数理解析研究所講究録
第 587 巻 1986 年 173-178

ある種の t デザインとハイパーグラフのハイパークロー分解

山本 純恭 (岡山理科大学)
藤井 淑夫 (岡山理科大学)

Ωをm項目に関するバイナリー・レコードの集合、Qを k項目の質問の集合とする．Balanced Filing Schemes of order k（略して BFS_k）とは、一定数（c個）の k項目の質問の集合にたいして1つのバケツを用意し、これらの質問のいずれか1つに該当するレコードの情報を収納する方式である．したがって、BFS_kを c：1 の Q からバケツの番地の集合 B への写像を用意することと捉えることもできる．

数多くの可能な BFS_k に対する選択の基準としては、ファイルの冗長度、すなわち1レコードあたりの平均収納回数の小さいことがあげられる．冗長度に関してはつぎの定理がある．

定理 [2,6] レコードの分布が項目の置換に対して不変であるとする． そのとき、トリビアルな場合を除いて、1つのレコードが1つのバケツに収納される確率は、バケツが k－1項目を共有するc個の k項目の質問からなりたつているとき、したがって、バケツのグラフ構造が 次数cの k-ハイパークローであるとき、かつそのときにかぎり最小となる．

すべてのバケツのグラフ構造が次数cの k-ハイパークローからなりたつているBFS_kを $HUBFS_k$ という．したがって、$HUBFS_k$ は最小の冗長度をもつ BFS_kである[2,6]．

V を$|V|=m$ の有限集合とし（項目の集合に対応）、$E=\{E_i \mid i \in I\}$ を V の部分集合の族で $\cup E_i = V$ とする．このとき $H=(V, E)$ をハイパーグラフとよぶ．特にEが $|E_i| = k$ をみたす k-エッジ （k項目の質問に対応）のすべてからなるとき 完全ハイパーグラフ とよび、$H_{m,k}$ とかく．c個の k-エッジの集合 $\{E_1, E_2, \cdots, E_c\}$ において $|\cap E_i| = k-1$ のとき、次数cの k-ハイパークローとよび、k-HCとかく．

完全ハイパーグラフ $H_{m,k}$ の $\binom{m}{k}$ 個の k-エッジが $\binom{m}{k}/c$ 個のエッジを共有しない次数cの k-ハイパークローの和に分解されるとき、$H_{m,k}$は次数cの k-HC 分解可能であるという．

定理 [2,3,7] 与えられた mと kに対してc：1の $HUBFS_k$が構成可能であることと$H_{m,k}$ が次数cの k-HC 分解可能であることとは同値である．

$H_{m,k}$の k-HC 分解可能性について得られている従来の結果を要約するとつぎのようになる．すなわち、 k=２ の場合については必要十分条件が文献[2,3]で、 k≧３ の場合には必要条件といくつかの十分条件が文献[7]で与えられ、k=３ の場合にはこの必要条件が十分タイトであることがわかっている．k≧４ の場合については文献[7]で与えられているいくつかの十分条件は正しいが 必要条件は正くない．この誤りを正し、知られている結果を総合すると次の定理がみちびかれる．

定理 1. $H_{m,k}$ が次数ｃの k-HC 分解可能であるための必要条件は、

（ｉ） $\binom{m}{k}$ がｃの倍数、

（ii）	$m \geqq 2c$,	k=２ のとき [2]、
	$m \geqq 3c/2+1$,	k=３ のとき [7]、
	$m \geqq \{5-8c+\sqrt{(112c^2+1)}\}/2$,	k=４ のとき、
	$m \geqq c+k-1$,	k≧５ のとき．

k=２ のときは文献[2]に示すように十分条件でもある．k=３ のときの必要条件は文献[7]の結果に誤りはないが、その場合を含めて k≧３ の場合について必要性を改めて証明する．

$H_{m,k}$ がエッジを共有しない次数ｃの k-HC の和に分解されたとする．任意に k−2点集合 $P=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k-2}\}$ を選び、 残りの m−k+２ 点を２つの集合 $Q=\{y_1,y_2,\cdots,y_d\}$ と $R=\{z_1,z_2,\cdots,z_{m-k-d+2}\}$ すなわち、すべての $\{y_i\}\cup P \mid y_i \varepsilon Q$ がいずれも次数ｃの k-HC のルートであり、すべての $\{z_j\}\cup P \mid z_j \varepsilon R$ はいずれもどの k-HC のルートでもないように分類する．

$|R| = m-k-d+2 = 0$，１ または ２ のとき，$|Q| \equiv d = m-k+2$，$m-k+1$ または $m-k$ である．

いま、$|R| \geqq 3$ として， R の２点集合 $\{z_i,z_j\}$ にたいして k-エッジ $P\cup\{z_i,z_j\}$ を考える．$\{z_i\}\cup P$，$\{z_j\}\cup P$ は いずれもどの k-HC のルートでもないので z_i,z_j と P の k−3個の点からなる１つの k−１点集合が k-エッジ $P\cup\{z_i,z_j\}$ を含む k-HC のルートでなければならない． なお、このようなルートはペア $\{z_i,z_j\}$ にたいして１つずつ対応する． これらの $\binom{m-k-d+2}{2}$ 個の k-HC に所属する可能性のある k-エッジの数を、 R の点を２個含むものと３個含むものとにわけて数えると、不等式

$$(1) \qquad \binom{m-k-d+2}{2}c \leqq \binom{m-k-d+2}{2}(d+1)+\min(3,k-2)\binom{m-k-d+2}{3}$$

がなりたつ。 ここに、右辺第２項の係数 min(３，k-２) は ３点 z_i,z_j,z_k の２点と P からなる３通りの k-HC のなかでルートとなる P の k−３ 点のとりかたによりちがったものとなる可能性の最大数で k=３ のとき １，k=４ のとき 2，k≧5 のとき ３ である（文献[7]ではこの値を１としているが k≧４のとき正しくない）．

この不等式から

(2) $d \geqq 3c/2 - m/2$, $k = 3$ のとき [7]、
(3) $d \geqq 3c - 2m + 5$, $k = 4$ のとき、
および、
(4) $m \geqq k + c - 1$, $k \geqq 5$ のとき、

がみちびかれる． ここに (4) は $H_{m,k}$ が次数cの k-HC を含むためのトリビアルな必要条件であり、 $k=3$, $k=4$ の場合はそれぞれ $m \geqq c+2$, $m \geqq c+3$ となる．このことに注意すると (2) および (3) は $|R| = 0, 1, 2$ のときもなりたつ．

$k=3$ のとき 不等式 (2) をすべての P のえらびかたについて適用すると、

$$\binom{m}{1}\{3c/2 - m/2\} \leqq \Sigma\, d = 2\binom{m}{3}/c$$

となるから、

$$m \geqq 3c/2 + 1$$

を得る．

$k=4$ のとき 不等式 (3) をすべての P のえらびかたについて適用すると、

$$\binom{m}{2}\{3c - 2m + 5\} \leqq \Sigma d = 3\binom{m}{4}/c$$

となるから、

$$m \geqq \{5 - 8c + \sqrt{(112c^2 + 1)}\}/2$$

を得る．

v^*を処理の数、k^*をブロックの大きさ、λ_tを t 重の会合数とする t-デザインを考える．

定理 2． t-デザイン t-(v^*, k^*, λ_t) で $\lambda_t = 1$, $k^* = t+1$ をみたすものが存在するための必要十分条件は、 $m = v^*$, $k = v^* - k^* + 1$, $c = k^*$ にたいして $H_{m,k}$ が次数cの k-HC分解可能であることである．なおこの k-HC 分解は、$k \geqq 5$の場合の m の下限 $k + c - 1$をみたしている．

証明． t-$(v^*, t+1, 1)$ が存在するとし、 V の大きさ $k^* = t+1$の部分集合である各ブロックについて、その k^*個の点をリーフとし、残りの $k - 1 = v^* - k^*$個の点をルートとする次数$c = k^*$の k-HC をつくると、$\lambda_t = 1$かつ$t = k^* - 1$であるから、$m = v^*$として $H_{m,k}$ の次数cの k-HC 分解が得られる． 逆も明らかである．またこの k-HC 分解が $k \geqq 5$の場合の m の下限をみたしていることも明らかである．

Table 1 はよく知られている 2-(7,3,1) デザインを用いて $H_{7,5}$ を次数3の 5-HC に分解した例である． 同様に Table 2 は知られている 3-(8,4,1) デザインを用いて $H_{8,5}$を次数4の 5-HC に分解した例である．

Table 3 は、定理 2 の必要十分条件をみたす t-デザインについてその存在が知られているいくつかをリストアップし、対応して分解可能となる $H_{m,k}$ のパラメーター m, k と k-HC の次数cをリストしたものである．

Table 1. Decomposition of $H_{7,5}$ into 5-HC of degree 3

Root	Leaves
{2, 4, 5, 6}	0, 1, 3
{3, 5, 6, 0}	1, 2, 4
{4, 6, 0, 1}	2, 3, 5
{5, 0, 1, 2}	3, 4, 6
{6, 1, 2, 3}	4, 5, 0
{0, 2, 3, 4}	5, 6, 1
{1, 3, 4, 5}	6, 0, 2

Table 2. Decomposition of $H_{8,5}$ into 5-HC of degree 4

Root	Leaves
{4, 6, 7, 8}	1, 2, 3, 5
{5, 7, 1, 8}	2, 3, 4, 6
{6, 1, 2, 8}	3, 4, 5, 7
{7, 2, 3, 8}	4, 5, 6, 1
{1, 3, 4, 8}	5, 6, 7, 2
{2, 4, 5, 8}	6, 7, 1, 3
{3, 5, 6, 8}	7, 1, 2, 4
{1, 2, 4, 7}	3, 5, 6, 8
{2, 3, 5, 1}	4, 6, 7, 8
{3, 4, 6, 2}	5, 7, 1, 8
{4, 5, 7, 3}	6, 1, 2, 8
{5, 6, 1, 4}	7, 2, 3, 8
{6, 7, 2, 5}	1, 3, 4, 8
{7, 1, 3, 6}	2, 4, 5, 8

Table 3. List of parameters of small size t-designs satisfying the condition of Theorem 2.

2-(v^*,3,1) design					Corresponding $H_{m,k}$ and k-HC		
v^*	k^*	b^*	r^*	λ_2	m	k	c
7	3	7	3	1	7	5	3
9	3	12	4	1	9	7	3
13	3	26	6	1	13	11	3
15	3	35	7	1	15	13	3
19	3	57	9	1	19	17	3
21	3	70	10	1	21	19	3
	.	.	.	.	.		

3-(v^*,4,1) design					Corresponding $H_{m,k}$ and k-HC		
v^*	k^*	b^*	r^*	λ_3	m	k	c
8	4	14	7	1	8	5	4
14	4	91	26	1	14	11	4
20	4	285	57	1	20	17	4
26	4	650	100	1	26	23	4
50	4	4900	392	1	50	47	4
	.	.	.	.	.		

4-(v^*,5,1) design (Witt system)					Corresponding $H_{m,k}$ and k-HC		
v^*	k^*	b^*	r^*	λ_4	m	k	c
11	5	66	30	1	11	7	5

5-(v^*,6,1) design (Witt system)					Corresponding $H_{m,k}$ and k-HC		
v^*	k^*	b^*	r^*	λ_5	m	k	c
12	6	132	66	1	12	7	6

b^*=No. of k-HC of degree c.

REFERENCES

[1] Abraham, C.T., Ghosh, S.P. and Ray-Chaudhuri, D.K. (1968). File organization schemes based on finite geometries. Information and control, 12, 143-163.

[2] Yamamoto,S., Ikeda, H., Shige-eda, S.,Ushio, K. and Hamada, N.(1975). Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy. Information and Control, 28, 156-175.

[3] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975). On claw decomposition of complete graphs and complete bigraphs. Hiroshima Math. J.,5, 33-42.

[4] Yamamoto, S., Tazawa, S., Ushio, K. and Ikeda, H.(1978). Design of a generalized balanced multiple-valued file organization schemes of order two. Pro. 8th ACM-SIGMOD, 47-51.

[5] Yamamoto, S. (1979). Design of optimal balanced filing schemes. Proc. IBM Working Conf. of Database Engineering, II-23-II-36.

[6] Yamamoto, S. and Tazawa, S. (1979). Combinatorial aspects of balanced file organization schemes. J. Information Processing, 2, 127-133.

[7] Yamamoto, S. and Tazawa, S. (1980). Hyperclaw decomposition of complete hypergraphs. Annals of Discrete Mathematics, 6, 385-391.

[8] Yamamoto, S. (1982). Design of optimal balanced filing schemes. Lecture Notes in Computer Science, No.113, 253-265.

[9] Yamamoto, S. (1985). Further results on hyperclaw decomposition and balanced filing schemes. Proc. Int. Conf. on Foundation of Data Organization, 129-132.

[10] Kageyama, S. and Hedayat, A. (1983). The family of t-designs- Part II. J. Statist. Plann. Inf., 7, 257-287.