

Banach 空間上の位相的性質

香川大教育 岡田順直 (Toshinao Okada)

Banach 空間の位相的性質を研究することは、Banach 空間論の主要な研究テーマの一つであると思われる。ここでは、よく知られているいくつかの位相的性質と、最近 Edgar と Wheeler によって得られた結果の簡単な紹介をおこめたいと思います。

§1. 準備

以後空間はとくに断わりがなければ、すべて実数 \mathbb{R} 上の Banach sp. とする。linear form $x^*: X \rightarrow \mathbb{R}$ に対しては、 x^* の連続性と x^* の有界性 ' $\exists \gamma > 0$ s.t. $\forall x \in X, \|x^*(x)\| \leq \gamma \|x\|$ ' とは一致する。このとき、 $\|x^*\| = \inf \{ \gamma : \|x^*(x)\| \leq \gamma \|x\| \} = \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)|$ を x^* のノルムという。 X^* を X 上の bdd. l.f. の全体とすれば、上で定義したノルムによって X^* は又 Banach sp. とする。 X^* を X の dual sp. という。同様にして、 X^* の dual sp. $(X^*)^* = X^{**}$, X^{**} の dual sp. X^{***} 等が次々と考えられる。

< weak top. について > X^* の任意の finite subset $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$, および任意の $\varepsilon > 0$ に対して,
 $\{x: |x(x_i^*)| < \varepsilon, i=1, \dots, n\}$ の形の集合の全体を O -nbd. base とする位相を X 上の weak top. といって (X, weak) と表わす。また, X の任意の finite subset $\{x_1, \dots, x_n\}$, および任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{x^*: |x^*(x_i)| < \varepsilon, i=1, \dots, n\}$ の形の集合の全体を X^* の O -nbd. base とする位相を X^* 上の weak* top. といって (X^*, weak^*) とかく。 B_X を X の closed unit ball ($\{x: \|x\| \leq 1\}$) とする。このとき,
 $(B_X, \text{weak}|_{B_X})$ を (B_X, weak) とかく。 (B_{X^*}, weak^*) も同様。

< quotient sp. について > X の closed subsp. Y に対して, その quotient sp. を X/Y とする。
 $\hat{x} \in X/Y$ に対して, $\|\hat{x}\| = \inf\{\|x\|: x \in \hat{x}\} = \inf\{\|x+y\|: y \in Y\}$ によって, \hat{x} のノルムを定めれば, X/Y もこのノルムによって Banach sp. とする。 X の任意の subset A に対して,
 $A^\perp = \{x^* \in X^*: x^*(a) = 0, \forall a \in A\}$, X^* の任意の subset B に対して, $B_\perp = \{x \in X: x^*(a) = 0, \forall x^* \in B\}$ とおくと,
 quotient sp. と dual sp. に関して次の性質が成り立つ。

$$(1.1) \quad Y^* = X/Y^\perp, \quad (X/Y)^\perp = Y^\perp$$

< direct sum について > $X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2)$ に対

して、 $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ によってノルムを定めれば、 $X_1 \times X_2$ は Banach sp. となる。この Banach sp. を X_1, X_2 の direct sum として $X_1 \oplus X_2$ とかく。

$$(1.2) \quad (X_1 \oplus X_2)^* = X_1^* \oplus X_2^*$$

$$\text{但し、} \|(x_1^*, x_2^*)\| = \max\{\|x_1^*\|, \|x_2^*\|\}.$$

$$(X_1 \oplus X_2)^{**} = X_1^{**} \oplus X_2^{**}$$

$$\text{但し、} \|(x_1^{**}, x_2^{**})\| = \|x_1^{**}\| + \|x_2^{**}\|.$$

§2 よく知られている位相的性質

各 $x \in X$ に対して、 $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$, $\forall x^* \in X^*$ と

定義すれば、 $\hat{x} \in X^{**}$ であって、 $\|x\| = \|\hat{x}\|$ (i.e. $\|x\| =$

$\sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(x)|$) とする。従って X は X^{**} の subsp. とみなせる。

(2.1) (B_{X^*}, weak^*) が metrizable である \iff
 X が (ノルムの意味で) separable である。

□ (証明の概略) (\leftarrow) X が separable より、

countable dense subset $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ が存在する。

このとき、 $\forall x^*, y^* \in B_{X^*}$,

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x^*(x_n) - y^*(x_n)|}{1 + |x^*(x_n) - y^*(x_n)|} \quad \text{と定め}$$

ればよい。

(\rightarrow) (B_{X^*}, weak^*) を metrizable とすれば、0 の countable nbd. base $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ が存在する。このとき、 $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{x^*: |x^*(x_i)| < 1, x_i \in F_n\}$ (F_n は X の finite subset)

であるとしておいてよい。 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とすれば、 $X = \overline{\text{span} F}$
 ($\text{span} F$ は F によつてはらわれる最小の subsp. i.e.
 $\text{span} F = \{ \sum_{i=1}^n d_i x_i : x_i \in F, d_i \in \mathbb{R} \}$)。従つて X は separable
 である。

(2.2) (B_X, weak) が metrizable である \Leftrightarrow
 X^* が separable である。

□ (\leftarrow) (2.1) によつて $(B_{X^{**}}, \text{weak}^*)$ は
 metrizable である。 (B_X, weak) は $(B_{X^{**}}, \text{weak}^*)$ の subsp.
 より、 (B_X, weak) は metrizable である。

(2.3) X が separable である \Leftrightarrow (X, weak)
 が separable である。

(2.4) (X, weak) は countable tightness をも
 つ。 i.e. $A \subset X, x \in w\text{-cl} A \rightarrow \exists$ countable set $D \subset A$ s.t.
 $x \in w\text{-cl} D$ 。

□ (B_{X^*}, weak^*) は compact である。(2.6より)
 (X, weak) は $C_p(B_{X^*})$ の subsp. より、 (X, weak) は
 countable tightness をもつ。

(2.5) (Eberlein-Šmulian の定理)
 A は (X, weak) の closed subset とする。 A が sequentially
 compact である $\Leftrightarrow A$ が compact である。

(2.6) (Alaoglu の定理)

(B_{X^*}, weak^*) は compact である。

□ X' を X 上の l.f. の全体とすれば、 X' は \mathbb{R}^X の closed subset であるから、 $B_{X'} = \{x' \in X' : |x'(x)| \leq 1, x \in B_X\}$ とすれば、 $B_{X'}$ は X' 上の weak^* top. で compact とする。

一方、 $B_{X'} = B_{X^*}$ より (B_{X^*}, weak^*) は compact である。

(2.7) B_X は $(B_{X^{**}}, \text{weak}^*)$ で dense である。

□ $w^*\text{-cl } B_X \subsetneq B_{X^{**}}$ とする。 i.e. $\exists x_0^{**} \in B_{X^{**}}$ s.t. $x_0^{**} \notin w^*\text{-cl } B_X$ とすると、

$\exists x^* \in X^*$ s.t. $x_0^{**}(x^*) > \sup\{|x^{**}(x^*)| : x^{**} \in w^*\text{-cl } B_X\}$

このとき、 $x_0^{**}(x^*) \leq \|x^*\| \|x_0^{**}\| \leq \|x^*\|$ 。

一方、 $\sup\{|x^{**}(x^*)| : x^{**} \in w^*\text{-cl } B_X\} \geq \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\} = \|x^*\|$ 。

これは矛盾である。

< reflexive sp. について >

定義. X が reflexive sp である $\Leftrightarrow X = X^{**}$ 。

例. (数列空間)

(i) $c_0 = \{(a_n) : \lim a_n = 0\}$ (0 に収束する seq の全体)。

$\|x\| = \sup |a_n|$ で $\|\cdot\|$ を定めれば、separable Banach sp. とする。

(ii) $1 \leq p < \infty$ なる実数 p に対して、 $l_p = \{(a_n) : \sum |a_n|^p < \infty\}$ 。

$\|\cdot\|$ $\|x\| = (\sum |a_n|^p)^{1/p}$ によつて、separable Banach

sp. となる。

(iii) $l_\infty = \{(a_n) : \text{bdd seq}\}$. $\|x\| = \sup |a_n|$ とすれば, l_∞ は Banach sp. となるが, separable ではない。このとき, $C_0^* = l_1$, $l_1^* = l_\infty$, $1 < p < \infty$ のとき, $l_p^* = l_q$ (但し $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)。従って, $1 < p < \infty$ のとき, l_p は reflexive sp. となるが, C_0, l_1, l_∞ は reflexive sp. ではない。

(2.8) X が reflexive である $\Leftrightarrow (B_X, \text{weak})$ が compact である。

□ (\rightarrow) 2.6 より (\leftarrow) 2.7 より

なお, §1, §2 の詳細については, [2], [5] を参照されたい。

§3 Edgar and Wheeler の結果について

§2.2.8 よりもし X が separable Banach sp. ならば, (B_X, weak) は compact metrizable sp. になる。従って, 次のような問題が自然に生ずる。

問題. どのようなとき, (B_X, weak) は complete metrizable sp. になるか?

定義. (i) completely regular Hausdorff sp. T が Čech complete である \Leftrightarrow 次の性質をもつ open covering の seq $\{U_n\}$ が存在する; finite

intersection property をもつ closed set の family \mathcal{F} で、 \mathcal{F} が任意の n に対して \mathcal{U}_n -small (i.e. $\exists F_n \in \mathcal{F}$, $\exists U_n \in \mathcal{U}_n$ with $F_n \subset U_n$) ならば、 $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

このとき、 T が Čech complete であることと T の任意の compactification において T が G_δ -set であることは同値である。

(ii) top. sp. T が Polish sp. である $\iff T$ が separable complete metrizable sp. である。

(iii) Banach sp X が Čech complete ball をもつ $\iff (B_X, \text{weak})$ が Čech complete sp である。

(iv) Banach sp X が Polish ball をもつ $\iff (B_X, \text{weak})$ が Polish sp である。

例. (James tree sp JT) [4]

$T = \{(n, i) : n = 1, 2, \dots, 0 \leq i < 2^n\}$ とする。

$(m, j), (n, i) \in T$ に対して、順序 $(m, j) \geq (n, i)$ を次のように定める; $m > n$ で $\exists i_0 = i, i_1, \dots, i_k = j$ (但し $k = m - n$) s.t. $i_1 \in \{2i, 2i+1\}$, $i_2 \in \{2i_1, 2i_1+1\}$, \dots , $i_k \in \{2i_{k-1}, 2i_{k-1}+1\}$.

index の集合 $\{(n, i), (n+1, i_1), \dots, (m, j)\}$ を segment という。James tree sp JT とは次の集合。

$JT = \{x : T \rightarrow \mathbb{R} \mid \|x\| = \sup \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{(n,i) \in \delta_j} x(n,i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) < \infty\}$ である。

但し、 \sup_n は pairwise disjoint segment $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ のすべてを動かす。

$e_{n,i} \in JT$ ($n=0, 1, 2, \dots, 0 \leq i < 2^n$) とは、 $e_{n,i}(e_{m,j}) = \delta_{n,m} \delta_{i,j}$ により、 JT の元とする。 $f_{n,i} \in JT^*$ とは、 $f_{n,i}(e_{m,j}) = \delta_{n,m} \delta_{i,j}$ により、 JT^* の元とする。このとき、 $\{f_{n,i} : n=0, 1, 2, \dots, 0 \leq i < 2^n\}$ の norm closed linear span を B とすると $B^* = JT$ とする。このとき、(1) JT は Polish ball をもたない。(2) JT^* は Čech complete ball をもたない。(3) B は Polish ball をもつ。(4) B と JT^*/B は Čech complete ball をもつ。

Proposition 3.1. Banach sp X において、次の条件は同値である。(1) (B_X, weak) は Čech complete である。(2) $B_{X^{**}} - B_X$ は weak^* σ -compact である。(3) X は (X^{**}, weak^*) で G_δ -set である。(4) $X^{**} - X$ は weak^* σ -compact である。

□ 2.6 により、 $(B_{X^{**}}, \text{weak}^*)$ は compact で 2.7 から B_X は $(B_{X^{**}}, \text{weak}^*)$ で dense であるから、(1) と (2) の同値がえられる。

Lemma 3.2. X が Čech complete ball をもつ separable Banach sp であるならば X^* は separable である。

□ 3.1.によつて、 $X = \bigcap U_n$ とする X^{**} の weak* open subset $U_n (n=1, 2, \dots)$ が存在する。 U_n は 0-nbd であるから、weak top の定義より X^* の finite set F_n が定まる。 X が separable より、 (X^*, weak^*) は separable であるから、countable dense subset D が存在する。

$D \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n (\subset X^*)$ の norm closed linear span を Y とすると、 $Y^\perp = \{0\}$ 。故に $Y = X^*$ 。従つて X^* は separable である。

Corollary 3.3. X が Polish ball をもつ \Leftrightarrow
 X が separable かつ Čech complete ball をもつ。

Theorem 3.4. Banach sp X が Čech complete ball をもつ $\Leftrightarrow X$ が $R \oplus S$ に isomorphic である。

但し、 R は reflexive sp で S は Polish ball をもつ Banach sp である。

□ (\rightarrow) $(X, \text{weak}) \approx (R, \text{weak}) \times (S, \text{weak})$ より (B_X, weak) は $(B_R, \text{weak}) \times (B_S, \text{weak})$ の closed subset である。 $(B_R, \text{weak}), (B_S, \text{weak})$ は Čech complete より (B_X, weak) は Čech complete である。

(\leftarrow) 3.2. のように $\{U_n\}$ と $\{F_n\}$ を定める。 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n (\subset X^*)$ の closed linear span を G とおく。 B_{G^\perp} は (X^{**}, X^*) -compact であるから、 $R_1 = G^\perp$ は X の reflexive subsp である。 $(X/R_1)^* = G$ は separable より X/R_1 は separable sp

となる。従って、 $\exists S_1$: separable subsp of X s.t. $X = R_1 + S_1$.
 故に、 X は W.C.G. (i.e. \exists weak compact subset A s.t. $\overline{\text{span}A} = X$)
 となるから、Amir and Lindenstrauss の定理 [1] に
 従って、 $S_1 \subset S$, $X = R \oplus S$ なる separable subsp S が存在する。
 従って、 $R = X/S = X/S_1/S_1 = R_1/S_1$ より R は reflexive sp
 である。一方、 S は separable で Čech complete ball をも
 つから 3.3. より S は Polish ball をもつ。

例. C_0 は separable dual をもつが、Polish ball
 をもたない。 $A_n = \{x = (x_k) : |x_k| \leq \frac{1}{2}, \forall k \geq n\}$ は closed で
 nowhere dense subset として $C_0 = \bigcup A_n$ より明らかな
 る。

Theorem 3.5. separable Banach sp X におい
 て次の条件は同値である。

- (1) (B_X, weak) は complete metrizable である。
- (2) (B_X, weak) は Polish sp である。
- (3) X は性質 (P.C) をもち、Asplund sp である。
- (4) (B_X, weak) は metrizable で任意の closed subset は
 Baire sp である。 (証明 略)

上の定理 3.5. は最初に述べた問題の解答である。なお、
 つき続いて、R.N.P., P.C, angelic sp 等の議論を用い
 て、更に詳しい結果や応用が得られている。

References

- [1] D. Amir and J. Lindenstrauss, The structure of weakly compact sets in Banach spaces, *Annals of Math.*, 88 (1968) 35-46.
- [2] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience, 1957.
- [3] G. A. Edgar and R. F. Wheeler, Topological properties of Banach spaces, *Pacific J. Math.*, 115 (1984) 317-350.
- [4] J. Lindenstrauss and C. Stegall, Examples of separable spaces which do not contain ℓ^1 and whose duals are non-separable, *Studia Math.*, 54 (1975) 81-105.