数理解析研究所講究録
第589巻 1986年 14-31

$\mathbb{Z}_p^d$拡大体上の最大p分岐p-abel拡大体について

京都大学　上田　勝（Masaru Ueda）

以下において　pを奇素数　kを有限次代数体　k_∞/kを$\mathbb{Z}_p^d$拡大としよう。　更に$M(k_\infty)$で　k_∞の最大p分岐p-abel拡大を表そう。　但し、p分岐とは　pの上にあるk_∞の素因子だけが分岐しうる時にいう。　$\tilde{X}(k_\infty) = Gal(M(k_\infty)/k_\infty)$　とし、

Λ_Gで　$G = Gal(k_\infty/k)$の$\mathbb{Z}_p$上の complete group ring を表す事とする。　この$\tilde{X}(k_\infty)$が内部自己同型により、Λ_G上の有限生成加群となる事は　よく知られている。　Λ_Gの商体を$Q(\Lambda_G)$と書く時、$\rho(k_\infty) = \dim_{Q(\Lambda_G)} \tilde{X}(k_\infty) \otimes_{\Lambda_G} Q(\Lambda_G)$　と定義し、この$\rho(k_\infty)$を　$\tilde{X}(k_\infty)$の rank と呼ぶ事にする。

以下　我々は　次の問題を考えてゆこう。

(1)　$\mathbb{Z}_p^d$拡大k_∞/kに対し、$\rho(k_\infty) = r_2(k)$　であるか？

但し　ここで$r_2(k)$は　kの complex place の数である。

この問を弱 Leopoldt 予想と呼ぶ人もいる。

問題(1)に関して、Babaicev [1], Greenberg [9]は　kの"ほとんど全て"の$\mathbb{Z}_p$拡大に対し、問題(1)は肯定的である事を示している。　しかし、逆に　$\mathbb{Z}_p$拡大が与えられた時　問題(1)が

肯定的かどうかの判定法は、次のものが知られているに過ぎない。

(a) k_∞/k が cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大である時、問題(1)は正しい。

㊂ Iwasawa [11], Greenberg [8].

(b) k と p に対する Leopoldt 予想が成立する時、問題(1)は正しい。 ㊂ Greenberg [9].

そこで我々は最初にもうひとつ別の判定法を与えよう。それは、次の様に述べられる。

〈定理 1〉 k を有限次代数体, k_∞ を k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大体とせよ。更に k が 1 の原始 p 乗根を含むと仮定しよう。この時もし k_∞/k で完全分解する p の上の k の素イデアルがひとつもなく、かつ岩沢の μ-invariant $\mu(k_\infty/k)$ が 0 であるなら、$\rho(k_\infty) = r_2(k)$ が成立する。/

この定理の証明を簡単に述べよう。σ を $G = Gal(k_\infty/k)$ の topological generator とし、σ を $1+T$ と同一視する事で Λ_G と $\mathbb{Z}_p[[T]]$ とを同一視する。k_n を k_∞/k の p^n 次中間体, $M(k_n)$ を k_n の最大 p 分岐 p-abel 拡大体, $\tilde{X}(k_n) = Gal(M(k_n)/k_n)$, $\tilde{X}^*(k_n)$ で $\tilde{X}(k_n)$ の Pontrjagin dual group を表す。最後に、A が離散加群の時, $A_p = \{A \ni a \mid pa = 0\}$, $r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(A_p)$

と定め、A が compact 加群の時は、${}_pA = A/pA$, $r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} ({}_pA)$ と定め、$r_p(A)$ を A の p-rank と呼ぶ事にする。

$\tilde{X}(k_n)$ は有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群であるから、${}_p(\tilde{X}(k_n))$ は有限 p-abel群。従って、その dual group $\tilde{X}^*(k_n)_p$ も有限 p-abel 群となり、そして次が成立する。

(2) $r_p(\tilde{X}(k_n)) = r_p(\tilde{X}^*(k_n))$.

以下この (2) 式の両辺の $n \to \infty$ での漸近的な挙動を調べてゆく。まず Kummer 理論を使えば、次式が分かる。

(参 Bertrandias and Payan [2])

(3) $r_p(\tilde{X}^*(k_n)) = g(k_n) + r_2(k_n) + r_p(P(k_n))$.

ここで、$g(k_n)$ は p の上にある k_n の素イデアルの個数、

そして、$P(k_n) = C(k_n)/C_0(k_n)$, $C(k_n)$ は k_n のイデアル類群、$C_0(k_n)$ は p の上にある k_n の素イデアルの類が生成する部分群と定める。

この (3)式の右辺に関して、$r_2(k_n) = r_2(k)\,p^n$ は明らかである。そして、$g(k_n)$ も分解群を使って考察すれば、容易に次の評価を得る。

(4) 十分大きい n に対して、$g(k_n) = \beta(k_\infty)\,p^n + O(1)$.

ここで $\beta(k_\infty)$ は k_∞/k で完全分解する p の上の k の素イデアルの数、$O(1)$ は n に関して有界なる数を表す。

最後の $r_p(P(k_n))$ の部分が若干めんどうである。

まず代数拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対し、$L'(K)$ を p の上にある K の素因子が全てそこで完全分解する様な K の不分岐な p-abel 拡大体のうち最大のものとしよう。すると類体論を使えば、

$P(k_n) \simeq Gal(L'(k_n)/k_n)$ である。今、$X' = Gal(L'(k_\infty)/k_\infty)$ を考えると、これは有限生成 torsion Λ_G 加群である。この時 Iwasawa [11] によって $0 \leq e \in \mathbb{Z}$ が存在して、

$Y' = Gal(L'(k_\infty)/k_\infty L'(k_e))$ と定める時、全ての $n \geq e$ に対して

$Gal(L'(k_n)/k_n) = X'/\nu_{e,n} Y'$ となる事が知られる。但しここで $\nu_{e,n} = 1 + \sigma^{p^e} + \cdots + \sigma^{(p^{n-e}-1)p^e} \in \Lambda_G$ である。

従って $r_p(P(k_n)) = r_p(Gal(L'(k_n)/k_n)) = r_p(X'/\nu_{e,n} Y')$.

また、完全系列 $0 \to Y'/\nu_{e,n}Y' \to X'/\nu_{e,n}Y' \to X'/Y' \to 0$ より

$r_p(Y'/\nu_{e,n}Y') \leqq r_p(X'/\nu_{e,n}Y') \leqq r_p(Y'/\nu_{e,n}Y') + r_p(X'/Y')$.

従って我々は次の漸近公式を得る。

(5) $r_p(P(k_n)) = r_p(Y'/\nu_{e,n}Y') + O(1)$.

さて、Y' は有限生成 torsion Λ_G 加群であるから、Λ_G 加群の構造定理を使って次の分解が得られる。

(6) $Y' \sim E = \left(\bigoplus_{i=1}^{a'(k_\infty)} \Lambda_G/(p^{c_i}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{b'(k_\infty)} \Lambda_G/(f_j^{d_j}) \right)$,

ここで c_i, d_j は正の整数、f_j は distinguished polynomial であり、"$\sim$" は Y' から E への仮似同型 (pseudo-iso. 又は quasi-iso.) を表わす。

この時　次の各補題が　いくばくかの計算により示しうる。

〈補題 1〉　任意の $n \geqq 0$ に対して

$$r_p(E/\nu_{e,n}E) = a'(k_\infty)p^n + O(1).$$

〈補題 2〉　X_1 と X_2 を　ふたつの有限生成 torsion Λ_G 加群とせよ。もし、X_1 が X_2 に仮似同型であれば、　次が成立する。

$$r_p(X_1/\nu_{e,n}X_1) - r_p(X_2/\nu_{e,n}X_2) = O(1).$$

さて　(5), (6) に上の補題 1, 2 を適用すると　次が分かる。

(7) $r_p(P(k_n)) = a'(k_\infty)p^n + O(1).$

以上の事から　我々は次の漸近公式を得た。

(8)　全ての $n \geqq 0$ に対して、

$$r_p(\tilde{X}^*(k_n)) = (r_2(k) + a'(k_\infty) + \beta(k_\infty))p^n + O(1).$$

次に $r_p(\tilde{X}(k_n))$ の方を考えよう。　$\tilde{X}(k_\infty)$ は有限生成 Λ_G 加群であるから、再び Λ_G 加群の構造定理より　次の分解を得る。

(9) $\tilde{X}(k_\infty) \sim E_1 = \Lambda_G^{\rho(k_\infty)} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s(k_\infty)} \Lambda_G/(p^{u_i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t(k_\infty)} \Lambda_G/(g_j^{v_j})\right)$

ここで　$\rho(k_\infty)$ は $\tilde{X}(k_\infty)$ の *rank*.

u_i, v_j は正の整数、g_j は *distinguished polynomial*

である。

さて、まず　完全系列

$0 \to Gal(M(k_n)/k_\infty) \to \tilde{X}(k_n) \to Gal(k_\infty/k_n) \to 0$ は

$Gal(k_\infty/k_n) \cong \mathbb{Z}_p$ であるから、分裂する。一方、Iwasawa [11]

より、$\Lambda_G \ni \omega_n = \sigma^{p^n} - 1$ を使えば、$Gal(M(k_n)/k_\infty) = \tilde{X}/\omega_n\tilde{X}$

と表せる。但しここで $\tilde{X} = \tilde{X}(k_\infty)$ と略記した。

これらの事より、まず $r_p(\tilde{X}(k_n)) = r_p(\tilde{X}/\omega_n\tilde{X}) + 1$。

次に仮似同型 $\tilde{X} \to E_1$ の kernel と cokernel をそれぞれ N_1, N_2 とする時、完全系列 $0 \to N_1 \to \tilde{X} \to E_1 \to N_2 \to 0$ をふたつの短完全系列に分解する。それを次の様に書こう。即ち、

$0 \to N_1 \to \tilde{X} \to \tilde{X}_1 \to 0$ と $0 \to \tilde{X}_1 \to E_1 \to N_2 \to 0$ 。

このふたつの完全系列より、次の p-rank の評価が得られる。

$r_p(\tilde{X}/\omega_n\tilde{X}) + r_p(N_2/\omega_n N_2) \geq r_p(E_1/\omega_n E_1)$。

さて、$\omega_n \equiv T^{p^n} \bmod p\Lambda_G$ という事に注意すれば、

容易に $r_p(E_1/\omega_n E_1) = (\rho(k_\infty) + s(k_\infty))\,p^n + O(1)$ 。

を得る。従って我々は次の不等式に到達した。

$r_p(\tilde{X}/\omega_n X) \geq (\rho(k_\infty) + s(k_\infty))\,p^n + O(1)$.

逆向きの不等号を証明するのが次なる目標である。そのために我々は次の可換環に関する補題を必要とする。

〈補題 3〉 $R = \mathbb{Z}_p[[T_1, \cdots\cdots, T_d]]$ を $\mathbb{Z}_p$ 係数の d 次元形式的巾級数環とし、M を torsion free 有限生成 R 加群とする。

R の元 $\alpha(\neq 0)$ が R の unit でないとすれば、R の元 λ と

M の R－自由部分加群 M' とがとれて、λ と α は互いに素、かつ、$\lambda M \subseteqq M'$ となる。//

さて $T = \mathrm{Tor}_{\Lambda_G} \tilde{X}$，$Z = \tilde{X}/T$ と略記しよう。まず完全系列 $0 \to T \to \tilde{X} \to Z \to 0$ より

$r_p(T/\omega_n T) + r_p(Z/\omega_n Z) \geqq r_p(\tilde{X}/\omega_n \tilde{X})$ を得る。

ここで、Z と p に上の補題3を適用して $\lambda \in \Lambda_G$ と Z の Λ_G 自由部分加群 Z' をとろう。すると、Z/Z' は torsion Λ_G 加群で $\mathrm{Ann}_{\Lambda_G}(Z/Z') \ni \lambda$ であるから、特に $\mathrm{Ann}_{\Lambda_G}(Z/Z') \neq p\Lambda_G$。

従って Λ_G 加群の構造定理（Bourbaki [3] 7章, §4, n°4）より、次の分解を得る。

$Z/Z' \sim \bigoplus_{i=1}^{a} \Lambda_G/\mathfrak{P}_i^{b_i}$，ここで b_i は正の整数、$\mathfrak{P}_i$ は Λ_G の高さ 1 の素イデアルで $\mathfrak{P}_i \neq p\Lambda_G$ となるもの。

これより、補題1，2の様にして、次が分かる。

(10) $r_p((Z/Z')/\omega_n(Z/Z')) = O(1)$.

一方、$\tilde{X}$ の rank の定義より、$Z' \cong \Lambda_G^{\rho(k_\infty)}$.

従って $0 \to Z' \to Z \to Z/Z' \to 0$ という完全系列により、

(11) $r_p(Z/\omega_n Z) \leqq r_p(Z'/\omega_n Z') + r_p((Z/Z')/\omega_n(Z/Z'))$

$$\underset{(10)}{=} \rho(k_\infty)\, p^n + O(1).$$

が導ける。

次に　Tに関しては、$T \sim$ (E_1 の torsion part) は明らかであるから、再び 補題1，2の様にして、

$r_p(T/\omega_n T) = s(k_\infty)p^n + O(1)$ を得る。

以上をまとめると

$r_p(\tilde{X}/\omega_n \tilde{X}) \leqq (\rho(k_\infty) + s(k_\infty))p^n + O(1)$ を得る。

こうして　次の結果が証明された。

〈定理2〉以上の仮定と記号の下で、次の関係式が成立する。

$$\rho(k_\infty) + s(k_\infty) = r_2(k) + \beta(k_\infty) + a'(k_\infty).$$

更に　次の各条件は全て同値である。

① $\rho(k_\infty) = r_2(k)$.

② $s(k_\infty) = \beta(k_\infty) + a'(k_\infty)$.

③ $s(k_\infty) \geqq \beta(k_\infty) + a'(k_\infty)$. //

[注意] 上の定理で ②↔③ の部分には 常に関係式

$\rho(k_\infty) \geqq r_2(k)$ が成立する事を使う。

(参 Greenberg [9])

さて、我々は、この③の条件を示す事で定理1の証明を完了させよう。　代数拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対して　$L(K)$で最大不分岐拡大体を表わそう。　$X = Gal(L(k_\infty)/k_\infty)$ は有限生成 torsion Λ_G 加群であり、かつ　$\mathbb{Z} \ni e \geqq 0$ がとれて $Y = Gal(L(k_\infty)/k_\infty L(k_e))$

とする時、全ての $n \geqq e$ に対して、

$C(k_n) \cong Gal(L(k_n)/k_n) \cong X/\nu_{e,n}Y$ となる事が知られている。(参 Iwasawa [11])

従って Λ_G 加群の構造定理を用いて

$$X \sim \left(\bigoplus_{i=1}^{a(k_\infty)} \left(\Lambda_G/p^{n_i}\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{b(k_\infty)} \Lambda_G/(f_j^{m_j})\right)$$ と分解する

時に、前と同様な手法で

$r_p(C(k_n)) = a(k_\infty)p^n + O(1)$ を得る。

次に完全系列 $0 \to C_0(k_n) \to C(k_n) \to P(k_n) \to 0$ より

$r_p(C_0(k_n)) + r_p(P(k_n)) \geqq r_p(C(k_n)) \geqq r_p(P(k_n))$.

そして、$C_0(k_n)$ は p の上にある k_n の素イデアルの類で生成される事から、$r_p(C_0(k_n)) \leqq \beta(k_\infty)p^n + O(1)$。これより、

$a'(k_\infty) + \beta(k_\infty) \geqq a(k_\infty) \geqq a'(k_\infty)$ が分かった。

更に、μ - invariant は $\mu(k_\infty/k) = \sum_{i=1}^{a(k_\infty)} u_i$ であるから、

$\mu(k_\infty/k) = 0 \Leftrightarrow a(k_\infty) = 0$ となる。こうして、

定理1の仮定:「$\beta(k_\infty) = 0$, $\mu(k_\infty/k) = 0$」

$\Leftrightarrow$ 「$\beta(k_\infty) = 0$, $a(k_\infty) = 0$」

$\Leftrightarrow$ 「$\beta(k_\infty) = 0$, $a'(k_\infty) = 0$」 となり、

$S(k_\infty) \geqq 0 = \beta(k_\infty) + a'(k_\infty)$ が成立し、従って定理2より $\beta(k_\infty) = r_2(k)$ となる。

以上で定理1が証明された訳である。

さて、ここで定理2の条件③について、一般的に、あるいは

具体的な場合でも、どの程度の事がいえるかを考える事は興味深い事と思われる。 $\rho(k_\infty)=0$ の時、$a(k_\infty)=a'(k_\infty)$ であり、③は $s(k_\infty)\geqq a(k_\infty)$ となる。 この際、もちろん $a(k_\infty)$ はイデアル類群の p-rank の増大度として把握されるから、問題は、$s(k_\infty)$ を $\rho(k_\infty)$ と独立した単独で見とおしのよい量として表現できるかどうかである。 Brumer [4] を使えば Galois cohomology を用いて表現できるが、それが見とおしのいいものとは筆者には思えない。

次に我々は k が代数体のある族を動く時の $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大 k_∞/k に対する $\rho(k_\infty)$ の挙動について調べよう。 考える状況を正確に述べよう。 H_∞ を k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大で $H_\infty\cap k_\infty=k$ となるものとする。 そして、H_n $(n=0,1,2\cdots)$ を H_∞/k の p^n 次中間体としよう。 我々はこの時 $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大の族 $\{k_\infty H_n/H_n \mid \mathbb{Z}\ni n\geqq 0\}$ を考えるのである。 $H_\infty\cap k_\infty=k$ という仮定より、全ての $n\geqq 0$ について、$G=Gal(k_\infty H_\infty/H_\infty)=Gal(k_\infty H_n/H_n)$,

$B=Gal(k_\infty H_\infty/k_\infty)=Gal(H_\infty/k)$ 等と同一視ができる。

$A=Gal(k_\infty H_\infty/k)$ として、各々の $\mathbb{Z}_p$ 上の complete group ring を $\Lambda_G,\Lambda_B,\Lambda_A$ 等と書く。 また、$M(k_\infty H_n)$ で $k_\infty H_n$ の最大 P 分岐 p-abel 拡大を表わし、$\tilde{X}(k_\infty H_n)=Gal(M(k_\infty H_n)/k_\infty H_n)$ とする。 すると、全ての $n\geqq 0$ に対し $\tilde{X}(k_\infty H_n)$ は有限生

成Λ_G加群と考える事ができる。 そこで その rank を $\rho(k_\infty H_n)$ と書く時、次の漸近公式が成立する。

〈定理3〉 nに無関係な非負整数 ρ, c が存在して、十分大きいnに対し、$\rho(k_\infty H_n) = \rho p^n + c$ が成立する。

以下 この定理3の証明の概略を述べよう。

$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_d\}$ を G の topological generator の system とする。

また、τ を B の topological generator とする。 すると、$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_d, \tau\}$ は A の topological generator の system となり、Λ_A と $\mathbb{Z}_p[[S_1, \cdots, S_d, T]]$ は $\sigma_i \to 1 + S_i$ $(1 \leq i \leq d)$, $\tau \to 1 + T$ という対応によって同一視される。

簡単のため、$K = k_\infty H_\infty$, $A_n = Gal(K/H_n)$, $\tilde{X} = \tilde{X}(K)$, $M = M(K)$, $M_n = M(k_\infty H_n)$ そして $\tilde{X}_n = \tilde{X}(k_\infty H_n)$ と略記する事にしよう。 また、Λ_G加群Mの rank を $rk_{\Lambda_G}(M)$ 等と書く事とする。

まず 完全系列 $0 \to Gal(M_n/K) \to \tilde{X}_n \to Gal(K/k_\infty H_n) \to 0$ を考える。 K/k は abel 拡大であるので、Λ_G加群としては、$Gal(K/k_\infty H_n)$ は torsion 加群である。 従って 次がわかる。

$$rk_{\Lambda_G} \tilde{X}_n = rk_{\Lambda_G} Gal(M_n/K) .$$

また、Λ_A加群として $Gal(M_n/K) \cong \tilde{X}/T_n\tilde{X}$ となる事はよく知られている。 ここで $T_n = (1+T)^{p^n} - 1 \in \Lambda_A$ である。

これより、我々は $rk_{\Lambda_G}\tilde{X}_n = rk_{\Lambda_G}(\tilde{X}/T_n\tilde{X})$ を得る。

さて まず $n=0$ の時を考えると、$\tilde{Y} = \mathrm{Tor}_{\Lambda_A}(\tilde{X})$ とすると

(12) $rk_{\Lambda_G}(\tilde{X}/T\tilde{X}) = rk_{\Lambda_A}(\tilde{X}) + rk_{\Lambda_G}(\tilde{Y}/T\tilde{Y})$ が成立する。

これは、次の様に示される。

$\rho = rk_{\Lambda_A}(\tilde{X})$, $\tilde{Z} = \tilde{X}/\tilde{Y}$ と略記する。$\tilde{Z}$ が torsion-free である事を使うと、$0 \to \tilde{Y}/T\tilde{Y} \to \tilde{X}/T\tilde{X} \to \tilde{Z}/T\tilde{Z} \to 0$ が完全系列になる事が分かる。従って $\rho = rk_{\Lambda_G}(\tilde{Z}/T\tilde{Z})$ を見れば十分である。

$\tilde{Z}$ と T とに補題3を適用する。$\Lambda_G - T\Lambda_G \ni \lambda$ と Λ_G 自由部分加群 $\tilde{Z}'$ がとれて $\lambda\tilde{Z} \leq \tilde{Z}'$ となる。$W = \tilde{Z}'/\lambda\tilde{Z}$, $W' = \tilde{Z}/\tilde{Z}'$ と定める。すると、(W/TW) と (W'/TW') は共に $\lambda \bmod T\Lambda_A \in \Lambda_A/T\Lambda_A = \Lambda_G$ で $\{0\}$ になる。従って 完全系列 $0 \to \tilde{Z} \to \tilde{Z}' \to W \to 0$ 及び $0 \to \tilde{Z}' \to \tilde{Z} \to W' \to 0$ から 容易に次の Λ_G-rank の評価を得る。即ち、$rk_{\Lambda_G}(\tilde{Z}/T\tilde{Z}) = rk_{\Lambda_G}(\tilde{Z}'/T\tilde{Z}')$. もちろん $\tilde{Z}' \simeq \Lambda_A^{\rho}$ であるから、これで (12)式が示された。

さて、A_n の topological generator の system として $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_d, \tau^{p^n}\}$ がとれる。従って、$\Lambda_A = \mathbb{Z}_p[[S_1, \ldots, S_d, T]]$ という同一視の下で Λ_{A_n} は $\mathbb{Z}_p[[S_1, \ldots, S_d, T_n]]$ と同一視される。これから、Λ_A は rank p^n の Λ_{A_n} 自由加群であり、特に Λ_{A_n} 上 integral. そして、$\tilde{Y} = \mathrm{Tor}_{\Lambda_{A_n}}(\tilde{X})$ もわかる。

これらの事と(12)式より、我々は次の式を得る。

(13) 全ての $n \geq 0$ に対して、

$$rk_{\Lambda_G}(\tilde{X}/T_n\tilde{X}) = rk_{\Lambda_{A_n}}(\tilde{X}) + rk_{\Lambda_G}(\check{Y}/T_n\check{Y})$$
$$= (rk_{\Lambda_A}(\check{X}))p^n + rk_{\Lambda_G}(\check{Y}/T_n\check{Y}) .$$

これを見ると、定理3を証明するには、次の主張を示せば十分である。

〈主張〉 $C_n = rk_{\Lambda_G}(\check{Y}/T_n\check{Y})$ とせよ。この時、数列 $\{C_n\}$ は単調増大し、かつ上に有界である。//

以下、この主張の証明を概説する。

$\check{Y}$ は有限生成 torsion 加群であるから、構造定理を用いれば仮似零加群(pseudo-null 又は quasi-null) N_1, N_2 がとれて、Λ_A 加群の完全系列

$$0 \to N_1 \to \check{Y} \to \bigoplus_{i=1}^{a} \Lambda_A/\mathfrak{p}_i^{n_i} \to N_2 \to 0$$ が存在する。

但し、ここで n_i は正の整数、$\mathfrak{p}_i$ は高さ1の素イデアル。

この完全系列をふたつの短完全系列に分解し、定理1の証明の時の様にして Λ_G-rank を評価すると、次を得る。

(14) $$rk_{\Lambda_G}(N_2/T_nN_2) \geq \sum_{i=1}^{a} rk_{\Lambda_G}(M_i/T_nM_i) - rk_{\Lambda_G}(\check{Y}/T_n\check{Y}) .$$

ここで、$M_i = \Lambda_A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$ と略記した。

さて Bourbaki [3] 7章, §4, n°8, Prop.18 を用いると、N_2 は仮似零 Λ_{G_n} 加群でもある。従って 仮似零の定義より

$\mathrm{Ann}_{\Lambda_{A_n}}(N_2) \not\subseteq T_n\Lambda_{A_n}$. これより、$rk_{\Lambda_G}(N_2/T_nN_2) = 0$ が出る。

従って

(15) $$rk_{\Lambda_G}(\check{Y}/T_n\check{Y}) \geq \sum_{i=1}^{a} rk_{\Lambda_G}(M_i/T_nM_i)$$

ここで $\tilde{Y}$ と $\bigoplus_i M_i$ は共に torsion Λ_G 加群であった。この場合仮似同型関係は対称的であるから、(15)式は次の様になる。

(15)′ $$rk_{\Lambda_G}(\tilde{Y}/T_n\tilde{Y}) = \sum_{i=1}^{a} rk_{\Lambda_G}(M_i/T_nM_i) .$$

そこで、我々は $M = \Lambda_A/\mathfrak{P}^{\delta}$, $\mathfrak{P}$ は Λ_A の高さ1の素イデアル, δ は正の整数、という加群を考えてゆこう。

Λ_A はU.F.Dであるから、$\mathfrak{P} = F\Lambda_A$ なる素元 F が存在する。

また自然な同型 $\Lambda_A/T_n\Lambda_A \cong (\Lambda_G)^{p^n}$ を用いて、$\Lambda_A/T_n\Lambda_A$ の間の g 倍写像 ($g \in \Lambda_A$) を表現する事にしよう。即ち $(\Lambda_G)^{p^n}$ の準同型 $\theta(g)$ を次の可換図式で定義するのである。

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_A/T_n\Lambda_A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "g倍"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (\Lambda_G)^{p^n} \arrow[d, "\theta(g)"] \\
\Lambda_A/T_n\Lambda_A \arrow[r, "\sim"] & (\Lambda_G)^{p^n}
\end{tikzcd}$$

この記号を用いれば、明らかに coker $\theta(F^{\delta}) \cong M/T_nM$。

従って $rk_{\Lambda_G}(M/T_nM) \neq 0 \Leftrightarrow \det\theta(F^{\delta}) \neq 0$ が出る。

$\theta(F^{\delta})$ の固有値は容易に計算され、それを用いると、

$\det\theta(F^{\delta}) = \prod_{\zeta\in\mu_n} F^{\delta}(S_1, \cdots, S_d, \zeta-1)$ となる。但し、ここで μ_n は1の p^n 乗根のなす群の事である。

従って

(16) $rk_{\Lambda_G}(M/T_nM) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ ある $\zeta \in \mu_n$ で $F(S_1, \cdots, S_d, \zeta-1) = 0$

$\Leftrightarrow$ ある m がとれて, $0 \leq m \leq n$ かつ $F \in \Psi_m\Lambda_A$.

ここで、$\Psi_m = \begin{cases} T & \text{if } m=0 \\ T_m/T_{m-1} & \text{if } m \geq 1 \end{cases}$.

そこで問題は $rk_{\Lambda_G}\left(\Lambda_A/(T_n\Lambda_A + \Psi_m^{j}\Lambda_A)\right)$ の計算である。

これは、次の様にして成される。

R_1 を T_n と Ψ_m^{j} とで生成される $\Lambda_B = \mathbb{Z}_p[[T]]$ のイデアルとする。

すると、次は容易に分かる。

$$(\Lambda_B/R_1)[[S_1,\dots,S_d]] \cong \Lambda_A/(T_n\Lambda_A + \Psi_m^{j}\Lambda_A).$$

$$rk_{\Lambda_G}\left((\Lambda_B/R_1)[[S_1,\dots,S_d]]\right) = rk_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda_B/R_1).$$

ここで Weierstrass の準備定理を用いれば、$\Lambda_B/R_1 \simeq \mathbb{Z}_p[T]/R_2$.

但し、$R_2 = \mathbb{Z}_p[T]\,T_n + \mathbb{Z}_p[T]\,\Psi_m^{j}$

更に、$T_n = \prod_{i=0}^{n}\Psi_i$ より、$\left(\mathbb{Z}_p[T]/R_2\right)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p[T]/\Psi_m\mathbb{Q}_p[T]$.

以上をまとめて、

(17) $$rk_{\Lambda_G}\left(\Lambda_A/(T_n\Lambda_A + \Psi_m^{j}\Lambda_A)\right) = \dim_{\mathbb{Q}_p}\left(\mathbb{Q}_p[T]/\Psi_m\mathbb{Q}_p[T]\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } m=0 \\ p^{m-1}(p-1) & \text{if } m\geq 1 \end{cases}.$$

この(17)から〈主張〉は直ちに導ける。

$\tilde{Y}$ の分解にでてくる高さ1の素イデアルで更に Ψ_m $(0\leq m\leq n)$ で生成される様なもの全ての集合を I_n と書こう。

すると、$c_n = \sum_{\mathfrak{P}_i \in I_n} rk_{\Lambda_G}\left(\Lambda_A/(\mathfrak{P}_i^{n_i} + T_n\Lambda_A)\right)$ となる。

定義より、明らかに I_n は集合の単調増大列であり、しかも

$I_n \subseteq \{\mathfrak{P}_i \mid 1 \leq i \leq a\}$ ゆえ　$n \to \infty$ とする時 stableになる。

この事と (17)式の右辺が n に無関係である事に注意して我々は〈主張〉の成立を見る。

以上で、この拙い文章の主要な部分は終わりである。残りの部分で、いくつかの注意を述べよう。

まず定理1の仮定がどの程度成立するかである。

$E(k)$ で k の全ての $\mathbb{Z}_p$拡大のなす集合を表わそう。そして

$E_1(k) = \{E(k) \ni k_\infty \mid \mu(k_\infty/k) = 0\}$

$E_2(k) = \{E(k) \ni k_\infty \mid \beta(k_\infty) = 0\}$　という部分集合を考える。この時、$E(k)$に p進位相を導入する事ができ、その意味で $E_2(k)$ が空でない開集合となり、更に$E(k)$内でdenseとなる事が知られている。もし $E_1(k) \neq \phi$ となるなら、$E_1(k)$も同様となる。そして、我々の扱った定理1の仮定を満たす集合は、勿論 $E_1(k) \cap E_2(k)$ である。これらの事については、Greenberg [7], Babaicev [1], Monsky [14], Kuz'min [13] を見られたい。

また、定理3について、この結果と類似の結果を λ-invariant μ-invariantに対し Cuoco [5] が導いている事に注意しておこう。というより、実際筆者は[5]に刺激されて、定理3を計算したのである。

定理3で扱ったH_∞を$\mathbb{Z}_p^d$ $(d \geqq 2)$にして同じ事がいえるかどうかは分かっていない。しかし、ここで与えた証明はたぶんにH_∞/kが$\mathbb{Z}_p$拡大である事を使っているため、同じ手法は一般の時には使えないと思う。

以上の文章の詳細な点については[15], [16]を見られたい。

〈参考文献〉

[1] V. Babaicev, On the linear nature of the behavior of Iwasawa's μ-invariant, Math. USSR Izv. 19 (1982), 1-12.

[2] F. Bertrandias and J.-J. Payan, Γ-extensions et invariants cyclotomiques, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 5 (1972), 517-543.

[3] N. Bourbaki, Elements de Mathematique, Algebre Commutative, Hermann, Paris, 1965.

[4] A. Brumer, Galois groups of extensions of algebraic number fields with given ramification, Michigan Math. J., 13 (1966) 33 - 40.

[5] A. Cuoco, The growth of Iwasawa invariants in a family, Comp. Math., 41 (1980), 415 - 437.

[6] A. Cuoco and P. Monsky, Class numbers in $\mathbb{Z}_p^d$-extensions, Math. Ann., 255 (1981), 235 - 258.

[7] R. Greenberg, The Iwasawa invariants of Γ-extensions of a fixed number field, Amer. J. Math., 95 (1973), 204 – 214.

[8] R. Greenberg, On the Iwasawa invariants of totally real number fields, Amer. J. Math., 98 (1976), 263 – 284.

[9] R. Greenberg, On the structure of certain galois groups, Invent. Math., 47 (1978), 85 – 99.

[10] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Hamburg, 20 (1956), 257 — 258.

[11] K. Iwasawa, On $\mathbb{Z}_\ell$ - extensions of algebraic number fields, Ann. of Math., 98 (1973), 246 — 326.

[12] K. Iwasawa, On the μ-invariants of $\mathbb{Z}_\ell$ - extensions, Number theory, Algebraic geometry and Commutative algebra (in honor of Y. Akizuki), Kinokuniya, Tokyo, 1973, 1 – 11.

[13] L. Kuz'min, Cohomological dimension of some Galois group, Math. USSR Izv., 9 (1975), 455 – 463.

[14] P. Monsky, Some invariants of $\mathbb{Z}_p^d$ - extensions, Math. Ann., 255 (1981), 229 – 233.

[15] 上田 勝, 京都大学 修士論文

[16] M. Ueda, On the maximal p-ramified p-abelian extensions over $\mathbb{Z}_p^d$ - extensions. (to appear)