc} 1_{m+n} & \zeta & \eta \\ & {}^t\eta & 0 \\ \hline O & \multicolumn{2}{c}{1_{m+n}} \end{array}\right] \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1_m & \xi & \multicolumn{2}{c}{O} \\ 0 & 1_n & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & 1_m & 0 \\ & & {}^t\xi & 1_n \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{cc|cc} 1_m & & 0 & \\ & a & & b \\ \hline 0 & & 1_m & \\ & c & & d \end{array}\right]$$

により $Sp(n+m)$ の部分群とみなせる。 Lie 群 $\underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$ のユニタリ表現(特に discrete series) については，I. Satake の研究 ([Sa]) がある。

complex domain $\mathfrak{H}_n \times M_{mn}(\mathbb{C})$ を $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{n,m}$ とかく。ここで $\mathfrak{H}_n = \{ z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t z = z,\ \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ は n次 Siegel 上半空間である。Lie 群 $\underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$ は、$\mathfrak{D}$ に次のように解析的かつ推移的に作用する：

$$\underline{\underline{g}} \langle Z \rangle = (g\langle z \rangle ,\ w j(g,z)^{-1} + \xi \cdot g\langle z \rangle + \eta)$$

ここに $\underline{\underline{g}} = (\xi\ \eta\ \zeta) g \in \underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$, $Z = (z, w) \in \mathfrak{D}$ で $g\langle z \rangle = (az+b)(cz+d)^{-1}$, $j(g,z) = cz+d$ $\left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R}) \right.$, $\left. z \in \mathfrak{H}_n \right)$。$G(\mathbb{R})$ における $i1_n \in \mathfrak{H}_n$ の固定部分群を $K_\infty = K_{n,\infty}$ とかく： $K_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R}) \;\middle|\; \alpha + i\beta \in U(n) \right\}$。
$Z_0 = (i1_n, 0) \in \mathfrak{D}$ の $\underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$ における固定部分群は $\underline{\underline{Z}}(\mathbb{R}) \cdot K_\infty$ に等しい。従って、$\underline{\underline{g}} \longmapsto \underline{\underline{g}}\langle Z_0 \rangle$ は、$\underline{\underline{G}}(\mathbb{R}) / \underline{\underline{Z}}(\mathbb{R}) \cdot K_\infty$ から $\mathfrak{D}$ の上への diffeomorphism を与える。

次に、整数 l と m次半整数正定値対称行列 S に対し、保型因子 $J_{S,l}$ を定義する。$u, v \in M(m,n)$ に対し、$S(u,v) = {}^t u S v$, $S[u] = {}^t u S u$ と略記する。$\underline{\underline{g}} = (\xi\ \eta\ \zeta) g \in \underline{\underline{G}}(\mathbb{R})$ $\left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$, $Z = (z, w) \in \mathfrak{D}$ に対し、

$$\begin{aligned} J_{S,l}(\underline{\underline{g}}, Z) = \det j(g,z)^{l}\, \mathbf{e}\big[& -\mathrm{tr}\, S\zeta \\ & + \mathrm{tr}\, S[w]\, j(g,z)^{-1} c - 2\,\mathrm{tr}\, S(\xi, w)\, j(g,z)^{-1} \\ & - \mathrm{tr}\, S[\xi]\, g\langle z \rangle \big] \end{aligned}$$

とおく。ここに $\mathbf{e}[x]=e^{2\pi i x}$ $(x\in\mathbb{R})$。$(\underline{g},Z)\longmapsto J_{S,\ell}(\underline{g},Z)$ は $\underline{G}(\mathbb{R})\times\mathfrak{D}$ 上の保型因子を定める。

最後に，この保型因子を用いて weight ℓ, index S の holomorphic cusp forms の空間 $\mathfrak{S}_{S,\ell}$ を定義する。$\mathbb{Q}$ のアーデル環を A とおく。$A/\mathbb{Q}$ の non trivial character ψ_A で $\psi_A(x_\infty)=\mathbf{e}[x_\infty]$ $(x_\infty\in\mathbb{R})$ なるものをとる。$Z(A)$ の character ψ_S を $\psi_S(z)=\psi_A(\mathrm{tr}\, Sz)$ により定義する。さらに $\underline{K}_f=\prod_{p<\infty}\underline{K}_p$ $(\underline{K}_p=\underline{G}_{\mathbb{Z}_p})$ とおく。正整数 ℓ に対し，$\mathfrak{S}_{S,\ell}$ を次の条件 (1.1) — (1.4) をみたす $\underline{G}_A$ 上の $\mathbb{C}$-valued function f のなす $\mathbb{C}$-vector space とする。

(1.1) $$f((0\,0\,z)\,\underline{\gamma}\,\underline{g}\,\underline{k}\,k_\infty)=\psi_S(z)\det j(k_\infty, i1_n)^{-\ell} f(\underline{g})$$
$$(z\in Z_A,\ \underline{\gamma}\in\underline{G}_{\mathbb{Q}},\ \underline{k}\in\underline{K}_f,\ k_\infty\in K_\infty)$$

$Z\in\mathfrak{D}$ に対し，$\underline{g}_Z\langle Z_0\rangle=Z$ なる $\underline{G}_{\mathbb{R}}$ の元 $\underline{g}_Z$ を選び，$F_f(Z)=f(\underline{g}_Z)J_{S,\ell}(\underline{g}_Z,Z_0)$ とおく。条件 (1.1) により $F_f(Z)$ は $\underline{g}_Z$ のとり方によらず $Z\in\mathfrak{D}$ の函数となる。

(1.2) $Z\longmapsto F_f(Z)$ は $\mathfrak{D}$ 上正則。

(1.3)　f は $\mathfrak{G}_A$ 上有界。

最後の条件を述べるために，いくつか記号を導入する必要がある。整数 d $(1 \le d \le n)$ に対し，

$$P(d) = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} d & n-d & d & n-d \\ \end{array} \right.$$

$$P(d) = \left\{ \begin{bmatrix} A & * & * & * \\ 0 & \alpha & * & \beta \\ 0 & 0 & {}^tA^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma & * & \delta \end{bmatrix} \in G_n \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in GL(d) \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(n-d) \end{array} \right\},$$

$$N(d) = \left\{ \begin{bmatrix} 1_d & * & * & * \\ 0 & 1_{n-d} & * & 0 \\ 0 & 0 & 1_d & 0 \\ 0 & 0 & * & 1_{n-d} \end{bmatrix} \in G_n \right\}$$

とおく。$\{P(d) : 1 \le d \le n\}$ は G_n の maximal parabolic subgroups の共役類の代表系をなす。$N(d)$ は $P(d)$ の unipotent radical である。さらに

$$H(d) = \{ (0\ \eta\ 0) \in H \mid \eta = (\overset{d}{*}\ \overset{n-d}{0}) \}$$

とおく。最後の条件（cuspidal condition）は次の通り。

$$(1.4)\quad \int_{\underline{N}(d)_{\mathbb{Q}} \backslash \underline{N}(d)_A} f(\underline{n}\,\underline{g})\,d\underline{n} = 0 \qquad \text{for } {}^\forall \underline{g} \in \mathfrak{G}_A \quad {}^\forall d$$

ただし，$\underline{N}(d) = H(d) \cdot N(d)$。

$\mathfrak{S}_{S,\ell}$ の各元 f を weight ℓ, index $\mathcal{S}$ の正則 Jacobi cusp form と呼ぶ。$\mathfrak{S}_{S,\ell}$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元であることが知られている。

§2. Hecke 作用素，L-函数 ([Sh])

$p \nmid \det(2S)$ なる素数 p を一つ fix し，$\underline{G}_p = \underline{G}_{\mathbb{Q}_p}$，$\underline{K}_p = \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ etc. と略記する。$\psi_{S,p}$ を，ψ_S の local component とする。$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p(\underline{G}_p, \underline{K}_p : \psi_{S,p})$ を，次の二条件 (2.1), (2.2) をみたす $\underline{G}_p$ 上の $\mathbb{C}$-valued functions のなす $\mathbb{C}$-module とする。

$$(2.1) \qquad \varphi((0\,0\,\mathfrak{z})\,\underline{k}\,\underline{g}\,\underline{k}') = \psi_{S,p}(\mathfrak{z})\,\varphi(\underline{g})$$
$$(\mathfrak{z} \in Z_p,\ \underline{k}, \underline{k}' \in \underline{K}_p)$$

(2.2) φ は modulo $\underline{Z}_p$ で compact な support をもつ。

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_p$ に対し convolution

$$\varphi_1 * \varphi_2(\underline{g}) = \int_{\underline{Z}_p \backslash \underline{G}_p} \varphi_1(\underline{g}\,\underline{x}^{-1})\,\varphi_2(\underline{x})\,d\underline{x}$$

により積を定めることにより，$\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}$-algebra をなす。

$$\underline{N} = \left\{ (0\,\eta\,0)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X \\ & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n),\ X \in Z_n \right\},$$

$$\underline{T} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & t_n & & & \\ & & & t_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & t_n^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

とおき，$d\underline{n}$ を $\underline{N}_p$ の Haar measure で

$$\int_{\underline{N}_{\mathbb{Z}_p}} d\underline{n} = 1$$

なるものとする。さらに $t \in T_{\mathbb{Q}_p}$ に対し,

$$\delta_{\underline{N}}(t) = d(t\underline{n}t^{-1})/d\underline{n}$$

により $\underline{N}$ の module $\delta_{\underline{N}}$ を定義する。$\varphi \in \mathcal{H}_p$, $t \in T_p$ に対し

$$\tilde{\varphi}(t) = \delta_{\underline{N}}^{-\frac{1}{2}}(t) \int_{\underline{N}} \varphi(\underline{n}t)\, d\underline{n}$$

とおくと, $\tilde{\varphi}$ は T_p 上 compactly supported である。

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\pi^\lambda = \begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & p^{\lambda_n} & & & \\ & & & p^{-\lambda_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p^{-\lambda_n} \end{pmatrix} \in T_p$$

とかく。$\varphi \in \mathcal{H}$ に対し

$$F_\varphi(X) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}(\pi^\lambda) X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n}$$

とおくと, $F_\varphi \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ である。

$1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ に対し, $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ の自己同型 σ_{ij}, τ_k を

$$\sigma_{ij}(X_l) = \begin{cases} X_j & l = i \\ X_i & l = j \\ X_l & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tau_k(X_l) = \begin{cases} X_k^{-1} & l = k \\ X_l & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定め, σ_{ij}, τ_k たちで生成される $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$

の自己同型群を，Wとかく。このとき F_φ は，W-不変 (i.e. $F_\varphi \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$) である。

<u>Proposition 1</u> (Satake 同型) 写像 $\varphi \mapsto F_\varphi$ は，$\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$ への，$\mathbb{C}$-algebra としての同型を与える。

$\chi \in \mathrm{Hom}(T_p/T_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$ ($T_p^\circ = T_{\mathbb{Z}_p}$) に対して，$\underline{\underline{G}}_p$ 上の函数 ϕ_χ を

$$\phi_\chi((0\,0\,z)\,\underline{\underline{n}}\,t\,(\xi\,0\,0)\,\underline{\underline{k}}) = \psi_{s,p}(z)\,\chi\cdot\delta_{\underline{N}}^{\frac{1}{2}}(t)\cdot\Phi(\xi)$$

$$(z \in Z_p,\ \underline{\underline{n}} \in \underline{\underline{N}}_p,\ t \in T_p,\ \xi \in M_{mn}(\mathbb{Q}_p),\ \underline{\underline{k}} \in \underline{\underline{K}}_p)$$

により定める。ただし Φ は $M_{mn}(\mathbb{Z}_p)$ の特性函数。

$\underline{\underline{G}}_p$ の"帯球函数" ω_χ を，

$$\omega_\chi(\underline{\underline{g}}) = \int_{\underline{\underline{K}}_p} \phi_\chi(\underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{g}})\,d\underline{\underline{k}} \qquad (\underline{\underline{g}} \in \underline{\underline{G}}_p)$$

により定義する。ここで $\underline{\underline{K}}_p$ の Haar measure $d\underline{\underline{k}}$ は $\int_{\underline{\underline{K}}_p} d\underline{\underline{k}} = 1$ により正規化する。このとき，次が成立する。

<u>Proposition 2</u>

(i) $\omega_\chi((0\,0\,\zeta)\,\underline{k}\,\underline{g}\,\underline{k}') = \psi_{S,p}(\zeta)\,\omega_\chi(\underline{g})$

$\zeta \in Z_p,\ \underline{k}, \underline{k}' \in \underline{K}_p,\ \underline{g} \in \underline{G}_p$

(ii) $\omega_\chi(1) = 1$

(iii) $\varphi \in \mathcal{H}$ に対し,

$$\varphi * \omega_\chi = \hat{\omega}_\chi(\varphi) \cdot \omega_\chi$$

ただし, $\hat{\omega}_\chi(\varphi) = F_\varphi(\chi_1^{-1}(p), \cdots, \chi_n^{-1}(p))$

(ここで $\chi\begin{pmatrix} t_1 \cdots t_n & \\ & t_1^{-1} \cdots t_n^{-1} \end{pmatrix} = \chi_1(t_1) \cdots \chi_n(t_n)$ とおいた)

<u>Proposition 3</u> $\varphi \longmapsto \hat{\omega}_\chi(\varphi)$ は, $\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-algebra homomorphism を与える。逆に $\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への任意の $\mathbb{C}$-algebra homomorphism は, $\hat{\omega}_\chi$ ($\chi \in \mathrm{Hom}(T_p/T_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$) の形にかける。

$\mathcal{H}_p$ は convolution により, $\mathfrak{S}_{S,\ell}$ に作用する。この作用は, $\mathfrak{S}_{S,\ell}$ の自然な計量に関し正規であり, また, Proposition 1 により $\mathcal{H}_p$ は可換だから, $\mathfrak{S}_{S,\ell}$ の基底として, $\bigotimes_{p \nmid \det(2S)} \mathcal{H}_p$ の同時固有函数からなるものがとれる。$f \in \mathfrak{S}_{S,\ell}$ が $\mathcal{H}_p$ ($p \nmid \det(2S)$) の同時固有函数であるとする:

$$f * \varphi = \lambda_{f,p}(\varphi) \cdot f \qquad (\varphi \in \mathcal{H}_p,\ \lambda_{f,p}(\varphi) \in \mathbb{C})。$$

$\varphi \longmapsto \lambda_{f,p}(\varphi)$ は，$\mathcal{H}$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$-algebra homomorphism だから Proposition 3 より，

$$\lambda_{f,p}(\varphi) = \widehat{\omega}_{\chi_{f,p}}(\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{H}_p$$

なる $\chi_{f,p} \in \mathrm{Hom}(T_p/T_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$ が存在する．$\chi_{f,p}$ に対応する $\mathbb{Q}_p^\times$ の character を $\chi_{f,p}^{(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ とし，

$$L_p(s,f) = \prod_{i=1}^{m} (1-\chi_{f,p}^{(i)}(p)p^{-s})^{-1}(1-\chi_{f,p}^{(i)}(p)^{-1}p^{-s})^{-1}$$

とおく。

$$L(s,f) = \prod_{p \nmid \det(2S)} L_p(s,f)$$

が，我々の考察の対象とする f の L-函数である．

§3. Orbit decomposition

$W = \mathbb{Q}^{4n+2m}$（横ベクトルの空間と考える）上の行列

$$J_W = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m & 2n & m & 2n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & & 1_m & \\ & J_n & & 0 \\ \hline -1_m & & 0 & \\ & 0 & & -J_n \end{array}\right] \end{array}$$

により定まる非退化歪対称形式 $\langle\ ,\ \rangle_W$ に関する symplectic 群を，G^* とする：

$$G^* = \{ g^* \in GL(4n+2m) \mid \langle wg^*, w'g^* \rangle_W = \langle w, w' \rangle_W \quad {}^\forall w, w' \in W \}.$$

$\mathfrak{X}$ を，$\langle\ ,\ \rangle_W$ に関する W の maximal isotropic $\mathbb{Q}$-subspace のなす集合とする。$G^*_{\mathbb{Q}}$ は，$\mathfrak{X}$ に（右から）推移的に作用する。$e_i = (0 \cdots 0 \overset{i}{1} 0 \cdots 0)$ $(1 \leq i \leq 4n+2m)$ を，W の basis

とする。L_0 を，e_i ($1\le i\le m$)，e_i+e_{i+m} ($m+1\le i\le m+2n$) で張られる W の部分空間とすると，$L_0\in\mathfrak{X}$。L_0 の G^*_Q における固定部分群を，P^*_Q とすると，P^* は G^* の maximal parabolic subgroup で，その Levi subgroup は $GL(2n+m)$ と同型であり，$\mathfrak{X}$ と $P^*_Q\backslash G^*_Q$ は G^*_Q の作用する均質空間として同一視される。

$$\underline{g}=(\xi\;\eta\;\zeta)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\quad \underline{g}'=(\xi'\;\eta'\;\zeta')\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\in\underline{G}$$

に対し，

$$\iota(\underline{g}\times\underline{g}')=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} m&n&n&m&n&n\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1_m&\xi&\eta&\tilde{\zeta}&\xi'&\eta'\\ 0&1_n&0&{}^t\eta&0&0\\ 0&0&1_n&-{}^t\xi&0&0\\ \hline &&&1_m&0&0\\ &0&&-{}^t\eta'&1_n&0\\ &&&{}^t\xi'&0&1_n\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} m&n&n&m&n&n\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1_m&&&&&\\ &a&b&&0&\\ &c&d&&&\\ \hline &&&1_m&&\\ &0&&&a'&b'\\ &&&&c'&d'\end{array}\right]\end{array}$$

$$(\tilde{\zeta}=\zeta-\zeta'-\eta\,{}^t\xi+\eta'\,{}^t\xi')$$

とおくと，ι は $\underline{G}\times\underline{G}$ から G^* への準同型写像を定める。明らかに，$\mathrm{Ker}\,\iota=\underline{\underline{Z}}^d=\{(0\,0\,\zeta)\times(0\,0\,\zeta)\mid \zeta\in Z_m\}$。$m=0$ のときは，ι は [PS-R] で与えられている $Sp(n)\times Sp(n)$ から $Sp(2n)$ への embedding に一致している。$\underline{G}_Q\times\underline{G}_Q$ は，ι を通じて $\mathfrak{X}$ に作用する。

この節の目標は，$\mathfrak{X}$ の $\underline{G}_Q\times\underline{G}_Q$-orbit decomposition を求め，各 orbit の代表 L に対し，

$\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ における固定部分群

$$\underline{\underline{P}}(L)_{\mathbb{Q}} = \{ \underline{\underline{g}} \times \underline{\underline{g}}' \in \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \mid L \cdot \iota(\underline{\underline{g}} \times \underline{\underline{g}}') = L \}$$

の構造を調べることである。 $L, L' \in \mathfrak{X}$ に対し，L, L' が同じ $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$ -orbit に属するとき $L \sim L'$ とかく。

$$W_1 = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Q} \cdot e_{m+2n+i}$$
$$W_2 = \sum_{i=1}^{m+2n} \mathbb{Q} \cdot e_{m+2n+i}$$

とおく。 $L \in \mathfrak{X}$ に対し 二つの"不変量" を次のように定義する。

$$K_1(L) = L \cap W_1$$
$$K_2(L) = \dim(L \cap W_2) - \dim(L \cap W_1),$$

ただし，W_1 と $\mathbb{Q}^m$ を自然に同一視し，$K_1(L)$ を，$\mathbb{Q}^m$ の $\mathbb{Q}$-subspace のなす集合 $\mathcal{F}(\mathbb{Q}^m)$ の元とみる。 実は，$0 \leq K_2(L) \leq n$ であることがわかる。

明らかに $K_1(L_0) = \{0\}$， $K_2(L) = 0$ 。

このとき，次のことが証明される。

<u>Proposition 4</u> $L, L' \in \mathfrak{X}$ に対し

$$L \sim L' \iff K_i(L) = K_i(L') \quad i = 1, 2 .$$

$\mathbb{Q}^m$ の subspace U を，W_1 の subspace とみなし，U' を，$\langle , \rangle_W$ に関する U の直交補空間，$U^\perp = U' \cap \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Q} e_i$ とおく。整数 d $(0 \leq d \leq n)$ と，$U \in \mathfrak{F}(\mathbb{Q}^m)$ に対し，$U, U^\perp, e_{m+n+i}, e_{2m+3n+i}$ $(1 \leq i \leq d)$ および $e_{m+j} + e_{2m+2n+j}$，$e_{m+n+j} + e_{2m+3n+j}$ $(d+1 \leq j \leq n)$ で張られる W の subspace を $L_{U,d}$ とかく。このとき $L_{U,d} \in \mathfrak{X}$ で，$k_1(L_{U,d}) = U$，$k_2(L_{U,d}) = d$。

<u>Cor</u>　$\mathfrak{X}$ の $\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}} \times \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}$-orbit decomposition の代表系として $\{ L_{U,d} \mid U \in \mathfrak{F}(\mathbb{Q}^m),\ 0 \leq d \leq n \}$ をとることができる。

次の節で必要になる $\underline{\underline{P}}(L)$ の構造を調べよう。Cor. より $L = L_{U,d}$ の場合だけ調べれば十分である。

<u>Lemma 1</u>　$\underline{\underline{P}}(L_{\{0\},0}) = \underline{\underline{G}}^d = \{ \underline{g} \times \underline{g} \mid \underline{g} \in \underline{\underline{G}} \}$

<u>Lemma 2</u>　$\underline{\underline{P}}(L_{\{0\},d}) = \mathcal{H}(d) \mathcal{P}(d)$　$d \geq 1$

ただし，

$$\mathcal{H}(d) = \{ (\xi\,\eta\,\zeta) \times (\xi'\,\eta'\,\zeta') \in H \times H \mid$$
$$\zeta = \zeta', \quad \xi_i = \eta_i' = 0 \quad (1 \leq i \leq d),$$
$$\xi_j = \xi_j', \ \eta_j = \eta_j' \quad (d+1 \leq j \leq n) \}$$

($\xi_i, \cdots$ は $\xi, \cdots$ の 第 i 行)

$$\mathcal{P}(d) = \left\{ \begin{array}{cccc} d & n-d & d & n-d \\ \left(\begin{array}{cccc} A & * & * & * \\ 0 & \alpha & * & \beta \\ 0 & 0 & {}^tA^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma & * & \delta \end{array}\right. & & & \left.\right) \end{array} \times \begin{array}{cccc} d & n-d & d & n-d \\ \left(\begin{array}{cccc} A' & 0 & 0 & 0 \\ * & \alpha & * & \beta \\ * & * & {}^tA'^{-1} & * \\ * & \gamma & 0 & \delta \end{array}\right. & & & \left.\right) \end{array} \right|$$
$$A, A' \in GL(d), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(n-d) \Big\}$$

特に, $\underline{\underline{\mathcal{P}}}(L_{\{0\},d})$ は

$$\underline{\underline{N}}(\{0\}, d) = \mathcal{H}(d) \cdot (N(d) \times {}^tN(d))$$

を normal subgroup としてもつ。

一般に $U \neq \{0\}$ のときは $\underline{\underline{\mathcal{P}}}(L_{U,d})$ の構造は複雑であるが, 我々の目的のためには 次で十分である。$\mathbb{Q}^m$ の subspace U に対し, $\hat{U} = \{x \in \mathbb{Q}^m \mid x\,{}^tU = 0\}$, $Z(U) = \{\zeta \in Z_m \mid \hat{U} \cdot \zeta \subset U\}$ とおく。

<u>Lemma 3</u> $\underline{\underline{\mathcal{P}}}(L_{U,d})$ は $U \neq \{0\}$ のとき,

$$\underline{\underline{N}}(U, d) = \{(0\,0\,\zeta) \times 1 \mid \zeta \in Z(U)\}$$

を normal subgroup としてもつ。

§4. Basic identity

N^* を P^* の unipotent radical とする。$p^* \in P^*_A$, $s \in \mathbb{C}$ に対し

$$\delta^s_{p^*}(p^*) = [\, d(p^* n^* p^{*-1}) / dn^*]^s$$

(dn^* は N^*_A の Haar measure) とおく。φ を G^*_A 上の $\mathbb{C}$-valued function で $\varphi(p^* g^*) = \delta^s_{p^*}(p^*) \cdot \varphi(g^*)$ ($p^* \in P^*_A$, $g^* \in G^*_A$) をみたすものとする。Re $s \gg 0$ で, f が "よい" 函数 ならば Eisenstein 級数

$$(4.1) \qquad E(g^*; \varphi) = \sum_{\gamma^* \in P^*_{\mathbb{Q}} \backslash G^*_{\mathbb{Q}}} \varphi(\gamma^* g^*)$$

は絶対収束し, $G^*_{\mathbb{Q}} \backslash G^*_A$ 上 slowly increasing な函数を定める。$\mathcal{C}$ を $\underline{G}_A$ 上の $\mathbb{C}$-valued smooth function で

$$(4.2) \qquad f(\underline{\gamma}\, \underline{g} (\infty z)) = \psi_s(z) f(\underline{g}) \qquad \underline{\gamma} \in \underline{G}_{\mathbb{Q}},\ z \in Z_A$$

$$(4.3) \qquad f \text{ は } \underline{G}_{\mathbb{Q}} \backslash \underline{G}_A \text{ 上 rapidly decreasing}$$

$$(4.4) \qquad \int_{\underline{N}^d(\mathbb{Q}) \backslash \underline{N}^d_A} f(\underline{n}\, \underline{g})\, d\underline{n} = 0 \qquad \underline{g} \in \underline{G}_A$$

が任意の $1 \le d \le n$ について成立

をみたすもののなす空間とする。$\varphi \in \mathcal{C}$ に対し, convolution

$$I(\varphi;f)=\int_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}\times\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}\backslash\underline{\underline{G}}_A\times\underline{\underline{G}}_A} E(\iota(\underline{\underline{g}}\times\underline{\underline{g}}'):\varphi)\, f(\underline{\underline{g}})\overline{f(\underline{\underline{g}}')}\,d\underline{\underline{g}}\,d\underline{\underline{g}}'$$

を考える。定義(4.1)より

$$I(\varphi:f)=\int_{\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}\times\underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}}\backslash\underline{\underline{G}}_A\times\underline{\underline{G}}_A}\sum_{\gamma^*\in P^*_{\mathbb{Q}}\backslash G^*_{\mathbb{Q}}/\iota(\underline{\underline{G}}\times\underline{\underline{G}})_{\mathbb{Q}}}\ \sum_{\xi^*\in\gamma^{*-1}P^*_{\mathbb{Q}}\gamma^*\cap\iota(\underline{\underline{G}}\times\underline{\underline{G}})_{\mathbb{Q}}\backslash\iota(\underline{\underline{G}}\times\underline{\underline{G}})_{\mathbb{Q}}}\varphi(\gamma^*\xi^*\iota(\underline{\underline{g}}\times\underline{\underline{g}}'))$$
$$\times f(\underline{\underline{g}})\overline{f(\underline{\underline{g}}')}\,d\underline{\underline{g}}\,d\underline{\underline{g}}'\ .$$

対応 $\gamma^*\longmapsto L_0\gamma^*$ は，$P^*_{\mathbb{Q}}\backslash G^*_{\mathbb{Q}}/\iota(\underline{\underline{G}}\times\underline{\underline{G}})_{\mathbb{Q}}$ と，$\mathfrak{X}/\sim$ との同一視を与え，さらに $\iota(\underline{\underline{P}}(L_0\gamma^*))=\gamma^*P^*_{\mathbb{Q}}\gamma^{*-1}\cap\iota(\underline{\underline{G}}\times\underline{\underline{G}})_{\mathbb{Q}}$ である。今 $L\in\mathfrak{X}$ に対し，$L=L_0\gamma^*_L$ なる $\gamma^*_L\in G^*_{\mathbb{Q}}$ を一つ選べば，

$$I(\varphi:f)=\sum_{L\in\mathfrak{X}/\sim} I_L\ ,$$

$$I_L=\int_{\underline{\underline{P}}(L)_{\mathbb{Q}}\backslash(\underline{\underline{G}}\times\underline{\underline{G}})_A}\varphi(\gamma^*_L\iota(\underline{\underline{g}}\times\underline{\underline{g}}'))f(\underline{\underline{g}})\overline{f(\underline{\underline{g}}')}\,d\underline{\underline{g}}\,d$$

（I_L は L の同値類によらない）。

$L=L_0$ のとき，$\underline{\underline{P}}(L)=\underline{\underline{G}}^d$ なることより，

$$I_{L_0} = \int_{\underline{\underline{G}}_A} \varphi(L(\underline{\underline{g}} \times 1))\, \Omega(\underline{\underline{g}} : f)\, d\underline{\underline{g}} \quad ,$$

ただし

$$\Omega(\underline{\underline{g}} : f) = \int_{\underline{\underline{G}}_Q \backslash \underline{\underline{G}}_A} f(\underline{\underline{x}}\, \underline{\underline{g}}^{-1})\, \overline{f(\underline{\underline{x}})}\, d\underline{\underline{x}} \quad .$$

$L \not\sim L_0$ なるときは，$L = L_{U,d}$，$(U,d) \neq (\{0\}, 0)$ としてよい。このとき $\underline{\underline{P}}(L)$ は Lemma 2.3 で定めた $\underline{\underline{N}}(U,d)$ を normal subgroup としてもつから I_L の積分は

$$J = \int_{\underline{\underline{N}}(U,d)_Q \backslash \underline{\underline{N}}(U,d)_A} f(\underline{\underline{n}}\, \underline{\underline{g}})\, \overline{f(\underline{\underline{n}}'\, \underline{\underline{g}}')}\, d\underline{\underline{n}}^*$$

$(\, n^* = \underline{\underline{n}} \times \underline{\underline{n}}' \in \underline{\underline{N}}(U,d)_A \,)$ を通す。$U = \{0\}$ のときは上の積分 J が更に

$$\int_{\underline{\underline{N}}^d_Q \backslash \underline{\underline{N}}^d_A} f(\underline{\underline{n}}\, \underline{\underline{g}})\, d\underline{\underline{n}} = 0$$

を通すことから (4.4) により $I_L = 0$. $U \neq \{0\}$ のときは，J が

$$\int_{Z(U)_Q \backslash Z(U)_A} \psi_S(z)\, dz$$

を通し，さらに ψ_S が $Z(U)_A$ 上 nontrivial であること ($S > 0$ からの帰結) から $I_L = 0$ を得る。

まとめると

Proposition 5 (Basic identity)

$$I(\varphi ; f) = \int_{\underline{G}_A} \varphi(\iota(\underline{g} \times 1))\, \Omega(\underline{g} : f)\, d\underline{g} \tag{4.5}$$

最後に，basic identity の Jacobi form の L-函数の理論への応用について大ざっぱに述べる。$G_{S,l} \subset \mathcal{C}$ であるから weight l, index S の Jacobi form f に対して (4.5) を適用できる。$f \in G_{S,l}$ を $\bigotimes_{p \nmid \det(2S)} \mathcal{H}_p$ の同時固有函数とすると §2の最後に述べたことから $\Omega(\underline{g} : f)$ は帯球函数 $\omega_{\chi_{f,p}}(\underline{g}_p)$ たちの積に分解する。従って φ を分解型 ($\varphi(g^*) = \prod_v \varphi_v(g_v^*)$ $g^* = (g_v^*) \in G_A^*$) にとれば (4.5) の右辺はある Euler 積に分解する。K^* を適当な G_A^* の compact subgroup とし，$\varphi_s(p^* k^*) = \delta(p^*)^s$ ($p^* \in P_A^*$, $k^* \in K^*$) の形にとれば（実際は ∞-成分を少し変更する必要がある），good prime p ($p \nmid \det(2S)$) における Euler 積の local factor を計算することができ，それは $L_p(s, f)$ にある elementary factor をかけた

ものになる。一方，Eisenstein 級数の理論（Langlands）により，(4.5) の左辺は，s の函数として全平面に解析接続され，ある函数等式を持つ。これにより，f に付随する L-函数 $L(s.f)$ の解析的性質に関して情報が得られる。この方法によって満足すべき結果が得られるのは，最初に固定した S が各素数 p に対し，次の二条件 $(4.6)_p$, $(4.7)_p$ をみたすときである：

$(4.6)_p$ $\mathbb{Q}_p^m$ の lattice L_1 で $L_1 \supset L = \mathbb{Z}_p^m$ かつ "$x \in L_1 \Rightarrow S[x] = {}^t x S x \in \mathbb{Z}_p$" ならば $L_1 = L$

$(4.6)_p$ の下で

$$L' = \{ x \in \mathbb{Q}_p^m \mid x \in (2S)^{-1}L,\ \mathrm{tr}\, S[x] \in p^{-1}\mathbb{Z}_p \}$$

は $\mathbb{Q}_p^m$ の lattice で $L \subset L' \subset p^{-1}L$。今，$\partial_p(S) = \dim_{\mathbb{F}_p}(L'/L)$ とおくと $\partial_p(S) \leq 2$ が知られている。

$(4.7)_p$ $\partial_p(S) = 0$ （すなわち $L' = L$）

§2 で述べたこと（Satake 同型の存在）はこの場合にまで成立し，$L(s.f)$ の解析接続，函数等式等が証明される。（$\partial_p(S) = 1$ のとき Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ は可換であるが Satake 同型は存在しない。$\partial_p(S) = 2$ のときは一般に $\mathcal{H}_p$ は可換ですらない）

$m=1$, $S=(1)$ の場合 $(4.6)_p$, $(4.7)_p$ が各 p に対し成立する。この場合 $f \in \mathfrak{S}_{S,\ell}$ は vector valued の半整数ウエイト $(\ell-\frac{1}{2})$ の Siegel modular form と同一視される。

最後になったが Shintani は [Sh] においてまったく別の興味深い方法で Jacobi form の L-函数の研究を創めている。$n=1$ のときは菅野孝史氏が [Sh] で未解決だった部分も含めて証明を復元されている。本稿の §1.2 は [Sh] に多く依っていることを付言したい。

Reference

[PS-R] I. Piatetski-Shapiro & S. Rallis "L-functions of automorphic forms on simple classical groups", in "Modular forms" ed. by R.A. Rankin, Halsted Press, 1984, 251-261.

[Sa] I. Satake 「ある群拡大とそのユニタリ表現について」 数学, 21 (1969) 241-253

[Sh] T. Shintani unpublished notes