数理解析研究所講究録
第584巻 1986年 109-126

Proper Forcing Axiom 入門

静岡大教養　玉野 研一 (Ken-ichi Tamano)

§1. Introduction

ある問題を解こうとする。もし，それがZFC
(= Zermelo Fraenkel集合論に選択公理を加えたもの
= 私達が通常用いている数学的手法)の範囲で解けそうもない気配がしてきたら，1つの解決方法は，自分に能力ががなかったのだと，あきらめることである。しかし，まだ，救いの道は残されている。その1番初歩的なものとして，ZFCの範囲で正しいかどうかは決定できないが，成立してもおかしくないと思われる公理群を適用してみる方法がある。連続体仮説(CH)と，Martinの公理(MA)が代表的である。ここでは，MAによって，正確にはMA(ω_1)と呼ばれるものをさす。したがってMAのもとではCHは成立していないことに注意しておく。

さて，いま仮りに，CHを適用してみたとしよう。

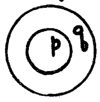
失敗したとしても，まだあきらめる必要はない。もっと強力な公理，例えば◇とかV＝Lがあるからである。ところが MAに対しては，今までそれより強い公理が考えられてこなかった。最近，ShelahとBaumgartnerによって開発された proper forcing axiom（PFA）は，その穴をうめるものである。彼らの努力により，PFAは，general topologyの問題に対しても，かなり強力な武器となることがわかってきた。

本稿の目的は，proper forcing axiomと，その general topologyへの応用の概説である。内容は，Baumgartner［3］と，Mill［6］の話題を中心とする。

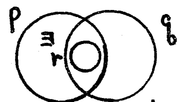
本稿を読まれ，実際にPFAを使ってみようと思われた方は，まず，Kunen［4］で，forcingの基本を学び，それから，Baumgartner［3］を読まれるとよい。Forcingをさらに進んで学びたいと思われる方は，Baumgartner［2］や，Shelah［7］をお勧めする。Topologyへの応用については，Handbook of Set-Theoretic Topology［5］に数多くの surveyがある。集合論の勉強には，抽象的なものを，直観的，具体的につかもうとする，かなりの努力と根気が必要であるが，その苦しみを乗り越えたら，そこに広大な世界が開けているのをまのあたりにすることができるだろう。

§2. Partially ordered set

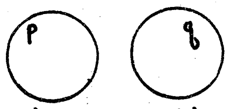
Partially ordered set に関する用語をまとめておこう。

$P=(P,\le)$ を partially ordered set (p.o.) とする。$p,q\in P$ に対して、$p\le q$ のとき、p は q の extension であるといい、図では 

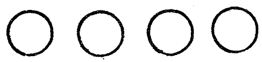
と表す。すなわち、p,q を集合とみなし、包含関係 $p\subseteq q$ の図を書くのである。



compatible



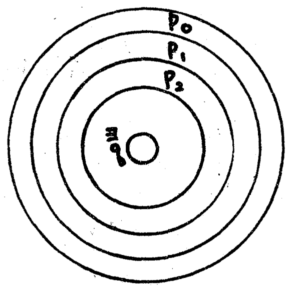
incompatible


antichain

p,q に共通の extension r があるとき、p,q は compatible であるといい、そうでないとき、incompatible であるという。

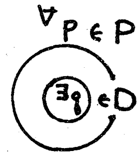
$A\subseteq P$ が、pairwise incompatible のとき、A を antichain と呼ぶ。

任意の antichain $A\subseteq P$ が高々可算集合であるとき、P は countable chain condition (c.c.c.) をみたすという。



$p_0\ge p_1\ge p_2\ge\cdots$ をみたす任意の可算列 $\{p_n\}\subseteq P$ に対して、$q\in P$ で、任意の n に対して $p_n\ge q$ となるものが存在するとき、P は countably closed であるという。

$D\subseteq P$ は、任意の $p\in P$ に対して、



$q \leq p$ となる $q \in D$ が存在するとき、<u>dense</u> であるという。

$G \subseteq P$ は、次の2つの条件をみたすとき、<u>filter</u> という。

(1) 任意の $p, q \in G$ に対して、$r \leq p, q$ をみたす $r \in G$ が存在する。

(2) 任意の $p, q \in P$ に対して、$p \leq q$ で、$p \in G$ ならば $q \in G$。

§3. Proper partially ordered set

PFA は、proper partially ordered set を用いて定義される。Proper p.o. は、集合論の言葉を用いれば、generic extension におけるある stationary 性の保存として、非常に自然で、しかもすっきりとした定義ができる。しかし、ここでは集合論の道具を用いない定義を採用する。

P を p.o. とする。2人の player による次の game を考える。0回戦では、まず player I が $p_0 \in P$ を選ぶ。P の要素を選ぶのは、このときだけである。さらに player I は、maximal antichain $A_0 \subseteq P$ を選び、次に player II が A_0 の

可算部分集合 B_0^0 を選ぶ。1回戦では、player I がまず、maximal antichain $A_1 \subseteq P$ を選び、次に、player II が、A_0 の可算部分集合 B_0^1 と、A_1 の可算部分集合 B_1^1 を選ぶ。2回戦では、player I がまず、maximal antichain $A_2 \subseteq P$ を選び、次に player II が、A_0 の可算部分集合 B_0^2、A_1 の可算部分集合 B_1^2、A_2 の可算部分集合 B_2^2 を選ぶ。...... 以下、同様にこの操作を続ける。

さて、ここで、もし、ある $q \leq p_0$ が存在して、任意の i に対して $B_i = \bigcup \{ B_i^n : n \geq i \}$ が predense below q となるとき、player II の勝ちとする。ここで、一般に、$p \in P$ と $A \subseteq P$ に対して、A が <u>predense below</u> p とは、p の任意の extension q が、ある $r \in A$ と compatible であるをいう。

この game で player II が winning strategy をもつとき、P は <u>proper</u> であるという。

<u>例.</u> P は、次のいずれかの条件をみたせば、proper である。

(a) P は countable chain condition をみたす。

(b) P は countably closed である。

§4. Martin's axiom と proper forcing axiom

MAに対して，PFAは，countable chain condition をみたす p.o. を，proper p.o で置きかえたにすぎない。ただし，ここで言うMAとは，正確には $MA(\omega_1)$ と呼ばれるものである。

<u>Martin's axiom (MA).</u>　P が，countable chain condition をみたす p.o. ならば，P の dense subset の任意列 $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ に対して，すべての D_α と交わる filter $G \subseteq P$ が存在する。

<u>Proper forcing axiom (PFA).</u>　P が，proper p.o. ならば，P の dense subset の任意列 $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ に対して，すべての D_α と交わる filter $G \subseteq P$ が存在する。

§3 例より，countable chain condition をみたす p.o. は，proper なので，PFAはMAより強い公理であることがわかる。

§5. PFAの無矛盾性と位置

<u>定理</u>. ZFC+「supercompact cardinalの存在」が無矛盾ならば、ZFC+「$2^{\aleph_0}=\aleph_2$」+PFAは無矛盾である。

Supercompact cardinalは、非常に大きなcardinalであり、その存在の無矛盾性は、measurable cardinalと同様、ZFCの範囲では決定できない。したがって必ずしもPFAが無矛盾だとはいいきれないのであるが、PFAを用いて証明された命題は、今までのところ、すべて、複雑なiterated forcingによる方法を用いれば、ZFCと無矛盾であることがわかっている。当面、PFAは無矛盾だと思っていて、さしつかえないだろう。

<u>位置</u>

PFA $\longrightarrow$ TOP (Thinning out principle) $\longrightarrow$ S-spaceの非存在 (§8(A))

PFA $\longrightarrow$ MA(ω_1) $\longrightarrow$ CHの否定

PFA $\longrightarrow$ MA(ω_2)の否定

PFA $\longrightarrow$ κ, λ: regular cardinal $\kappa \leqq \lambda$のとき $G(\kappa, \lambda)$をみたせば $\kappa=\omega$, $\lambda \geqq \omega_2$ または $\kappa=\lambda=\omega_1$ $\longrightarrow$ Compactificationの種々の結果 (§8(B))

§6. Generic extension とPFA

VをZFC集合論の可算モデルとする。理論体系は，もし，それが無矛盾であれば，必ず可算モデルをもつことに注意しておこう。これは，我々が使用できる言語全体の可算性と関連している。

さて，$P \in V$をp.o.とするとき，filter $G \subseteq P$で，Pの任意のdense subset $D \in V$と交わるものが存在することが知られている。このようなGを，P-<u>generic</u> <u>over</u> Vと呼ぶ。このときVの<u>generic</u> <u>extension</u> $V[G]$を，

$V \cup \{G\} \subseteq V[G]$で，集合論的操作について閉じているZFCの最小のモデルと定義する。Partially ordered set Pの選び方により，$V[G]$は，さまざまな性質をみたすモデルとなる，Pの選び方の効果を調べるための主要な武器は，<u>forcing</u>と呼ばれる手法である。そのため，generic extensionを用いて，ある条件をみたすモデルを作り，その条件の無矛盾性を示すことも，forcingによる手法と呼ばれることが多い。

いま，$P \in V$をp.o.，GをP-generic over V，$Q \in V[G]$をp.o.，HをQ-generic over $V[G]$とするとき，あるp.o. $P * \dot{Q} \in V$を定義して，$P * \dot{Q}$を用いたgeneric extension により、$V[G][H]$ の効果が得られるようにできる。直観的に言えば、$P * \dot{Q}$ は、P と Q の両方の効果を同時に生みだす。PFA の応用には、次の定理が不可欠である。

<u>定理</u>. P が V の proper p.o. で、$\dot{Q}$ が $V[G]$ の proper p.o. ならば、$P * \dot{Q}$ は V の proper p.o. である。

§7. PFAの使用法

Topology への応用法は、少し複雑なので、ここでは、実数直線 R の部分集合の順序同型問題を例にとり、解説することにしよう。よく知られているように、R の dense な可算部分集合は、すべて、有理数全体の集合 Q と順序同型である。そこで、可算濃度の濃度 $\aleph_1$ への拡張を試みる。部分集合 $A \subseteq R$ は、任意の区間との交わりの濃度が $\aleph_1$ であるとき、<u>$\aleph_1$-dense</u> であるという。

<u>問題</u>. R の $\aleph_1$-dense な部分集合は、すべて、順序同型であるか？

連続体仮説CHのもとでは、答えはNoである。例えば、$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}-\{0\}$ は、ともに $\aleph_1$-dense な部分集合だが、順序同型ではない。CHを仮定すれば、順序同型でない、$\aleph_1$-dense な $\mathbb{R}$ の部分集合をたくさん作れることが証明できる（[1]）。

これに反して、Baumgartnerは、次の定理を証明した。

<u>定理.</u> PFAを仮定すれば、$\mathbb{R}$ の $\aleph_1$-dense な部分集合は、すべて順序同型である。

（証明のアウトライン） V をZFC+PFAの可算モデルとし、我々は V に住んでいると考える。

まず、V で、partially ordered set $P=\{f:$ f は $\omega_1=[0,\omega_1)$ の部分集合を定義域とし、$2^\omega=\{0,1\}^\omega$ を値域とする1対1写像(=単射)$\}$ を考える。ここで、順序は、f が g の拡張であるとき $f\leq g$ と定義する。このとき、P は、countably closedであり、G を P-generic over V とすれば、$V[G]$ は連続体仮説CHをみたす。実際、$\varphi=\cup G:\omega_1\to 2^\omega$ を考えると、$\varphi\in V[G]$ であり、φ は ω_1 から 2^ω へのbijectionを与える。

次に、V[G]で、countable chain conditionをみたすpartially ordered set Qを、もしHがQ-generic over V[G]ならばいつでもV[G][H]の中に、A、B間の順序同型が存在するようにとる。これには、V[G]がCHをみたすことを用いる。

最後の仕上げには、手品のような次の補題を用いる。遠い世界を旅して、もし、宝物がみつかったら、実は、あなたの家に、それと同じくらい大切なものがあるのですよという主張である。

補題. Vは、PFAをみたすモデルとする。A、B∈Vを濃度$\aleph_1$の全順序集合とする。もし、$P * \dot{Q}$がproperで、V[G][H]の中に順序同型 $f : A \to B$ が存在すれば、ある順序同型 $g : A \to B$ がVの中に存在する。

定理の証明にもどろう。P、Qは、§3例より、ともにproper p.o.なので、§6定理を用いると、$P * Q$もproperである。したがって、上の補題が使えて、我々の世界Vの中に、A、B間の順序同型が存在する。

§8. Topologyへの応用

(A). S-space. L-space問題

空間Xは．任意の部分集合がseparable (Lindelöf) のとき．hereditarily separable (hereditarily Lindelöf) という。距離空間など．我々が考える様々な空間で．この2つの概念は一致しているので．ひょっとしたら全く同値な性質なのではないかということが．古くから問題になっていた。

正則空間Xは．hereditarily separableだが hereditarily Lindelöf でないとき S-space．hereditarily Lindelöf だが hereditarily separable でないとき L-space という。上記の問題は．正則空間に限れば．次のように言い換えられる。

<u>問題1.</u>　S-spaceは存在するか？

<u>問題2.</u>　L-spaceは存在するか？

1935年に．Kurepaは．L-spaceが存在することがZFCと無矛盾であることを示した。かなりたって．1972年に．Rudinは．S-spaceの存在の無矛盾性を証明した。彼ら

は、共に、Suslin lineを用いて求める空間を構成している。最近、S-space、L-spaceに関する研究がさかんになっており、多くの研究者によって、さまざまな良い性質を備えたS-space、L-spaceの存在の無矛盾性が証明されている。

一方、存在しないことの無矛盾性に関しては、1981年に、ようやく、Todorčevićによって、S-spaceの非存在の無矛盾性が示された。その証明法は、iterated forcingによる複雑な手法だったが、その直後に、Baumgartnerは、PFAを仮定すれば、S-spaceの非存在が証明できることを示した。そして、さらに、Baumgartnerは、もっと弱い条件でも証明できることを示した。すなわち、次の定理が成立する。

<u>定理</u>. MA + TOPを仮定すれば、S-spaceは存在しない。

ここで、TOP（Thinning Out Principle）とは、次の条件である。

（TOP）： A、$B \subseteq [0, \omega_1)$を非可算集合、$\langle S_\alpha : \alpha \in B \rangle$を任意の$\alpha \in B$に対して$S_\alpha \subseteq [0, \alpha)$をみたす集合族とする。さらに、任意の非可算集合$X \subseteq A$に対し

て，ある $\beta < \omega_1$ が存在して，$\{X \cap S_\alpha : \alpha > \beta\}$ が finite intersection property をみたすと仮定すれば，ある非可算集合 $X \subseteq A$ と，$Y \subseteq B$ が存在して，任意の $\alpha \in Y$ に対して，$X \cap [0, \alpha) \subseteq S_\alpha$ となる。

PFAからTOPが導かれることがわかっている。次の問題は，相変わらず，古典的大問題として残っている。

<u>問題.</u>　L-spaceの非存在は，ZFCと無矛盾か？

特に，PFAの仮定よりL-spaceの非存在が言えるかどうかが気にかかるところである。

(B).　自然数空間 ω の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\omega$

Mill [6] によれば，$\beta\omega$ は，3つの顔をもつ怪物である。連続体仮説CHを仮定したときの顔は，親しみやすく，ほほえみいっぱいの顔で，いろいろなことがすっきりとわかる。CHを否定したときの顔は，実に混乱していて，今まで信じていたことが急に信じられなくなる。何が正しく，

何が誤まりなのか断言できなくなる。最後の顔は、何も仮定しないZFCの顔だが、ZFCで何か新しい良い結果を得ようとすると、組合せ的議論を巧みに用いて、奴隷のように必死に働かなければならない。

CHを仮定した$\beta\omega$の議論では、次のParovičenkoの定理が基本的である。空間Xは、任意のcozero集合がC^*-embeddedのとき、F-spaceという。位相空間Xに対して、$X^* = \beta X - X$と定義する。

定理[CH]. 空間Xに対して、次は同値である。

(1) Xはω^*と同相である。

(2) Xはweightが$\mathfrak{c}$以下のコンパクト、0次元F-spaceで、Xの任意の空でないG_δ集合が内点をもつ。

DouwenとMillは、上記の定理が成立することと、連続体仮説CHが同値であることを示した。さらに、彼らは、明らかに同相だと予想される$(\omega\times(\omega+1))^*$と、$\omega^*$が、forcingを用いて作られたShelahのモデルで、同相でないことを示した。この2つの空間は、CHのもとでは、Parovičenkoの定理より同相であることがわかる。CHを仮定すれば、次の定理が成立する。

<u>定理</u> (Parovičenko) [CH]. Weightが$\mathfrak{c}$以下のどんなコンパクト空間もω^*の連続像である。

これに反して、Baumgartnerは、proper forcing axiomを用いて、次の定理を証明した。

<u>定理</u> [PFA]. Weightが$\mathfrak{c}$のコンパクト空間で、ω^*の連続像とはならないものが存在する。

その後、Millは、もっと弱い条件でも、そのようなものの存在が言えることを示した。

<u>定理</u> (Mill). MA($<\mathfrak{c}$)と、CHの否定と、$G(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$の否定を仮定すれば、weight $\mathfrak{c}$のコンパクト空間で、ω^*の連続像とはならないものが存在する。

ここで、MA($<\mathfrak{c}$)というのは、§4のMAの定義において、ω_1を任意の$\kappa < \mathfrak{c}$におきかえた条件が成立するという命題である。これをMAと記す場合も多い。また、κ, λをregular cardinalで、$\kappa \leq \lambda$としたとき、$G(\kappa, \lambda)$とは、次の命題をさす。

$G(\kappa, \lambda)$: ω^*のclopen setの列 $\langle U_\xi : \xi < \kappa \rangle$ と $\langle V_\xi : \xi < \lambda \rangle$ が存在して、次の4つの条件をみたす。

(1) $U_\xi \subset U_\eta \quad (\xi < \eta < \kappa)$

(2) $V_\xi \subset V_\eta \quad (\xi < \eta < \lambda)$

(3) $(\bigcup_{\xi<\kappa} U_\xi) \cap (\bigcup_{\xi<\lambda} V_\xi) = \phi$

(4) $\overline{(\bigcup_{\xi<\kappa} U_\xi)} \cap \overline{(\bigcup_{\xi<\lambda} V_\xi)} \neq \phi$

次の定理が、Baumgartnerにより示されている。

<u>定理</u> [PFA]　$G(\kappa, \lambda)$ が成立するregular cardinal κ, λ で $\kappa \leq \lambda$ となるものは、$\kappa = \omega$, $\lambda \geq \omega_2$ となる場合と、$\kappa = \lambda = \omega_1$ となる場合しかない。

この定理より、PFAを仮定すれば、$\omega_1 < \mathfrak{c}$ に注意すると、$G(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ が成立しないことがわかる。したがって、PFAを仮定すれば、Millの定理の条件が導かれる。

$G(\kappa, \lambda)$ は $\beta\omega$ の研究にさまざまな役割を果たしている。詳しくは、Mill [6] を参照していただきたい。

REFERENCES

[1] J. E. Baumgartner, Order types of real numbers and other uncountable linear orderings, Ordered Sets, Proc. Banff Conference, 1981, D. Reidel, Boston, 239-277.

[2] ________________, Iterated forcing, Surveys in Set Theory, London Math. Soc. Lecture Note Series 87, 1983, 1-59.

[3] ________________, Applications of the proper forcing axiom, Handbook of Set Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[4] K. Kunen, Set Theory, An Introduction to Independence Proofs, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[5] K. Kunen and J. E. Vaughan ed., Handbook of Set Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[6] J. van Mill, An introduction to $\beta\omega$, Handbook of Set Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[7] S. Shelah, Proper Forcing, Lecture Notes in Math. 940, Springer-Verlag, Berlin, 1982.