数理解析研究所講究録
第 589 巻 1986 年 1-7

Neukirch の bijection

東京農工大　小松 啓一　(Keiichi Komatsu)

$\mathbb{Q}$を有理数体，$\overline{\mathbb{Q}}$を$\mathbb{Q}$の代数的閉包，kを$\overline{\mathbb{Q}}$の部分体 $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$ をkの絶対ガロア群とする。Neukirch は [　] において次の定理を証明した。

定理 1. kとk'を$\mathbb{Q}$の有限次ガロア拡大とする。このときG_kと$G_{k'}$が位相群として同型ならば$k=k'$となる。

上の定理は内田 [　] により次のように一般化された。

定理 2. kとk'が$\mathbb{Q}$の有限次拡大とする。G_kと$G_{k'}$が位相群として同型ならばkとk'は同型になる。

さて，定理 1 の証明のためには次の定理が非常に重要な役割をえんじた。

定理A（Neukirch［　　］）Fを$\overline{\mathbb{Q}}$の部分体，pを素数，$\mathbb{Q}_p$をp進体とする。このとき次の（1）と（2）は同値である。

（1）$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大LでG_LとG_Fが位相群として同型になるものがある。

（2）pの上にあるFの付値vで次の性質をもつものが同値なものを除いてただ1つある。

(a) vの$\overline{\mathbb{Q}}$への延長はただ1つである。

(b) vはdiscreteである。

(c) vのresidue fieldは有限である。

（2）⇒（1）は$F_v/\mathbb{Q}_p$が有限次ということと$F_v\overline{\mathbb{Q}}=\overline{\mathbb{Q}}_p$および$F_v \cap \overline{\mathbb{Q}}=F$なることから明らかである。ただし$F_v$は$F$の$v$についての完備化である。

（1）⇒（2）について。$B_F=H^2(G_F,\overline{\mathbb{Q}}^\times)$を$F$のブラウワー群とする。このとき$0\to B_F\to\prod_w B_{F_w}$（exact）が成立する。$w$は$F$のすべての素点をわたる。さて（1）より$\mathrm{cd}_p(G_F)=2$となり従って$B_F$の$p$-torsion partが0でないことがわかる。従って上の完全系列からB_{F_v}のp-torsion partが0でないvの存在がわかる。このvが(2)の条件をみたすvである。

さて k，k' を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大とせよ．S_k を k のすべての素イデアルの集合とする。G_k から $G_{k'}$ の上への位相群としての同型写像 λ があるとき，Neukirch は次のようにして，S_k から $S_{k'}$ への bijection を構成した。$\mathfrak{P}$ を S_k の元として，素数 p の上にあるとする。$\mathfrak{P}$ に対応する k の付値を v とする。v の $\overline{\mathbb{Q}}$ への延長を $\bar{v}$ とする。$\bar{v}$ の $\overline{\mathbb{Q}}/k$ での分解群 $D_k(\bar{v})$ を $D_k(\bar{v}) = \{ g \in G_k \mid \bar{v}(x^g) = \bar{v}(x) \ \ \forall x \in \overline{\mathbb{Q}} \}$ で定義する。定理 A をもちいて，p の上にある $\overline{\mathbb{Q}}$ の discrete な付値 $\bar{v}'$ で $\lambda(D_k(\bar{v})) = D_{k'}(\bar{v}')$ となるものがあることがわかる。$\bar{v}'$ の k' への制限に対応する k' の素イデアルを $\mathfrak{P}'$ とする。そこで，S_k から $S_{k'}$ への写像 Φ を $\Phi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}'$ によって定めれば，Φ は well-defined となり，bijective になることがわかる。この Φ をわれわれは Neukirch の bijection とよぶ。$\mathfrak{P} \in S_k$ に対して，$e_k(\mathfrak{P})$ を $k/\mathbb{Q}$ での $\mathfrak{P}$ の分岐指数，$f_k(\mathfrak{P})$ を $k/\mathbb{Q}$ での $\mathfrak{P}$ の相対次数とする。このとき Neukirch の bijection Φ は次の性質をもつ。

(1) $\mathfrak{P} \in S_k$ とする。p を素数とする．

$$\mathfrak{P} \mid p \iff \Phi(\mathfrak{P}) \mid p$$

(2) $e_k(\mathfrak{P}) = e_{k'}(\Phi(\mathfrak{P})) \qquad \forall \mathfrak{P} \in S_k$

(3) $f_k(\mathfrak{P}) = f_{k'}(\Phi(\mathfrak{P})) \qquad \forall \mathfrak{P} \in S_k$

$G_k \underset{\lambda}{\simeq} G_{k'}$ のとき (3) をもちいれば定理 1 はすぐに

わかる。即ち k と k' を $\mathbb{Q}$ 上の有限次ガロア拡大とすれば，k, k' で完全分解する素数が同じになるので $k=k'$ となる。さて ζ_k を k の zeta－関数とするとき，$G_k \underset{\sim}{\supsetneq} G_{k'}$ ならば(3)より $\zeta_k=\zeta_{k'}$ なることもわかる．

さてわれわれは次のような場合に Neukirch の bijection を構成し，代数体の性質をしらべてみたい。ℓ を素数とし，$k(\ell)$ を k の最大 ℓ－拡大とする。k, k' を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大とし，$G(k(\ell)/k) \simeq G(k'(\ell)/k')$ のときに上記のことをしらべてみる。このとき次が成立する。

補題1.（広中［・］）ℓ を奇素数とする。k を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大で1の原始 ℓ 乗根 ω_ℓ を含むとする。F を $k(\ell)$ と k の中間体とする。このとき次の(1)と(2)は同値である。

(1) $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大 L で1の原始 ℓ 乗根を含み，$G(k(\ell)/F)$ と $G(L(\ell)/L)$ が位相群として同型になるものがある。

(2) ℓ の上にある F の付値 v で次の性質をみたすものが同値なものを除いてただ1つある。

(a) v の $k(\ell)$ への延長はただ1つである。

(b) v は discrete である。

(c) v の residue field は有限である．

さらに次も成立する。

補題2．ℓを奇素数とする。kを$\mathbb{Q}$の有限次拡大でω_ℓを含むものとする。Fを$k(\ell)$とkの中間体とする。このとき次の(1)と(2)は同値である。

(1) ℓと異なる素数ℓ'と1の原始ℓ乗根を含む$\mathbb{Q}_{\ell'}$の有限次拡大Lで$G(L(\ell)/L)$と$G(k(\ell)/F)$が位相群として同型になるものがある。

(2) ℓの上にないFの付値vで次の性質をもつ付値vが同値なものを除いてただ1つある。

(a) vの$k(\ell)$への延長はただ1つである。

(b) vはdiscreteである。

(c) vのresidue fieldは有限である。

さて，ℓを奇素数とし，k，k'を$\mathbb{Q}$の有限次拡大体で1の原始ℓ乗根ω_ℓを含むものとする。$G(k(\ell)/k)$と$G(k'(\ell)/k')$が位相群として同型ならば，補題1と補題2をもちいてS_kから$S_{k'}$へのbijection Φで次の性質をもつものをつくれる。

(1) $\mathfrak{p} \in S_k$

$$\mathfrak{p} \mid \ell \iff \Phi(\mathfrak{p}) \mid \ell$$

(2) $\mathfrak{p} \mid \ell$, $\mathfrak{p} \in S_k$

$$\Longrightarrow e_k(\mathfrak{p}) f_k(\mathfrak{p}) = e_{k'}(\Phi(\mathfrak{p})) f_{k'}(\Phi(\mathfrak{p}))$$

この bijection Φ をもちいて次を証明することができる。

命題1（小松[ ]）k, k' を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大とする。素数 ℓ について ω_ℓ を原始 ℓ 乗根とする。有限個の素数 ℓ を除いて $G(k(\omega_\ell)(\ell)/k(\omega_\ell))$ と $G(k'(\omega_\ell)(\ell)/k'(\omega_\ell))$ が位相群として同型ならば $\zeta_k = \zeta_{k'}$ となる。

系　命題1と同じ仮定でさらに k, k' が $\mathbb{Q}$ 上ガロア拡大ならば $k = k'$ となる。

命題2. ℓ を奇素数とする。n を自然数とし、ω_{ℓ^n} を原始 ℓ^n-乗根とする。K, K' を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大で ω_ℓ を含むものとする。$G(K(\ell)/K)$ から $G(K'(\ell)/K')$ の上への位相群としての同型写像 λ があるとする。このとき、

$$\omega_{\ell^n}^{g} = \omega_{\ell^n}^{\lambda(g)} \qquad {}^\forall g \in G(K(P)/K)$$

${}^\forall n$ ；自然数

系　命題2と同じ仮定が成立しているとする。

K_∞, K'_∞ を K, K' の cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$-拡大とする。Ω, Ω' を ℓ の外で不分岐な K_∞, K'_∞ の最大 Abel ℓ-拡大とする。このとき $\lambda(G(K(\ell)/K_\infty)) = G(K'(\ell)/K'_\infty)$

$\lambda(G(K(\ell)/\Omega)) = G(K'(\ell)/\Omega')$ となる。

References

[1] Hironaka-kobayashi Y.: On the Galois groups of the maximal p-extensions of algebraic number fields. Natural Sci. Rep. Ochanomizu, 27, 99–105, (1976)

[2] Komatsu K.: The maximal p-extensions and zeta-functions of algebraic number fields, to appear.

[3] Neukirch J.: Kennzeichnung der p-adischen und der endlichen algebraischen Zahlkörper. Inv. Math., 6, 296–314, (1969)

[4] Uchida K.: Isomorphisms of Galois groups, J. Math. Soc. Japan, 28, 617–620 (1976)