数理解析研究所講究録
第584巻 1986年 137-158

On Namioka Spaces.

岡山大理 吉岡 巖 (Iwao Yoshioka)

§0. 序.

二つの空間X, Yの直積$X\times Y$から空間Zへseparately continuousな関数$f: X\times Y \longrightarrow Z$が与えられているとしよう。その時$X\times Y$のあるnice set Pが取れて，その各点でfがjointly continuousになるための，空間X, Y, Zの条件および$X\times Y$におけるPの状態を決定する問題は1900年の初期より研究されてきたようであるが，その過程において1974年にI. Namioka[7]は，次節でのべるように，空間Xがある条件をみたす時，compact空間Yとmetric空間Zに対して，separately cont. $f: X\times Y \longrightarrow Z$は$X$のあるdense G_δ-set Aに対して$A\times Y$上の全ての点でfはjointly cont.になるという興味ある結果を示し同時に位相群や関数解析への応用を与えた。これ等の方面への応用も興味あると思はれるが，このnoteにおいては，Zはmetric空間として

空間 X と Y の条件を各々どこまで弱め得るかについて、Namioka の結果以後の研究を紹介する。

§1. Namioka の定理.

定義(1.1). X, Y, Z を空間とする。$f: X\times Y \longrightarrow Z$ について、$f(\ ,y): X \longrightarrow Z$ cont. for any $y\in Y$ and $f(x,\ ): Y \longrightarrow Z$ cont. for any $x\in X$ の時 f を separately continuous と云う。また $(x,y)\in X\times Y$ について、$f(x,y)$ の任意の近傍 $S[f(x,y)]$ に対して (x,y) の、$X\times Y$ における近傍 $U(x,y)$ が存在して、$f[U(x,y)]\subset S[f(x,y)]$ のとき f は (x,y) で jointly continuous という。

定義(1.2). 空間 X において open coverings の列 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、次の条件をみたす時 X を strongly countably complete という。

条件：X の closed sets の列 $F_1\supset F_2 \supset\cdots$ で，$F_n\subset G_n$ for some $G_n\in\gamma_n$ $(n=1,2,\cdots)$ ならば，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$。

定理(1.3) [7 ; Namioka の定理] X を strongly countably complete, regular 空間，Y を locally compact, σ-compact 空間，Z を metric 空間とし、$f: X\times Y \longrightarrow Z$ を separately cont. とする。そのとき X の dense G_δ-set A が存在して，$A\times Y$ の全ての点で f は jointly cont. である。

P. Kenderov [6] は1980年の論文で Namioka の定理を，形

式上少し一般化しているのでここに紹介する。

<u>定義(1.4)</u> Yを空間，(Z,d)をmetric空間とする。$C(Y,Z)=\{f \mid f:Y\longrightarrow Z \text{ cont.}\}$とし，この集合に各々pointwise convergence-topology, compact-open topology, sup-norm topologyを与えた空間を$C_p(Y,Z)$，$C_k(Y,Z)$，$C_n(Y,Z)$で示すことにする。(sup-norm topo.はYがcompactの時)

更に $d(f,g)=\sup\{d(f(y),g(y)) \mid y\in Y\}$ for $f,g\in C(Y,Z)$

$U(f,\varepsilon)=\{g\in C(Y,Z) \mid d(f,g)<\varepsilon\}$ for $f\in C(Y,Z)$, $\varepsilon>0$とし

$\{U(f,\varepsilon) \mid f\in C(Y,Z),\ \varepsilon>0\}$をbaseとする$C(Y,Z)$のtopologyを$C_u(Y,Z)$で示す。$Y$がcompact空間のとき$C_u(Y,Z)=C_n(Y,Z)$が成立している。

<u>Lemma(1.5)</u> X,Yを空間，(Z,d)をmetric空間とし，二つの条件(C_1), (C_2)を考える。

(C_1): 任意なseparately cont. $f:X\times Y\longrightarrow Z$に対して，$X$のdense G_δ-set Aが存在して，$A\times Y$の全ての点でfはjointly cont.

(C_2): 任意なcont. map $F:X\longrightarrow C_p(Y,Z)$に対して，$X$のdense G_δ-set Aが存在して，Aの全ての点で$F:X\longrightarrow C_u(Y,Z)$がcont.

このとき(C_2)ならば(C_1)が成立し，Yがcompact空間の時は逆も成立する。Kenderovは，空間X, Zが定理(1.3)と同

じとき，条件(C_2)が，従って(C_1)が成立するためのYの条件を次のごとく与えた。

<u>定理(1.6)</u>．[6]　Xをstrongly countably complete, regular空間，(Z,d)をmetric空間とし，空間Yに対して $F: X \longrightarrow C_p(Y,Z)$ cont. とする。このときYに関して下の条件(＊)がみたされているならば，Xのdense G_δ-set Aが存在して，Aの全ての点で$F: X \longrightarrow C_u(Y,Z)$がcont.

(＊)：Xのcountably compact set ΔとYのseparable closed set Y_1に対して，$\gamma_{Y_1}F(\Delta)$が$C_u(Y_1,Z)$のseparable setである。《但し　$\gamma_{Y_1}: C(Y,Z) \longrightarrow C_u(Y_1,Z)$は$\gamma_{Y_1}(f)=f|Y_1$: restriction on Y_1 of f for $f \in C(Y,Z)$ 》

更に彼は次の定理によってYがcompact空間の時，上の条件(＊)が満されることを示した。

<u>定理(1.7)</u>．[6]　Xはstrongly countably complete, regular空間，(Z,d)はmetric空間，Yをcompact空間とする。$F: X \longrightarrow C_p(Y,Z)$がcont.とするならば，定理(1.6)の(＊)がみたされる。

<u>[注]</u>：定理(1.7)に於いて，空間Yの条件を本質的に弱めることができるかどうかは不明であるが，Yがhemi-compact空間のとき定理(1.6)と類似の方法で次の結果を得たので，一応証明をのべておく。この結果から

Namioka の定理は直接の系として得られる。

定理(1.8) X を strongly countably complete, regular 空間, (Z,d) を metric 空間, Y を hemicompact 空間とし, $F: X \longrightarrow C_p(Y,Z)$ を cont. とする。このとき X の dense G_δ-set A が存在して, A の全ての点で $F: X \longrightarrow C_K(Y,Z)$ は cont.

注：上の結果は[7 ; Theorem 2.2]から直接示し得るので, Namioka の定理の一般化にはならない。

(定理(1.8) の証明)

Y は hemicompact であるから, 可算個の compact sets $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $K_n \subset K_{n+1}$, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ 更に Y の任意な compact set はある K_i の subset になっている。$f, g \in C(Y,Z)$ について

$$\rho_n(f,g) = \sup\{d(f(y), g(y)) \mid y \in K_n\}$$

$$\mu_n(f,g) = \min\{1/2^n, \rho_n(f,g)\} \qquad (n \in N)$$

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(f,g)$$

と定義すると, ρ によって $C_K(Y,Z)$ は metrizable であることが良く知られている。さて strongly countably complete の条件をみたす X の open coverings の列を $\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ とし, 各 $n \in N$ について,

$$H_n = \{x \in X \mid \delta(F(U)) (\equiv \text{diameter of } F(U) \text{ w.r.to } \rho) > \frac{1}{2^n}$$
$$\text{for any open set } U \ni x\}$$

とすると，各 H_n は X の閉集合であって，$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}(X-H_n)$ は X の G_δ-set となり，A の各点で $F: X \longrightarrow C_K(Y,Z)$ が連続になることは明らかである。従って各 H_n が nowhere dense in X であることを示せば証明は終る。そのために必要な次の Lemma を証明する。

Lemma: γ を X の open covering，$U_0 \subset X$ は X の open set で $U_0 \cap H_n \neq \phi$ なるものとするとき，X の open sets U_{00}, U_{01} と，一点 $y_0 \in K_{n+1}$ が存在して以下の条件をみたす。

(1) $\overline{U}_{00} \cup \overline{U}_{01} \subset U_0$, $\overline{U}_{00} \cap \overline{U}_{01} = \phi$

(2) $\overline{U}_{00} \subset G_{00}$, $\overline{U}_{01} \subset G_{01}$ for some $G_{0,0}, G_{01} \in \gamma$

(3) $d(F(x')(y_0), F(x'')(y_0)) > \frac{a}{n+1}$ for any $x' \in \overline{U}_{00}$, $x'' \in \overline{U}_{01}$

$$\left(a = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

(Lemma の証明) $U_0 \cap H_n \neq \phi$ より $\delta(F(U_0)) > \frac{1}{2^n}$，従って $x_0', x_0'' \in U_0$ があって，

$$1/2^n < \rho(F(x_0'), F(x_0'')) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i(F(x_0'), F(x_0'')) + \sum_{i=n+2}^{\infty} \mu_i(F(x_0'), F(x_0''))$$

$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i(F(x_0'), F(x_0'')) = A$, $\sum_{i=n+2}^{\infty} \mu_i(F(x_0'), F(x_0'')) = B$ とおくと

$$A > 1/2^n - B, \quad B \leq 1/2^{n+1} \text{ より } \quad A > 1/2^n - \frac{1}{2^{n+1}} = a$$

従ってある l $(1 \leq l \leq n+1)$ について，

$$a/_{n+1} < \mu_l(F(x_0'), F(x_0'')) \leq \rho_l(F(x_0'), F(x_0''))$$

であるから，$y_0 \in K_l \subset K_{n+1}$ が存在して

$$a/_{n+1} < d(F(x_0')(y_0), F(x_0'')(y_0)).$$

この時 $F: X \longrightarrow C_p(Y, Z)$ cont. より X の open sets $U_{00} \ni x_0'$, $U_{01} \ni x_0''$ と γ の元 G_{00}, G_{01} が存在して (1) (2) (3) をみたす。

さて，空でない open set $U_0 \subset H_n$ の存在を仮定するとき，γ_1 に対して Lemma (1)〜(3) をみたす X の open sets U_{00}, U_{01} と $y_0 \in K_{n+1}$ が存在する。続いて γ_2 と $U_{00} \subset H_n$ に関して Lemma の (1)〜(3) をみたす X の open sets U_{000}, U_{001} と $y_{00} \in K_{n+1}$ を得る。同様に γ_2 と $U_{01} \subset H_n$ に関して，U_{010}, U_{011} と $y_{01} \in K_{n+1}$ を得る。以下続けて X の open sets の族

$$\{U_{j_0 j_1 \cdots j_k} \mid j_0 = 0,\ j_i = 0 \text{ or } 1 \text{ for } 1 \le i \le k;\ k \in N\} \quad と$$

K_{n+1} の countable set

$$Q = \{y_{j_0 j_1 \cdots j_k} \mid j_0 = 0,\ j_i = 0 \text{ or } 1 \text{ for } 1 \le i \le k;\ k \in N\}$$

が取れて次の条件をみたす。

(4) $\overline{U}_{j_0 j_1 \cdots j_p \cdots j_k} \subset U_{j_0 j_1 \cdots j_p}$ if $p < k$

(5) $\overline{U}_{j_0 j_1 \cdots j_k} \subset G_{j_0 j_1 \cdots j_k}$ for some $G_{j_0 j_1 \cdots j_k} \in \gamma_k$

(6) $\{\overline{U}_{j_0 j_1 \cdots j_k} \mid j_0 = 0,\ j_i = 0 \text{ or } 1 \text{ for } 1 \le i \le k\}$: disjoint

(7) $j_i = j_i'\ (0 \le i \le k)$ and $j_{k+1} \neq j_{k+1}'$ ならば

$$d(F(x')(y_{j_0 \cdots j_k}), F(x'')(y_{j_0 \cdots j_k})) > a/n+1 \quad (x' \in \overline{U}_{j_0 \cdots j_k j_{k+1}},\ x'' \in \overline{U}_{j_0' \cdots j_k' j_{k+1}'})$$

さて $S = \{(j_i)_{i \ge 0} : \text{sequence} \mid j_0 = 0,\ j_i = 0 \text{ or } 1 : i \in N\}$ は uncountable set であって，任意の $s = (j_i)_{i \ge 0} \in S$ について，$\Delta(s) = \cap\{\overline{U}_{j_0 j_1 \cdots j_k} \mid k \ge 0\}$ とおくと $\Delta(s)$ は X の non-empty closed set となり，$\Delta = \cup\{\Delta(s) \mid s \in S\}$ は X の countably compact set である。次に

(8) $s=(j_i)_{i\geq 0},\ s'=(j_i')_{i\geq 0}\in S$ について，$j_i=j_i'$ $(0\leq i\leq k)$，$j_{k+1}=j_{k+1}'$ ならば，(7)より

$$d(F(x)(y_{j_0j_1\cdots j_k}),\ F(x')(y_{j_0j_1\cdots j_k}))>a/_{n+1}\quad (x\in\Delta(s),\ x'\in\Delta(s'))$$

が成立する。ここで写像 $X\xrightarrow{F}C_p(Y,Z)\xrightarrow{r_{\overline{Q}}}C_p(\overline{Q},Z)$ を考えると，$r_{\overline{Q}}F(\Delta)$ は $C_n(\overline{Q},Z)$ の separable subset でない事が示される。そのために

$$W(s)=\{g\in C(\overline{Q},Z)\mid \|g-h\|<a/_{2(n+1)}\ \text{for some}\ h\in r_{\overline{Q}}F(\Delta)\}\ (s\in S)$$

とおくと，$s=(j_i)_{i\geq 0}\neq s'=(j_i')_{i\geq 0}$ ならば(8)より $W(s)\cap W(s')=\phi$ が示せるから $\{W(s)\mid s\in S\}$ は uncountable open collection in $C_n(\overline{Q},Z)$ となり $r_{\overline{Q}}F(\Delta)$ は $C_n(\overline{Q},Z)$ の separable subset でない。一方 $r_{\overline{Q}}F$ は cont. で，$\overline{Q}$ は separable compact 空間であるから，定理(1.7)によって $r_{\overline{Q}}F(\Delta)$ は $C_n(\overline{Q},Z)$ の separable subset となり，この矛盾は H_n が nowhere dense in X を示す。

第二可算公理を満足する空間に関連しては，1979年に次の結果が得られている。

<u>定理(1.9)</u>［1］ X を空間，Y を第二可算公理をみたす空間，Z を metric 空間とし，$f:X\times Y\longrightarrow Z$ separately cont. とする時，X に於ける residual set A が存在して，$A\times Y$ の全ての点で，f は jointly cont. になる。

(但しAがresidual in Xであるとは，X−Aが，Xでnowhere dense setsの可算和になっている)

§2. Namioka空間.

1980年に入ってJ.P.R. Christensen[3, 4]は，Namioka空間の概念を定義した。

定義(2.1). Hausdorff空間XがNamioka空間であるとは，任意なcompact空間Yとmetric空間Zに対して，任意にseparately cont. $f: X\times Y \longrightarrow Z$が与えられたとき，Xのdense G_δ-set Aが存在して，$A\times Y$の全ての点でfはjointly cont.になることを言う。この定義において，metric空間Zの代りに，閉区間$[-1, 1]\subset R$にしても同値であることは後によって示されている。

Namiokaの定理より，strongly countably complete, regular T_1−空間はNamioka空間であるが，以後Christensen; S. Raymond.[8]; M. Talagrand[9]等によって，Namioka空間であるための，より弱い条件が研究されている。この節で，それ等の空間の定義と相互の関係で知られているところを述べておく。

定義(2.2) 空間Xの，どのようなopen dense sets in Xの列$\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$に対しても，$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$がXでdenseのとき，XをBaire空間と言う。

以下空間Xに topological game を定義するが，その前に記号を与える。$\mathcal{T}_X^* = \{U \mid X \supset U :$ non-empty open set in $X\}$, $\mathcal{K}_X \equiv \{K \mid X \supset K :$ non-empty compact set $\}$ とする。

定義(2.3) 空間Xに topological games G_T, G_O, G_K を定義する。最初にG_Tにおける play は二人の players α, β で行う。最初にβが，$U_1 \in \mathcal{T}_X^*$を取り，続いてαが，$V_1 \in \mathcal{T}_X^*$と$x_1 \in X$の組(V_1, x_1)を$U_1 \supset V_1 \ni x_1$であるように取る。続いてβが，$U_2 \in \mathcal{T}_X^*$を$U_2 \subset V_1$であるように取り，続いてαが，$V_2 \in \mathcal{T}_X^*$と$x_2 \in X$の組(V_2, x_2)を$U_2 \supset V_2 \ni x_2$であるように取る。以下これをくり返へす。この時 game G_Tにおいて，αの strategy $s = (s_n)_{n=1}^{\infty}$を

$$s_n : (\mathcal{T}_X^*)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^* \times X$$

$$s_n(U_1, \cdots, U_n) = [s_n^1(U_1, \ldots, U_n), s_n^2(U_1, \ldots, U_n)] \text{ with}$$

$$s_n^2(U_1, \ldots, U_n) \in s_n^1(U_1, \ldots, U_n) \subset U_n \quad (n \in N)$$

で与えるとき，任意の play : U_1, $s_1(U_1)$, U_2, $s_2(U_1, U_2)$, $\cdots$ について，$\{s_n^2(U_1, \ldots, U_n)\}_{n=1}^{\infty}$が$\bigcap_{n=1}^{\infty} s_n^1(U_1, \ldots, U_n)$内に cluster point を持つならば，$s$を winning strategy for α in game G_Tという。一方，βの strategy $t = (t_n)_{n=0}^{\infty}$を

$$t_0 \equiv U_1 \in \mathcal{T}_X^* \qquad t_n : (\mathcal{T}_X^* \times X)^n \longrightarrow \mathcal{T}^*$$

$$t_n((V_1, x_1), \cdots, (V_n, x_n)) \equiv U_{n+1} \subset V_n \quad (n \in N)$$

で与えるとき，任意の play : U_1, (V_1, x_1), U_2, (V_2, x_2), $\cdots$

について，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ 内に cluster point を持たないならば，t を winning strategy for β in game G という。

次に game G_σ における play は二人の players α, β で行い，game G における定義を「β が，$U_n \in \mathcal{T}_X^*$ を取った時，α が $V_n \in \mathcal{T}_X^*$ と $x_n \in X$ の組 (V_n, x_n) を $U_n \supset V_n$ であるように取る」と変えて得られる game を G_σ とする。このとき，α, β の各々 winning strategy in game G_σ は，game G の時に類似に定義される。

最後に game G_K に於ける play は二人の players α, β で行い，game G における定義を「β が，$U_n \in \mathcal{T}_X^*$ を取ったとき，α が，$V_n \in \mathcal{T}_X^*$ と $K_n \in \mathcal{K}_X$ の組 (V_n, K_n) を，$U_n \supset V_n$ であるように取る」と変えて得られる game を G_K とする。このとき α, β の各々 winning strategy in game G_K ; $s=(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $t=(t_n)_{n=0}^{\infty}$ は，

$$s_n : (\mathcal{T}_X^*)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^* \times \mathcal{K}_X$$
$$t_n : (\mathcal{T}_X^* \times \mathcal{K}_X)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^*$$

として，$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ の cluster point を考えることによって，game G の時と類似に定義される。

<u>定義(2.4)</u> 空間 X において，各々，game G で，game G_σ で，game G_K で，α が winning strategy を持っているとき，X を σ-well α-favorable，$(\sigma-\alpha)$-favorable，$(K-\alpha)$-favorable と呼び，各々，game G で，game G_σ で，

game G_Kで，βがいかなるwinning strategyも持たないとき，Xを σ-well β-defavorable, (σ-β)-defavorable, (K-β)-defavorable と呼ぶ。

更にG. Choquet [2]によって与えられたα-favorable空間の概念は次の定義で与えられる．

定義(2.5). 空間Xのtopological game G_0を定義する．playは二人のplayers α, βで行い，game Gに於ける定義を「βが，$U_n \in \mathcal{T}_X^*$を取った時，αが$V_n \in \mathcal{T}_X^*$を，$U_n \supset V_n$であるように取る」に変えて得られるgameをG_0とする．αのstrategy $s=(s_n)_{n=1}^{\infty}$ は $s_n : (\mathcal{T}_X^*)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^*$ $s_n(U_1,\ldots,U_n) \subset U_n$ で与えられて，任意のplay : $U_1, s_1(U_1), U_2, s_2(U_1,U_2), \cdots$ について $\bigcap_{n=1}^{\infty} s(U_1,\ldots U_n) \neq \phi$ のとき，sをwinning strategy for α in game G_0という。一方βのstrategy $t=(t_n)_{n=0}^{\infty}$は，$t_0 \equiv U_1 \in \mathcal{T}_X^*$, $t_n : (\mathcal{T}_X^*)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^*$ $t_n(V_1,\ldots,V_n) \subset V_n$ で与えられて，任意のplay : $U_1, V_1, t_1(V_1), V_2, t_2(V_1,V_2), \cdots$ について，$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \phi$ のとき，tをwinning strategy for β in game G_0という。game G_0において，αがwinning strategyを持つとき，Xをα-favorable，βがいかなるwinning strategyも持たないとき，Xをβ-defavorableと呼ぶ。

以上，topological gameによって定義される空間と

Namioka空間の関係は, Raymond, Talagrand によって, しらべられているので図示しておく。

$$\begin{tikzcd}
 & \text{locally compact} \arrow[d] & \\
 & \text{strongly countably complete, regular} \arrow[d] & \\
 & \sigma\text{-well } \alpha\text{-favorable} \arrow[d] \arrow[r] & \sigma\text{-well } \beta\text{-defavorable} \arrow[ldd] \\
\alpha\text{-favorable} \arrow[dddd] & (\sigma-\alpha)\text{-favorable} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[rdd] & \\
 & (\sigma-\beta)\text{-defavorable} \arrow[d] & \\
 & (K-\beta)\text{-defavorable} \arrow[d] & (K-\alpha)\text{-favorable} \arrow[l] \\
 & \text{Namioka空間} \arrow[d, "(+\text{ Tychonoff})"] & \\
\beta\text{-defavorable} \arrow[ruuu, bend left, "\begin{array}{c}(+\text{ separable})\\ \text{or}\\ (+\text{ metric})\end{array}"] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Baire 空間} &
\end{tikzcd}$$

Baire空間であって, Namioka 空間でない例は知られている。

<u>例(2.6)</u>[9] α-favorable Tychonoff 空間で, Namioka 空間でないものが存在する。

(証明) uncountable discrete 空間 : I を一つ考える.

$X = \{h \mid h : I \longrightarrow \{0, 1\}$ with $|h^{-1}(1)| \leq \aleph_0\}$ とする.

$h \in X$ と $J \subset I$: non-empty countable set について $W(h, J) = \{k \in X \mid k|J = h|J\}$ ($k|J$ = restriction on J of k) とし, $\{W(h, J) \mid h \in X ; J \subset I$: non-empty countable set$\}$ を open basis とする topology を X に与える。この時 X は,

Tychonoff space になることはよい。X は α-favorable であることを見る。

$U \in \mathcal{T}_X^*$ について，$h_U \in U$，$J_U \subset I$: countable non-empty set を各々固定する。この時 $U \supset W(h_U, J_U)$ をみたすようにする。game G_{10} における α の strategy $s = (s_n)_{n=1}^{\infty}$ を

$$s_n : (\mathcal{T}_X^*)^n \longrightarrow \mathcal{T}_X^* \quad s_n(U_1, \ldots, U_n) = W(h_{U_n}, J_{U_n}) \subset U_n$$

とする。この時，任意な play $U_1, s_1(U_1), U_2, s_2(U_1, U_2), \cdots$ について，$W(h_{U_n}, J_{U_n}) \supset W(h_{U_{n+1}}, J_{U_{n+1}})$．従って

$$J_{U_1} \subset J_{U_2} \subset \cdots \qquad ; \quad h_{U_{n+1}} | J_{U_n} = h_{U_n}$$

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{U_n} : \text{countable set of } I$$

今 $l \in X$ を $l(t) = \begin{cases} h_{U_n}(t) & \text{if } t \in J_{U_n} \\ 0 & \text{if } t \notin J \end{cases}$ と定義するとき，

$l \in \bigcap_{n=1}^{\infty} s_n(U_1, \ldots, U_n)$．従って X は α-favorable.

次に X は not Namioka 空間であることを見る．

I の Stone-Čech compactification βI を作って．

$$f : X \times \beta I \longrightarrow \{0, 1\} \subset [0, 1] \text{ を}$$

$(h, y) \in X \times \beta I$ について $f(h, y) = \beta y(h)$ と定義する。ここに $\beta h : \beta I \longrightarrow \{0, 1\}$ extension of h とする。

f が separately cont. を示す

$h_0 \in X$ については，$f(h_0, y) = \beta h_0(y) : \beta I \longrightarrow \{0, 1\}$ は連続

$y_0 \in \beta I$ については，次の二つの事が示される．

(A) $J \subset I$: non-empty countable set with $y_0 \in \overline{J}^{\beta I}$ ならば, $h \in X$, $k \in W(h, J)$ について $\beta h(y_0) = \beta k(y_0)$.

何故ならば, net $\{t_\alpha\} \subset J$ が存在して, $t_\alpha \longrightarrow y_0$ より $\beta h(t_\alpha) \longrightarrow \beta h(y_0)$, $\beta k(t_\alpha) \longrightarrow \beta k(y_0)$ 更に $\beta h(t_\alpha) = h(t_\alpha) = k(t_\alpha) = \beta k(t_\alpha)$ であるから $\beta h(y_0) = \beta k(y_0)$.

(B) $y_0 \notin \overline{J}^{\beta I}$ for any countable set $J \subset I$ ならば. $\beta h(y_0) = 0$ for any $h \in X$.

何故ならば, ある $h \in X$ について $\beta h(y_0) = 1$ とすると, βI に於ける, y_0 の近傍 W が存在して, $y \in W$ ならば, $|\beta h(y_0) - \beta h(y)| < 1/2$. このことは $\beta h(y) = 1$ for $y \in W$ を意味する。今 $J_0 = \{t \in I \mid h(t) = 1\}$ を考えると, $y_0 \in \overline{J_0}^{\beta I}$ となり矛盾する.

この事実より $f(h, y_0) = \beta h(y_0) : X \longrightarrow \{0, 1\}$ は連続である。

何故ならば $y_0 \in \overline{J}^{\beta I}$ for some countable set $J \subset I$ ならば, $h \in W(h, J)$ で, $k \in W(h, J)$ ならば $f(k, y_0) = \beta k(y_0) = \beta h(y_0) = f(h, y_0)$。反対に $y_0 \notin \overline{J}^{\beta I}$ for any countable set $J \subset I$ ならば, $h \in X$ で, $k \in X$ ならば $f(k, y_0) = \beta k(y_0) = 0 = \beta h(y_0) = f(h, y_0)$。

更に X の全ての h に対して, $y_h \in \beta I$ が存在して, f は (h, y_h) で not jointly cont. を示す。

もしある $h \in X$ に対して, 全ての $(h, y) \in \{h\} \times \beta I$ で f が

jointly cont. とするならば，βI の compact 性より，h の近傍 $W(h, J_h)$ が存在して，$k \in W(h, J_h)$ ならば

$$\frac{1}{2} > |f(k, y) - f(h, y)| = |\beta k(y) - \beta h(y)| \quad \text{for any } y \in \beta I$$

とできる。一方，$y_0 \in I - J_h$ を一つ固定するとき，$l \in X$ を

$$\begin{cases} l(y_0) \neq h(y_0) \\ l(t) = h(t) \quad \forall t \neq y_0 \end{cases}$$

なるものとすると，$l \in W(h, J_h)$ より

$$\frac{1}{2} > |\beta l(y_0) - \beta h(y_0)| = |l(y_0) - h(y_0)| = 1$$

これは矛盾である。従って X は Namioka 空間であり得ない。

[注] 例(2.6)より，Baire 空間が，どのような条件のもとで Namioka 空間になるか，良い条件を求めることは，一つの問題である。

§3. Talagrand の問題

M. Talagrand は，[9] に於いて，次の大変興味ある問題を提起した。

Problem：Y を compact 空間とする。このとき，全ての Baire 空間 X と全ての separately cont. $f: X \times Y \longrightarrow R$ に対して，X の dense G_δ-set A が存在して，$A \times Y$ の全ての点で，f が jointly cont. となるような Y は，どのような条件をみたすか。

この問題に対して，彼は同じ論文で，Y が Eberlein

compact空間であれば充分であることを示している。この後，G. Debs [5]は1985年のpreprintにおいて，より一般的な結果を示したので，それをのべることにする。

定義(3.1) Xをcompact空間とする．index set Λがあって，Xが，$\{x=(x(\lambda))_{\lambda\in\Lambda}\in[0,1]^{\Lambda} \mid |\{\lambda \mid x(\lambda)>0\}|\leq\aleph_0\}$のあるcompact setとhomeomorphismであるとき，XをCorson-compactという。

Eberlein compactはCorson compactであることは知られている。

定理(3.2) [5] XをBaire空間，KをCorson compact空間とする時，continuous map $f:X\longrightarrow C_p(K,\mathbb{R})$が与えられたならば，$X$のdense G_δ-set Aが存在して，Aの全ての点で，$f:X\longrightarrow C_n(K,\mathbb{R})$はcontinuousである。

(証明) 最初に，$\{X_\alpha \mid \alpha\in A\}$をcompact空間の族とするとき，次の事実はよく知られている。

(1). $B\subset A$で，$\pi_B:\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\longrightarrow\prod_{\alpha\in B}X_\alpha$をprojectionとする．$\mathring{\pi}_B:C_n(\prod_{\alpha\in B}X_\alpha)\longrightarrow C_n(\prod_{\alpha\in A}X_\alpha)$を，$\mathring{\pi}_B(\varphi)=\varphi\pi_B$ for $\varphi\in C_n(\prod_{\alpha\in B}X_\alpha)$で与えるとき，$\mathring{\pi}_B$はlinear norm-preserving embeddingである。

(2). $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A$で，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$のとき，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathring{\pi}_{A_n}[C(\prod_{\alpha\in A_n}X_\alpha)]$は，$C_n(\prod_{\alpha\in A}X_\alpha)$のuniformly dense set

である。

以後用いる記号を定めておく。$\hat{\mathbb{N}}=\{0\}\cup\mathbb{N}$ とし，空間 Z に対して，$C(Z,\mathbb{R})$ を $C(Z)$ で示す。

ある index set I に対して，$K\subset[0,1]^I$ と考えてよいから，$y=(y(i))_{i\in I}\in K$ について，$S(y)=\{i\in I \mid y(i)>0\}$ は可算集合である．各 countable set $J\subset I$ について，$C_n([0,1]^J)$ における uniformly dense set $\{\varphi_J^k \mid k\in\hat{\mathbb{N}}\}$ を固定する。各 finite set $F\subset K$ について，$S(F)=\{i\in I \mid y(i)>0 \text{ for some } y\in F\}$，$\Phi(F)=\{\varphi_{S(F)}^k \mid k\in\hat{\mathbb{N}}\}$，$\Phi_n(F)=\{\varphi_{S(F)}^k \mid 0\leq k\leq n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ とする。

さて，$n\in\mathbb{N}$ について，

$$A_n=\cup\{U:\text{non-empty open in } X \mid \text{diameter of } f(U)\leq 1/n\}$$

とすると，$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ の全ての点で，$f:X\longrightarrow C_n(K)$ は連続である。よって，今の場合，A が X で dense でない，と仮定する．このとき，X は Baire 空間であるから，ある $m\in\mathbb{N}$ に対して，X の non-empty open set ω が存在して，$A_m\cap\omega=\phi$。$\frac{1}{m}=\varepsilon$ とおく。次に，Baire 空間と β-defavorable の同値を用いるために，X における game G_0 に於いて，player β の strategy $t=(t_n)_{n=0}^{\infty}$ を与える。それと同時に各 $n\in\hat{\mathbb{N}}$ に対して，$t_n':(\mathcal{T}_X^*)^n\longrightarrow\mathcal{F}_K=\{E \mid E\subset X:\text{non-empty finite set}\}$ を与える。

$t_0 = U_0 = \omega$, $t_0' = F_0 = \{y_0\}$ ($y_0 \in K$を固定)とし，帰納的に

$(1)_n$ $U_0 \supset V_0 \supset t_1(V_0) = U_1 \supset V_1 \supset \cdots \supset t_n(V_0, \ldots, V_{n-1}) = U_n \supset V_n$

$(2)_n$ $F_0 \subset t_1'(V_0) = F_1 \subset t_2'(V_0, V_1) = F_2 \subset \cdots \subset t_n'(V_0, \ldots, V_{n-1}) = F_n$

$(3)_n$ $m+1 \leq n$について，$x \in U_{m+1}$, $0 \leq k \leq m$, $\varphi \in \Phi_m(F_k)$ ならば，$y \in F_{m+1}$が存在して，$|(f(x)-\varphi)(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$ となる U_i, F_iが作れたとする。このとき，$t_{n+1}(V_0, \cdots V_{n-1}, V_n) = U_{n+1}$，$t_{n+1}'(V_0, \ldots, V_{n-1}, V_n) = F_{n+1}$を作る。

$C([0,1]^I) \supset \bigcup_{0 \leq k \leq n} \Phi_n(F_k) = \{\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^p\}$ とおく.

$0 \leq m \leq p$ について，

$$W^m = \left\{ x \in V_n \,\middle|\, |(f(x)-\varphi^m)(y)| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ for some } y \in K \right\}$$

とおくとき，W^mはXの non-empty open set で，$V_n - W^m$ は nowhere dense in V_nである。V_nはBaire空間であるから，$a \in \bigcap_{m=0}^{p} W^m$が存在する．よって，$0 \leq m \leq p$ なる各mについて $b_m \in K$が存在して $|(f(a)-\varphi^m)(b_m)| > \frac{\varepsilon}{2}$.

このとき

$$t_{n+1}(V_0, \cdots V_n) = U_{n+1} = \bigcap_{m=0}^{p} \left\{ x \in \bigcap_{m=0}^{p} W^m \,\middle|\, |(f(x)-\varphi^m)(b_m)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$t_{n+1}'(V_0, \ldots V_n) = F_{n+1} = F_n \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_p\}$$ とする.

$\left\{ x \in \bigcap_{m=0}^{p} W^m \,\middle|\, |(f(x)-\varphi^m)(b_m)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$は各$m$について，$X$の open set であるから U_{n+1}はXの open set で，$a \in U_{n+1}$。また$F_n \subset F_{n+1}$は明らか.

更に $x \in U_{n+1}$，$0 \leq k \leq n$, $\varphi \in \Phi_n(F_k)$ ならば，あるm

$(0 \leq m \leq p)$ に対して $\varphi = \varphi^m$ であるから $|(f(x) - \varphi^m)(b_m)| > \varepsilon/2$ for $b_m \in F_{n+1}$

X は β-defavorable であるから game G_0 における，ある play: $U_0 \supset V_0 \supset U_1 \supset V_1 \supset \cdots$ と，K の finite set の列 $F_0 \subset F_1 \subset \cdots$ が存在して，各 $n \in N$ について $(1)_n, (2)_n, (3)_n$ をみたし，更にある $x_0 \in X$ に対し $x_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$.

次に $n \in \tilde{N}$ について，$J_n = S(F_n) \subset I$ とし $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$ とすると $L = \{y \in K \mid S(y) \subset J\} = \bigcap_{i \in I \setminus J} \{y \in K \mid y(i) = 0\}$ は K の閉集合であるから，projection $\pi_J : [0,1]^I \longrightarrow [0,1]^J$ を考えると L と $\pi_J(L)$ は homeomorphism である。

さて $\Gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi(F_n)$ とする。このとき $\Gamma \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} C([0,1]^{J_n}) \subset C([0,1]^J)$，$\Gamma_L = \{\varphi|L \mid \varphi \in \Gamma\}$ とすると，Γ は uniformly dense in $C_n([0,1]^J)$ であるから，Γ_L は uniformly dense in $C_n(L)$ である。

一方 $f(x_0)|L \in C(L)$ に対して $\| f(x_0)|L - \varphi|L \|_{C_n(L)} > \varepsilon/2$ for any $\varphi \in \Gamma$ である。

何故ならば，$\varphi \in \Gamma$ に対して，$\varphi \in \Phi(F_k)$ for some $k \in \tilde{N}$. よって $\varphi = \varphi^l_{S(F_k)}$ $(l \in \tilde{N})$. 今 $m = \max\{k, l\}$ とすると，$k \leq m$，$\varphi \in \Phi_m(F_k)$. ところで $x_0 \in U_{m+1}$ であるから induction の仮定より $y \in F_{m+1} \subset L$ が存在して $|(f(x_0) - \varphi)(y)| > \varepsilon/2$ 従って $\| f(x_0)|L - \varphi|L \|_{C_n(L)} > \varepsilon/2$

この矛盾は定理を証明する.

[注] Y を compact 空間とする。任意な Baire 空間 X と任意な separately cont. $f: X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して, X の dense G_δ-set A が存在して, $A\times Y$ の全ての点で, f が jointly cont. となるならば, Y は Corson compact であるか. という問題は大変興味があると考える.

文献

[1] J. Calbrix et J.P. Troallic, Applications séparément continues; C.R. Acad. Sci. Paris. 288 (1979) 647~648

[2] G. Choquet, Lectures on analysis, vol 1; Benjamin, New York and Amsterdam. (1969)

[3] J.P.R. Christensen, Joint continuity of separately continuous functions; Proc. Am. Math. Soc. 82 (1981) 455~461

[4] J.P.R. Christensen, Remarks on Namioka spaces and R.E. Johnson's theorem on the norm separability of the range of certain mappings; Math. Scand. 52 (1983) 112-116.

[5] G. Debs, Convergence forte et convergence simple dans l'espace des fonctions continues sur un

compact de Corson; preprint.

[6] P. Kenderov, Dense strong continuity of pointwise continuous mappings; Pacific J. Math 89 (1980) 111~130.

[7] I. Namioka, Separate and joint continuity; Pacific. J. Math. 51 (1974) 515~531.

[8] J.S. Raymond, Jeux topologiques et espaces de Namioka; Proc. Am. Math. Soc. 87 (1983) 499~504.

[9] M. Talagrand, Espaces de Baire et espaces de Namioka. Math. Ann. 270 (1985) 159~164.