数理解析研究所講究録
第589巻 1986年 94-104

一般Euler数のp進補間とその応用

都立大理 津村博文 (Hirofumi Tsumura)

Introduction

古典的Euler数 E_n は、次の式で与えられる。

$$\frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}.$$

Frobenius ([4]) は、この E_n を拡張して一般の代数的数 u に対しEuler数 $H^n(u)$ を定義した。(§1参照) その後多くの数学者によって、その性質が研究されてきた。([2], [4], [8]) 最近になってShiratani - Yamamoto ([10]) が、この $H^n(u)$ の p 進補間である $G_p(s,u)$ を構成し、それを使って Ferrero - Greenberg の結果 ([5]) の拡張である $L_p'(0,\chi)$ の評価式と、Diamond の結果 ([3]) の別証明を与えた。

この報告では、Dirichlet 指標 χ を使って Euler数の拡張である一般Euler数 $H_\chi^n(u)$ を定義し、さらに $G_p(s,u)$ の拡張として $H_\chi^n(u)$ の p 進補間を構成し、その性質を調べることにより

いくつかの一般Euler数に関する合同式を示す。これらの合同式はEuler数に関して示されたもの（[2],[4],[8]）の拡張、あるいは精密化になっている。なおこの報告の詳細は、[13]を参照されたい。

最後に、筆者がp進Γ-変換の応用を学ぶにあたり懇切丁寧な御指導を賜った三木博雄先生に対し、また有益な助言を下さった石田信先生、白谷克巳先生に対し感謝の意を表わす。

Notation

$\mathbb{Q}$：有理数体、$\overline{\mathbb{Q}}$：$\mathbb{Q}$の代数閉包、$\mathbb{Z}$：有理整数環、$\mathbb{N}$：自然数の集合、$\mathbb{R}$：実数体、$\mathbb{C}$：複素数体、p：奇素数、$\mathbb{Q}_p$：p進数体、$\mathbb{Z}_p$：p進整数環、$\mathbb{Z}_p^*$：$\mathbb{Z}_p$のp進単数群、$\mathbb{C}_p$：$\mathbb{Q}_p$の代数閉包のp進完備化、$|\cdot|$：$\mathbb{C}_p$の正規p進付値（すなわち $|p| = 1/p$）、$V := \{x \in \mathbb{Q}_p \,;\, x^{p-1} = 1\}$、$\mathbb{Z}_p^* = V \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ に対応する分解を $a \in \mathbb{Z}_p^*$ に対し、$a = \omega(a)\langle a\rangle$ とかく。

§1. 一般Euler数の定義

$u (\neq 0)$を代数的数とする。$\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ なる埋め込みを固定して、uを$\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_p$の元とみる。この時<u>uに付随するEuler数</u> $H^n(u)$ が次の式で定義される。

(1) $$\frac{1-u}{e^t-u} = \sum_{n=0}^{\infty} H^n(u)\frac{t^n}{n!}$$

さらに、uに付随するEuler多項式$E_n(u,X)\in\mathbb{Q}(u)[X]$が、

(2) $$\frac{(1-u)e^{xt}}{e^t-u} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(u,X)\frac{t^n}{n!}$$

で定義される。次の2つの式は容易にわかる。

(3) $$E_n(u,X) = (-1)^n E_n(u^{-1},X)$$

(4) $$E_n(u,X) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} H^i(u) X^{n-i}$$

そこでDirichlet指標χを1つとり、その導手をfとする。このχに対し、χ, uに付随する一般Euler数$H_\chi^n(u)$を次の式で定義する。

(5) $$\sum_{a=1}^{f}\frac{(1-u^f)\chi(a)e^{at}u^{f-a}}{e^{ft}-u^f} = \sum_{n=0}^{\infty} H_\chi^n(u)\frac{t^n}{n!}$$

注として$\chi=1$（単位指標）のとき、

(6) $$H_1^n(u) = uH^n(u) \quad (n\geqq 1)$$
$$H_1^0(u) = uH^0(u)+1-u$$

がわかる。

§2. 一般Euler数のp進補間.

以下、原始Dirichlet指標χ（導手はf）を固定し、次の仮

定をする。

(7) $$|1-u^{fp^N}| \geqq 1 \quad (N \geqq 0)$$

これは[8]でなされた仮定の拡張である。このとき $H_\chi^n(u)$ の定義から、[8]で示された公式の拡張として次の補題を得る

補題 $n \geqq 0$ なる整数 n に対し

$$\frac{1}{1-u^f} H_\chi^n(u) = \lim_{N\to\infty} \sum_{b=1}^{fp^N} \chi(b) b^n \frac{u^{fp^N-b}}{1-u^{fp^N}}$$

ここで右辺の lim は、p 進極限である。

この補題を使って $H_\chi^n(u)$ の p 進補間を構成する。その為にいくつかの Notation を定義する。$\pi_{N,M}: \mathbb{Z}/fp^N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/fp^M\mathbb{Z}$ $(N \geqq M)$ を自然な全射準同型として、これに関する $\{\mathbb{Z}/fp^N\mathbb{Z}, N \geqq 0\}$ の射影的極限を X とする：$X = \varprojlim_N \mathbb{Z}/fp^N\mathbb{Z}$. このとき N-射影：$X \to \mathbb{Z}/fp^N\mathbb{Z}$ による $a \bmod fp^N\mathbb{Z}$ の逆像を、$a+fp^N\mathbb{Z}_p$ とかく。さらに $X^* = \bigcup(a+fp^N\mathbb{Z}_p)$ とおく。ただし右辺の union で a は $0<a<fp$, $(a,p)=1$ なる範囲を動くものとする。$\pi: X \to \mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Z}/fp^N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$ から誘導される自然な連続準同型とする。最後に X 上の p 進測度 $\alpha_u = \alpha_{u,X}$ を

(8) $$\alpha_u(a+fp^N\mathbb{Z}_p) = \frac{u^{fp^N-a}}{1-u^{fp^N}} \quad \left(\begin{matrix} 0 \leqq a < fp^N \\ N \geqq 0 \end{matrix}\right)$$

によって定義する。

注意　$\chi=1$ のとき，$\alpha_{u,\mathbb{Z}_p}$ は Shiratani-Yamamoto 測度 μ_u ([10]) と一致する。

そこで $\mathbb{C}_p$-valued な X 上の連続関数 g に対し，g の X, X^* 上の p 進積分を次のように定義する。

$$\int_X g(x)\,d\alpha_u(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{a=0}^{fp^N-1} g(a)\,\alpha_u(a+fp^N\mathbb{Z}_p)$$

$$\int_{X^*} g(x)\,d\alpha_u(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{a=0\\(a,p)=1}}^{fp^N-1} g(a)\,\alpha_u(a+fp^N\mathbb{Z}_p).$$

前述の補題からすぐに，$n\geqq 0$ なる整数 n について，

$$(10)\qquad \int_X \pi(x)^n\chi(x)\,d\alpha_u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-u^f}H_\chi^n(u) & (\chi\neq 1) \\ \dfrac{u}{1-u}H^n(u) & (\chi=1) \end{cases}$$

がわかる。この事実に基づいて，Euler 数の p 進補間を定義する。すなわち $s\in\mathbb{Z}_p$ に対して，

$$l_p(u,s,\chi) = \int_{X^*}\langle\pi(x)\rangle^{-s}\chi(x)\,d\alpha_u(x)$$

とおく。この時 $l_p(u,s,\chi)$ が Iwasawa function (とくに p 進解析的 on $\mathbb{Z}_p$) となることはよく知られている。([12], 定理 12.4)

注意　とくに $\chi=1$ のとき，$l_p(u,s,1)=G_p(s,u)$ となる。

(10)と $l_p(u,s,\chi)$ の定義から、次の定理を得る。

<u>定理 1</u>　$n \geqq 0$ なる整数 n について

$$l_p(u,-n,\chi\omega^n) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-u^f}H_\chi^n(u) - \dfrac{\chi(p)p^n}{1-u^{pf}}H_\chi^n(u^p) & (\chi \neq 1) \\ \dfrac{u}{1-u}H^n(u) - \dfrac{p^n u^p}{1-u^p}H^n(u^p) & (\chi = 1) \end{cases}$$

となる。とくに $p|f$ のとき

$$l_p(u,-n,\chi\omega^n) = \frac{1}{1-u^f}H_\chi^n(u)$$

<u>注意</u>　Euler数とBernoulli数との関係を考察する。

$$\frac{2}{e^{2t}-1} = \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{e^t+1}$$

から、各 $n \geqq 0$ について

$$\frac{1}{2}E_n = (1-2^{n+1})\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

がわかる。もっと一般に $(c,fp)=1$ なる $c>0$ について

(11)
$$\sum_{j=1}^{c-1}\frac{1}{1-\zeta_c^{jf}}H_\chi^n(\zeta_c^j) = (c^{n+1}\chi(c)-1)\frac{B_{n+1,\chi}}{n+1}$$

を得る。ここで ζ_c は 1 の原始 c 乗根 である。この(11)と定理 1 より

$$\sum_{j=1}^{c-1} l_p(\zeta_c^j, s, \chi) = (1-\langle c\rangle^{1-s}\chi\omega(c))L_p(s, \chi\omega)$$

を得る。

§3. 一般Euler数に関する合同式.

この§では，§2で定義した $l_p(u,s,\chi)$ の $s=1$ の回りでの展開係数を調べることにより，一般Euler数に関する合同式を導く。

$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の整数環として，α を X の上の $\mathcal{O}$-valued な p 進測度とする。ただし X は§2で定義した射有限群とする。$\mathcal{O}$-valued な X 上の連続関数 g を 1つとり

$$F(s) = \int_{X^*} \langle \pi(x)\rangle^{-s} g(x)\, d\alpha(x)$$

とおく. この時次の定理を得る。

<u>定理2</u>　記号を上の通りとして

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$$

と展開したとき，

$$|a_0| \leqq 1, \quad p \mid a_n \ (n \geqq 1)$$

となる。

この定理において、$g=\chi$ とすれば、

$$l_p(u,s,\chi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s-1)^n$$

と展開した時、$|a_0|\leqq 1$, $p|a_n$ $(n\geqq 1)$ がいえる。これを使えば、$m\equiv n\ (\mathrm{mod}\,(p-1)p^a)$ なる m,n について

$$l_p(u,-m,\chi\omega^m)\equiv l_p(u,-n,\chi\omega^n)\pmod{p^{a+1}}$$

が示される。このことから、次の系1, 系2を得る。

系1 (Kummer合同式)　$0\leqq m\leqq n$, $m\equiv n\ (\mathrm{mod}\,(p-1)p^a)$ なる m,n について

$$\frac{1}{1-u^f}H_\chi^m(u)\equiv\frac{1}{1-u^f}H_\chi^n(u)\pmod{p^M}$$

が成り立つ。ここでMは、$(p,f)\neq 1$ のとき $a+1$, $(p,f)=1$ のとき $\min(m,a+1)$ なる値をとる。

系2 (Frobeniusの合同式)　$n\geqq 1$, $n\equiv i\ (\mathrm{mod}\,(p-1)p^a)$ (ただし $0\leqq i<p-1$) となる n について

$$\frac{1}{1-u^f}H_\chi^n(u)\equiv\sum_{k=1}^{g}\chi\omega^i(k)\left\{\frac{u^{g-k}}{1-u^g}-\frac{\chi\omega^i(p)\,u^{p(g-k)}}{1-u^{pg}}\right\}\pmod{p^M}$$

が成り立つ。ここで g は $\chi\omega^i$ の導手。またMは、$i=0$ か否か

で，$a+1$ か 1 をとる。

注意　系1，系2は [2]，[4]，[8] 等で，Euler数について示されている合同式の一般化である。とくに系2は，Teichmüler指標を使うことにより，$(p-1)|n$ の仮定をはずした。

最後にEuler数と関連のある群環の元を定義する。i を $3 \leqq i \leqq p-2$ なる奇数とする。(11) から

(12)
$$\sum_{j=1}^{c-1} \frac{1}{1-\zeta_c^{jp}} H^0_{\omega^{-i}}(\zeta_c^j) = (c\omega^{-i}(c)-1)B_{1,\omega^{-i}}$$

が $(c,p)=1$ なる $c>0$ について成り立つ。他方 (5) から

(13)
$$\frac{1}{1-\zeta_c^{jp}} H^0_{\omega^{-i}}(\zeta_c^j) = \frac{1}{1-\zeta_c^{jp}} \sum_{a=1}^{p-1} \omega^{-i}(a)\zeta_c^{j(p-a)}$$

が成り立つ。そこで $G = Gal(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_a : \zeta_p \mapsto \zeta_p^a, (a,p)=1\}$ とおいて，群環 $\mathbb{Z}_p[G]$ の元を

$$\overline{\Theta}_c = \sum_{a=1}^{p-1} \left\{ \sum_{j=1}^{c-1} \frac{\zeta_c^{j(p-a)}}{1-\zeta_c^{jp}} \right\} \sigma_a^{-1}$$

によって定義する。この時 c は $c|p-1$ なるものを取る。この定義と (12)，(13) から，$\mathbb{Z}_p[G]$ の巾等元 $\varepsilon_k = \sum_{a=1}^{p-1} \omega^k(a)\sigma_a^{-1}$ $(0 \leqq k \leqq p-2)$ について

(14)
$$\overline{\Theta}_c \varepsilon_i = (c\omega^{-i}(c)-1)B_{1,\omega^{-i}}\varepsilon_i$$

がわかる。$\mathbb{Q}(\zeta_p)$のp-類群をAとすると，(14)の右辺は，$\varepsilon_i A$を零化する。([12], §6.3) 従って$\overline{\theta}_c$はAを零化する。逆にこの$\overline{\theta}_c$から，巾級数環を利用するIwasawa methodによってEuler数のp進補間を構成することができる。

References

[1] L.Carlitz, A note on Euler numbers and congruences, Nagoya Math.J.,7(1956),441-445.

[2] L.Carlitz, Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers, J.Reine Angew.Math.,202(1959),174-182.

[3] J.Diamond, On the values of p-adic L-functions at positive integers, Acta Arith.,35(1979),223-237.

[4] G.Frobenius, Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome, Stizungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften (1910),809-847.

[5] B.Ferrero and R.Greenberg, On the behavior of p-adic L-functions at s=0, Invent,Math.,50(1978),91-102.

[6] H.Hasse, On a Question of Chowla, Acta arith.,18(1971), 275-280.

[7] N.Koblitz, A new proof for the certain formulas for p-adic L-functions, Duke Math.J.,46(1979),455-468.

[8] K.Shiratani, On Euler numbers, Mem.Fac.Sci., Kyushu Univ., 27(1973),1-5.

[9] K.Shiratani, On some operators for p-adic uniformly differentiable functions, Japan.J.Math.,2(1976),343-353.

[10] K.Shiratani and S.Yamamoto, On a p-adic interpolation function for the Euler numbers and its derivatives, Mem.Fac. Sci.,Kyushu Univ.,39(1985),113-125.

[11] L.Washington, Units of irregular cyclotomic field, Ill.J. Math.,23(1979),635-647.

[12] L.Washington, Introduction to cyclotomic fields, Springer, Berlin-Heidelberg-New York,1982.

[13] H.Tsumura, On a p-adic interpolation of the generalized Euler numbers and its applications, preprint.