数理解析研究所講究録
第 583 巻 1986 年 167-168

2次形式の局所密度とアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数について

名大理　北岡良之 (Yoshiyuki Kitaoka)

講究録原稿規程によれば投稿中の論文はそれで代用してさしつかえないということなのでそうさせていただくこととしそこで触れられていない事を補足したい。

問題は $S^{(m)}, T^{(n)}$ $(m \geq n)$ を次数 m, n の half-integral な正則行列とし素数 p に対し局所密度

$$\alpha_p(T, S) = \lim_{t \to \infty} (p^t)^{n(n+1)/2 - mn} \# \{ C \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z}) \mid p^{-t}(S[C] - T) \text{ が half-integral} \}$$

の値を具体的に求める事及びその性質を調べる事である。これは不定方程式 $S[X] = T$ を $X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ で解くことと密接に結びついており，従って Siegel の Eisenstein 級数のフーリエ係数とも結びつく量である。局所密度 $\alpha_p(T, S)$ を帰納的に求める方法はいくつかあるがどれを使ってもいざ具体的にやってみようと思ってやってみるとかなり大変である。特に T が p の中でどんどん割れていく場合その複雑さが中級数

$$\sum_{r \geq 0} \alpha_p(p^r T, S) x^r \quad \text{------}(\#)$$

が有理式になる程度だということを $S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1_n\\1_n&0\end{pmatrix}$ について示したのがここでの結果で S の特殊性によってその分母も具体的にわかる。欧文の予稿の最後に一般の S についても(#)が x の有理式となるだろうと書いたのですがその事自体は佐藤文広氏によって p-adic analysis の応用として解かれましたが分母子の次数はわからないとの事です。しかし分母は n と m にのみよるある多項式でとれるだろうと思っています。
確かに $n=1,2$ ではそうなっています。多分それは $\alpha_p(T,S)$ を Gauss 和でかいて Dirichlet 級数の形にして欧文にある様な方法で出来るのではないかと思っています。なお対称行列でなく交代行列の場合は佐藤－広中両氏によって局所密度自身組合せ論的な量で表わされそれによって(#)に対応する級数も有理式になる事が示されその分母を具体的に与えることもなされています。

global な問題との関係で重要なのは

$$\liminf_{i\to\infty}\alpha_p(T_i,S)>0$$

となるための T_i についてのよい十分条件を与えることです。
これについては $m\geq 2n+3$ ならば "$\alpha_p(T,S)\neq 0$ ならば $\alpha_p(T,S)>k(S)\,(>0)$ となる" ことはわかっており $m\leq 2n+2$ の場合が問題となります。