数理解析研究所講究録
第 587 巻 1986 年 52-57

完全2部グラフの C_k-因子分解

東大・理　　榎本　彦衛　(Enomoto Hikoe)

近畿大・理工　　潮　和彦　(Ushio Kazuhiko)

向きのないグラフGの全域部分グラフHの連結成分がすべて長さが k の閉路C_kと同型であるとき，HはGのC_k-因子と呼ばれる。H_1, H_2, ・・・, H_s がGのC_k-因子であって，

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{s} H_i, \quad \bigcap_{i=1}^{s} H_i = \varnothing$$

が成り立つとき，$\{H_1$, ・・・, $H_s\}$ をGのC_k-因子分解と呼ぶ。

定理1. 完全2部グラフ$K_{m,n}$がC_k-因子分解できるためには，

(1) $m = n$

(2) n は2 以上の偶数

(3) k は4 以上の偶数

(4) k は$2n$ を割り切る

ことが必要である。

[証明] 2部グラフには奇閉路が存在しないので(3)が必要である。$K_{m,n}$のC_k-因子Fの連結成分の数をsとすると，

$$2m = ks = 2n$$

となることから(1)と(4)が必要であることがわかる。C_k-因子における各点の次数は2

なので，$\mathrm{K}_{n,n}$における次数nは偶数でなくてはならず，(2)が必要である。（証明終）

以下，定理1の条件(1)～(4)が十分条件かどうかを考えてみることにする。まず，条件(2)～(4)は，

(a) $k \equiv 0 \pmod 4$,　$k \mid 2n$

または

(b) $k \equiv 2 \pmod 4$,　$k \mid n$

と同値であるということに注意する。(a)が十分条件になっていることは比較的容易に示せる。

補題2. GがH-因子分解可能，HがK-因子分解可能ならば，GはK-因子分解可能になる。

[証明]

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{r} E(F_i)$$

をGのH-因子分解，$H_j^{(i)}$（$1 \leqq j \leqq s$）をF_iの連結成分，

$$E(H_j^{(i)}) = \bigcup_{k=1}^{t} E(K_k^{(i,j)})$$

を$H_j^{(i)}$のK-因子分解とすると，

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{k=1}^{t} E(\bigcup_{j=1}^{s} K_k^{(i,j)})$$

はGのK-因子分解を与える。（証明終）

補題3. $K_{n,n}$ が C_k-因子分解可能ならば，$K_{mn,mn}$ も C_k-因子分解可能である。

[証明] $K_{m,m}$ は1-因子分解可能なので，$K_{mn,mn}$ は $K_{n,n}$-因子分解可能である。従って， $K_{n,n}$が C_k-因子分解可能ならば， 補題2により $K_{mn,mn}$ も C_k-因子分解可能になる。(証明終)

定理4. $k \equiv 0 \pmod 4$, $k \mid 2n$ ならば，$K_{n,n}$は C_k-因子分解可能である。

[証明] 補題3より，$K_{2m,2m}$ が C_{4m}-因子分解可能であることを示せばよい。$K_{2m,2m}$ の部集合が

$$\{ i \mid 1 \leqq i \leqq 2m \}$$

および

$$\{ \bar{i} \mid 1 \leqq i \leqq 2m \}$$

のとき，

$$E(F_j) = \{ i\ \overline{i+2j},\ i\ \overline{i+2j+1} \mid 1 \leqq i \leqq 2m \} \quad (0 \leqq j \leqq m-1)$$

とおけばよい。(証明終)

(b)の条件は必ずしも十分条件にはなっていない。

定理5 ([1, Lemma 3.2]). $K_{6,6}$ は $C_{6,6}$-因子分解できない。

[証明] $K_{6,6}$ の部集合を

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

と

$X = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

とする。

$F_1 = \{1\bar{2}3\bar{1}2\bar{3}1, 4\bar{5}6\bar{4}5\bar{6}4\}$

としてよい。また

$| E(F_2) \cap \{1\bar{1}, 2\bar{2}, 3\bar{3}\} | =$ 奇数

としてよい。すると

$F_2 = \{C_1, C_2\},$

$| E(C_1) \cap \{1\bar{1}, 2\bar{2}, 3\bar{3}\} | = 1$

としてよいが，対称性より

$C_1 = 1\bar{1}4\bar{2}5\bar{5}1$

としてよい。すると $\{2, 3, 6, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}\}$ 上の閉路 C_2 が

$| E(C_2) \cap \{1\bar{1}, 2\bar{2}, 3\bar{3}\} | =$ 偶数

を満たすようにはできない。（証明終）

(b)の場合にも $k = n = 6$ を除けば十分条件になっていると予想されている([1, p.307])。それを証明するためには，

(i)　m が5以上の奇数ならば，$K_{2m,2m}$ は C_{2m}-因子分解可能

(ii)　m が2以上ならば，$K_{6m,6m}$ は $C_{6,6}$-因子分解可能

を示せばよい。

ここでは，(i)を証明することにする。

定理6. mが5以上の奇数ならば，$K_{2m,2m}$はC_{2m}-因子分解可能である。

[証明]

$$V = \{ a_i,\ b_i,\ x_i,\ y_i \ \mid\ 1 \leqq i \leqq m \},$$

$$\widetilde{x}_i = x_i \ (i \neq 4,\ m) \qquad \widetilde{y}_i = y_i \ (i \neq 1,\ 2)$$

$$\widetilde{x}_4 = x_m \qquad \widetilde{y}_1 = y_2$$

$$\widetilde{x}_m = x_4 \qquad \widetilde{y}_2 = y_1$$

とおく。$1 \leqq j \leqq \frac{m-3}{2}$ に対し，

$$E(F_j^{(1)}) = \{ a_i x_{i+2j},\ a_i x_{i+2j+1},\ b_i \widetilde{y}_{i+2j},\ b_i \widetilde{y}_{i+2j+1} \ \mid\ 1 \leqq i \leqq m \},$$

$$E(F_j^{(2)}) = \{ a_i y_{i+2j},\ a_i y_{i+2j+1},\ b_i \widetilde{x}_{i+2j},\ b_i \widetilde{x}_{i+2j+1} \ \mid\ 1 \leqq i \leqq m \},$$

とおく。さらに

$$F_1^{(3)} = \{ a_1 y_1 a_2 x_2 a_3 x_3 a_4 x_5 a_5 \cdots x_m a_m x_1 a_1,$$

$$b_1 \widetilde{y}_1 (=y_2) b_2 y_3 b_3 \cdots y_{m-1} b_{m-1} \widetilde{x}_m (=x_4) b_m y_m b_1 \},$$

$$F_2^{(3)} = \{ a_1 x_2 b_3 x_3 a_2 y_3 b_4 \widetilde{x}_4 (=x_m) b_5 x_5 \cdots b_{m-1} x_{m-1} b_m \widetilde{y}_1 (=y_2) a_1,$$

$$b_1 \widetilde{x}_m (=x_4) a_3 y_4 a_4 \cdots y_{m-1} a_{m-1} y_m a_m y_1 (=\widetilde{y}_2) b_2 x_1 b_1 \},$$

$$F_3^{(3)} = \{ a_1 x_m b_3 \widetilde{y}_2 b_1 x_2 b_2 x_3 b_4 x_5 a_6 y_5 b_6 x_7 \cdots b_{m-3} x_{m-2} a_{m-1} y_{m-2} b_{m-1} y_m a_1,$$

$$a_2 y_2 a_3 y_3 a_4 x_4 a_5 y_4 b_5 x_6 a_7 y_6 \cdots b_{m-2} x_{m-1} a_m y_{m-1} b_m x_1 a_2 \}$$

とおけばよい。（証明終）

References

[1] J. D. Horton, B. K. Roy, P. J. Schellenberg and D. R. Stinson: *On decomposing graphs into isomorphic uniform 2-factors*, Annals of Discrete Mathematics **27** (1985) 297-320

[2] D. Sotteau: *Decompotion of* $K_{m,n}$ ($K^*_{m,n}$) *into cycles (circuits) of length* $2k$, J. Combinatorial Theory Ser. B **30** (1981) 75-81