数理解析研究所講究録
第 589 巻 1986 年 161-181

Scholz の Number Knot の中心解について

名大教養部 三宅 克哉 (Katsuya Miyake)

§1. 序

代数的数体の巡回拡大に対する Hasse Norm Theorem は，いわゆる「Hasse principle」を具現するもののひとつであり，誠に美しい定理である．この定理を Hasse が [3] で証明したとき，彼は同時に，この定理はもはや一般のアーベル拡大に対して拡張することができないことを例示している．従ってこの定理の意味を十分に理解するためにも，例えば，一般のアーベル拡大においては何が生じているのかを見る必要があり，Scholz [13] は中心拡大との関連を見抜いて，この新しい世界への先鞭をつけた．類体論をめぐる代数の十分なる整備がなかった当時においての彼の業績には確かに注目に値うものがある．

さて最近になって Lorenz, Opolka, Steinke 等がこれを精力的に研究し，特に Steinke [16] は奇数次アーベル拡大に

関して著しい結果を与えた．更に，それについて，Opolka [12]が見事に分析を果して，その背後にある構造を指摘した．この小論では，これらを紹介するとともに，更により精緻な分析を進め，興味ある結果と問題を提示することに努める．

§2. Scholz の Number knot

有限次代数的数体の拡大 K/k を定め，$K_A^\times$, $k_A^\times$ をそれぞれのイデール群とし，$N_{K/k}: K_A^\times \to k_A^\times$ をノルム写像とする．このとき，剰余群

$$\mathfrak{K}(K/k) = k^\times \cap N_{K/k}(K_A^\times) / N_{K/k}(K^\times)$$

を，Scholz[13]にならって，K/k の Number knot という．

<u>定理</u>（Hasse[3]）．もし K/k が巡回拡大であれば，$\mathfrak{K}(K/k) = 1$, i.e. $k^\times \cap N_{K/k}(K_A^\times) = N_{K/k}(K^\times)$．

以下では K/k がガロワ拡大であるとし，そのガロワ群を $\mathfrak{g} = Gal(K/k)$ であらわす．体 k の各素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，K の素イデアル $\mathfrak{P}$ で $\mathfrak{p}$ の上にあるものをひとつずつ定めておき，$\mathfrak{P}$ の分解群を $\mathfrak{g}(\mathfrak{p})$ と表わすことにする．加法群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{p})$ が自明に作用するとき

<u>定理</u>（Scholz [13], Tate [17]）．

$$\mathfrak{K}(K/k) \simeq \widehat{\mathrm{Ker}}\left(\Lambda_{K/k}: H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathfrak{g}(\mathfrak{p}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right).$$

ここで右辺の$\Lambda_{K/k}$は$\mathfrak{g}$から$\mathfrak{g}(\mathfrak{p})$への制限写像の直和として得られる局所化準同型写像であり，$\widehat{\mathrm{Ker}}$はこれのkernelのdual groupをあらわす．巡回群に対しては，そのSchur multiplier $H^2(\mathfrak{g}(\mathfrak{p}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$は消えるから，右辺の直和は分岐する有限個の$\mathfrak{p}$にわたるものとしてよい．Scholzの頃にはまだコホモロジーは無かったが，本質的にはこの結果が得られていたと見るのが妥当である．

§3. Number knotの中心解

まず定義を与える．

<u>定義</u>．有限次拡大体$L/K/k$が$\mathfrak{K}(K/k)$の中心解であるとは，これがK/kの中心拡大，即ちL/kがガロワ拡大であって$\mathrm{Gal}(L/K)$が$\mathrm{Gal}(L/k)$の中心に含まれているもの，であって，しかも

$$k^\times \cap N_{L/k}(L_A^\times) \subset N_{K/k}(K^\times)$$

が成り立つものをいう．

さて L が $\mathfrak{K}(K/k)$ の中心解であるとき，K/k に関するその genus field $L^* = L \cap K \cdot k_{ab}$（但し k_{ab} は $\mathbb{Q}$ の代数的閉包内での k の最大アーベル拡大）をとれば，$\mathrm{Gal}(L/L^*)$ から $\mathfrak{K}(K/k)$ の上への自然な準同型写像が存在する．実際，K 上のアーベル拡大 $K \cdot k_{ab}$ と L とを，類体論を用いて，$K_A^\times$ の閉部分群と対応させれば，$K^\#$ を $K_A^\times$ 内での $K^\times \cdot K_{\infty+}^\times$ の閉包とするとき，それらはそれぞれ，$N_{K/k}^{-1}(k^\times) \cdot K^\#$ と $N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\# = N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times$ とに対応する．従って $L^* = L \cap K \cdot k_{ab}$ には $N_{K/k}^{-1}(k^\times) \cdot N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times$ が対応し，故に

$$\mathrm{Gal}(L/L^*) \simeq N_{K/k}^{-1}(k^\times) \cdot N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times / N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times$$

$$\simeq N_{K/k}^{-1}(k^\times) / N_{K/k}^{-1}(k^\times) \cap N_{L/K}(L_A^\times) \cdot K^\times$$

であるが，最後の剰余群は $N_{K/k}$ により

$$k^\times \cap N_{K/k}(K_A^\times) / (k^\times \cap N_{L/k}(L_A^\times)) \cdot N_{K/k}(K^\times)$$

の上に準同型にうつされる．ところが，L が $\mathfrak{K}(K/k)$ の中心解であることから，$k^\times \cap N_{L/k}(L_A^\times) \subset N_{K/k}(K^\times)$ であって，この剰余群は $\mathfrak{K}(K/k)$ に他ならない．

そこで，この準同型 $\mathrm{Gal}(L/L^*) \to \mathfrak{K}(K/k)$ の kernel に対応する L/L^* の中間体と L とをとりかえれば，今度は，$\mathrm{Gal}(L/L^*)$ と $\mathfrak{K}(K/k)$ とが同型になる．

定理. $\mathfrak{K}(K/k)$ の中心解 L で $Gal(L/L^*)$ が自然に $\mathfrak{K}(K/k)$ と同型になるものが存在する.

注意. 中心拡大に関しては, $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の dual group をとり, それを $\mathfrak{M}(g)$ とするとき, K/k の中心拡大 L で $Gal(L/L^*)$ が自然に $\mathfrak{M}(g)$ と同型になるものが存在し, 更に, どんな中心拡大 L に対しても, $\mathfrak{M}(g)$ から $Gal(L/L^*)$ の上への準同型写像が定まる. よって特に $\mathfrak{M}(g)$ から $\mathfrak{K}(K/k)$ の上への準同型写像があるが, これは丁度 $H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ への, Scholz-Tate の定理における部分群 $Ker\,\Lambda_{K/k}$ の inclusion map に対応する dual map になっている. (Cf. Miyake [6].)

問題. この定理にあるような $\mathfrak{K}(K/k)$ の中心解 L について, その genus field $L^* = L \cap K\cdot k_{ab}$ をどれ程小さくできるのか? 次数においては? 分岐においては?

注意. 同様な問題を, $\mathfrak{K}(K/k)$ のかわりに $\mathfrak{M}(g)$ に関して考えることができるが, それについては Miyake [7] および, Miyake and Ormerod [8] を参照のこと. 特に K/k が不分岐であれば $\mathfrak{K}(K/k) \cong \mathfrak{M}(g)$ であり, このときもし, 各自然数 m について, $k^\times \cap k_A^{\times m} = k^{\times m}$ が成り立っていれば,

$L^* = K$ となる L が存在する.

§4. Einbettungsproblem としてのアプローチ

さて有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ に対し, $\mathfrak{G}(k)=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$, $\mathfrak{G}(K)=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ とおく. 後者は前者の正規部分群であり, $\mathfrak{g}=\mathrm{Gal}(K/k)=\mathfrak{G}(k)/\mathfrak{G}(K)$ である.

いま, $\mathfrak{g}$ が作用する有限アーベル群 A の $\mathfrak{g}$ による群拡大 G が与えられたとき, 準同型写像 $\varphi : \mathfrak{G}(k) \longrightarrow G$ で

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{G}(k) \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr] & & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

なる可換図形が得られるものを見出せというのが Einbettungsproblem である. かかる φ が存在すれば, その kernel を $\mathfrak{H}$ とするとき, これは当然 $\mathfrak{G}(k) \to \mathfrak{g}$ の kernel $\mathfrak{G}(K)$ に含まれる. 従って φ は自然に $\mathfrak{G}(K)$ を A の中に写す. そこで $\mathfrak{H}$ に対応する $\overline{\mathbb{Q}}/K$ の中間体を L とすれば, これは k 上ガロワ拡大であり, φ によって $\mathrm{Gal}(L/k)$ および $\mathrm{Gal}(L/K)$ は, それぞれ G および A の部分群と同型になる.

以下では中心拡大, 即ち $\mathfrak{g}$ が A に自明に作用する場合を考

える．群拡大 $\mathfrak{g}(K)\to\mathfrak{g}(k)\to g$ の因子団 $\xi(\sigma,\tau)$，$(\sigma,\tau\in g)$ を定めるとき，$\varphi\circ\xi$ は $H^2(g,A)$ のひとつの類を定める．そこで Hochschild-Serre の完全列

$$\to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}(k),A)\to\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}(K),A)^{\mathfrak{g}(k)}\xrightarrow[t]{} H^2(g,A)\xrightarrow[\lambda]{} H^2(\mathfrak{g}(k),A)$$

をとり，拡大 $A\to G\to g$ に対する $H^2(g,A)$ の類 $\bar\eta$ をとるとき，$\bar\eta$ は $\varphi\circ\xi$ の類 $(=-t(\varphi|\mathfrak{g}(K)))$ と一致する．従って，$\lambda(\bar\eta)=0$ である．逆に $\bar\eta\in\mathrm{Ker}\,\lambda$ であれば，ある準同型写像 $\varphi_0:\mathfrak{g}(K)\to A$ で $\mathfrak{g}(k)$ 不変なものに対して $\bar\eta=-t(\varphi_0)$ となっており，これから $\varphi:\mathfrak{g}(k)\to G$ を構成して $\varphi\circ\xi$ の類と $\bar\eta$ とが一致するようにできる．この φ が $\bar\eta\in H^2(g,A)$ に対応する群拡大 $A\to G\to g$ に対する Einbettungsproblem の解を与えるわけである．

<u>命題</u>．群拡大 $A\to G\to g$ に対する Einbettungsproblem が解をもつための必要十分条件は，この群拡大に対応する類 $\bar\eta\in H^2(g,A)$ が $\mathrm{Ker}(\lambda:H^2(g,A)\to H^2(\mathfrak{g}(k),A))$ に属することである．

ここで特に類 $\bar\eta$ に属する 2-cocycle η をどのように選んでも $A=\langle\eta(\sigma,\tau)\mid\sigma,\tau\in g\rangle$ となっていれば，対応する準

同型写像 $\varphi: \mathfrak{G}(k) \to G$ および $\varphi_0: \mathfrak{G}(K) \to A$ は上への写像になる.

さて中心拡大に関しては, $\mathfrak{g}$ の Schur multiplier $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が決定的な役割を果す. まず $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の類 $\bar{\eta}$ をとり, その位数を $l(\bar{\eta})$ とする. このとき 2-cocycle $\eta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ でその値が丁度 $\frac{1}{l(\bar{\eta})}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ 全体になるようにできる. 従って $l(\bar{\eta})$ の倍数 m をとれば η は $H^2(\mathfrak{g}, \frac{1}{m}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ の類を定め, この類の位数も $l(\bar{\eta})$ である. もしこの類に対する拡大 $\frac{1}{m}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to G \to \mathfrak{g}$ について Einbettungsproblem の解 $L(\bar{\eta})/K/k$ が得られたなら, $Gal(L/K)$ は $\frac{1}{m}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ の部分群 $\frac{1}{l(\bar{\eta})}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ に同型に写される. 一方 η のとり方から $G/(\frac{1}{l(\bar{\eta})}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ は自明な中心拡大であるアーベル群 $(\frac{l(\bar{\eta})}{m}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z})\times\mathfrak{g}$ と同型になっていることから, G の交換子群を $[G, G]$, 中心を $Z(G)$ とするとき

$$[G, G] \cap Z(G) = \frac{1}{l(\bar{\eta})}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

となっており, これを拡大体のほうにうつせば

$$Gal(L(\bar{\eta})/L(\bar{\eta}) \cap K\cdot k_{ab}) \simeq \frac{1}{l(\bar{\eta})}\cdot\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

が得られる. 最後の群が自然に $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の部分群 $\langle\bar{\eta}\rangle$ の dual group に対応しており, $\mathfrak{H}(\mathfrak{g})$ の dual group を $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ と同一視して $\bar{\eta}$ を $\mathfrak{H}(\mathfrak{g})$ から $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ への写像と見て

$$\mathrm{Gal}(L(\bar{\eta})/L(\bar{\eta})\cap K\cdot k_{ab}) \simeq \mathfrak{r}(g)/\mathrm{Ker}\,\bar{\eta} \simeq \widehat{\langle \bar{\eta} \rangle}$$

が自然に得られたことになっている．そこで $\bar{\eta}\in H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の各々に対して解があるような $l(\bar{\eta})$ の倍数 m を選んで $L(\bar{\eta})$ を作り，その合併体を L とすれば，K/k の中心拡大であって $\mathrm{Gal}(L/L\cap K\cdot k_{ab}) \simeq \mathfrak{r}(g)$ となるものが得られる．

ここに前節の最後にあげた問題について，次を得る：

<u>問題</u>．各 $\bar{\eta}\in H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ について，$l(\bar{\eta})$ の倍数 m で，対応する群拡大 $\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to G \to g$ についての Einbettungs-problem が解をもつもののうちで最小の $m = m(\bar{\eta})$ を決定せよ．

特に $\mathfrak{K}(K/k)$ の中心解に限定すれば，そのときは，部分群 $\mathrm{Ker}\,\Lambda_{K/k}$ に属する $\bar{\eta}$ について考察すればよいことになる．

§5．コホモロジー群 $H^2(\mathfrak{g}(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ の分析

自然数 m を定め，$x\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に対し $\pi(x) = \pi(m; x) = m\cdot x$ によって準同型写像 $\pi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を定める．完全列

$$0 \longrightarrow \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

から$\mathfrak{g}(k)$のコホモロジー群の完全列

$$\to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathfrak{g}(k), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \to H^2(\mathfrak{g}(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が得られるが，最後の項は，よく知られているように0に等しい．(Cf. Serre [14], p227.)

<u>定理</u> (Tate) $H^2(\mathfrak{g}(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

さて$\mathfrak{g}(k)$の交換子群を$[\mathfrak{g}(k), \mathfrak{g}(k)]$と書けば

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}(k)/[\mathfrak{g}(k), \mathfrak{g}(k)], \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

であり，更に類体論により

$$\mathfrak{g}(k)/[\mathfrak{g}(k), \mathfrak{g}(k)] \simeq k_A^\times / k^\#$$

である．そこで $\pi = \pi(m;\cdot) : k_A^\times \to k_A^\times$ を $\pi(x) = x^m$ ($x \in k_A^\times$) によって定めれば，上のδにより自然に

$$H^2(\mathfrak{g}(k), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Coker}(\pi^* : \mathrm{Hom}(k_A^\times/k^\#, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(k_A^\times/k^\#, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

が得られる．更に完全列

$$1 \longrightarrow \pi^{-1}(k^\#)/k^\# \longrightarrow k_A^\times/k^\# \xrightarrow{\pi} k_A^\times/k^\#$$

により，この $\mathrm{Coker}(\pi^*)$ は $\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(k^{\#})/k^{\#}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ と同型である．そこで

$$X(k;m) = k^{\times} \cap k_{A}^{\times m} / k^{\times m}$$

と置けば，$|X(k;m)| \leqq 2$ であり，$|X(k;m)| = 2$ となる条件もすべて明らかになっている (Artin-Tate [1], pp 93-98)．またよく知られているように（例えば [5], p 272），$k^{\#} \cap k_{A}^{\times m} = (k^{\times} \cap k_{A}^{\times m}) \cdot k^{\# m}$，$k^{\times} \cap k^{\# m} = k^{\times m}$ および $\{x \in k^{\#} \mid x^m = 1\} \subset k^{\times} \cdot k_{\infty +}^{\times}$ が成り立っている．従って完全列

$$1 \to \pi^{-1}(1)/\pi^{-1}(1) \cap k^{\times} \cdot k_{\infty +}^{\times} \to \pi^{-1}(k^{\#})/k^{\#} \xrightarrow{\pi} X(k;m) \to 1$$

が得られることは見易い．そこで dual groups にうつって

$$0 \to \mathrm{Hom}(X(k;m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(k^{\#})/k^{\#}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
$$\to \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(1)/\pi^{-1}(1) \cap k^{\times} \cdot k_{\infty +}^{\times}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

を得る．各素点 $\mathfrak{p}$ に対し $\pi_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}(m;\cdot) : k_{\mathfrak{p}}^{\times} \to k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ を $\pi_{\mathfrak{p}}(x) = x^m$ $(x \in k_{\mathfrak{p}}^{\times})$ によって定めれば，$\pi^{-1}(1) = \prod_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(1)$ を得る．そこで $\iota_{\mathfrak{p}} : k_{\mathfrak{p}}^{\times} \hookrightarrow k_{A}^{\times}$ を自然な埋め込みとし，その dual 写像を $\hat{\iota}_{\mathfrak{p}}$ とすれば

$$\bigoplus_{\mathfrak{p}} \hat{\iota}_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(1)/\pi^{-1}(1) \cap k^{\times} \cdot k_{\infty +}^{\times}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}(\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

は injective である．このようにして完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}(X(k;m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(\mathfrak{g}(k), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}(\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が得られる．また上で $H^2(\mathfrak{g}(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ と $\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(k^{\#})/k^{\#}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ との同型を得たときの処方を局所体 $k_{\mathfrak{p}}$ にあてはめれば，やはり Tate の定理が成り立っているから

$$H^2(\mathfrak{g}(k_{\mathfrak{p}}), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_{\mathfrak{p}}^{-1}(1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が得られる．ここに $\mathfrak{g}(k_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Gal}(\overline{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$, $\overline{k}_{\mathfrak{p}}$ は $k_{\mathfrak{p}}$ の代数的閉包，である．従って次を得る：

<u>命題</u>．代数的数体 k の $\mathfrak{p}$ 進完備化 $k_{\mathfrak{p}}$ について，$\mu_m(k_{\mathfrak{p}}) = \{\zeta \in k_{\mathfrak{p}}^{\times} \mid \zeta^m = 1\}$ とするとき，$H^2(\mathfrak{g}(k_{\mathfrak{p}}), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ は $\mu_m(k_{\mathfrak{p}})$ の dual group と同型である．

<u>定理</u>．上記の記号のもとで，各自然数 m に対し，自然に

$$0 \to \mathrm{Hom}(X(k;m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(\mathfrak{g}(k), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathfrak{g}(k_{\mathfrak{p}}), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$$

なる完全列が得られる．ここで最後の準同型写像は，埋込み $k \hookrightarrow k_{\mathfrak{p}}$ にともなう $\overline{k} \hookrightarrow \overline{k}_{\mathfrak{p}}$ によって得られる埋込み $\mathfrak{g}(k_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \mathfrak{g}(k)$，即ち，$\sigma \in \mathfrak{g}(k_{\mathfrak{p}})$ に $\sigma|_{\overline{k}} \in \mathfrak{g}(k)$ を対応させる写像から定まるものである．

<u>注意</u>. 特に $X(k;m)=1$ のとき, この定理は Hoechsmann [4] あるいは Neukirch [9] によってよく知られたものである.

応用のためには, 自然な埋込み $j: \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ によって与えられる $j^*: H^2(\mathfrak{g}(k), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \to H^2(\mathfrak{g}(k), \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ によって $\mathrm{Hom}(X(k;m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に対応する部分群がどこにうつされるかを知っておく必要がある. 上述の対応をすべて詳しくたどれば, これが $k_A^\times$ の恒等写像 $id: k_A^\times \to k_A^\times$ から自然に引きおこされる写像 $\overline{id}: X(k;2m) \to X(k;m)$ と対応していることが判る. しかもよく知られているように $k^\times \cap k_A^{\times 2m}$ は $k^{\times m}$ に含まれており, この $\overline{id}$ は trivial, i.e. $\overline{id}(X(k;2m)) = 1$, である.

<u>命題</u> 自然な埋め込み $j: \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \frac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ によって得られる準同型写像

$$j^*: H^2(\mathfrak{g}(k), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \to H^2(\mathfrak{g}(k), \tfrac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$$

に対し, 上の定理による $\mathrm{Hom}(X(k;m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の像は $\mathrm{Ker}\, j^*$ に含まれる.

ここに次の可換図形が得られた:

可換図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\Lambda_{K/k} \arrow[r] & H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\Lambda_{K/k}"] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathfrak{g}(\mathfrak{p}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
 & & H^2(\mathfrak{g}, \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \arrow[u, "i^*"] \arrow[r, "\Lambda^{(m)}_{K/k}"] \arrow[d, "\lambda=\lambda_m"'] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathfrak{g}(\mathfrak{p}), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \arrow[u, "i^*"'] \arrow[d, "\oplus\lambda_{\mathfrak{p}}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X(k;m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{id}=0"] & H^2(\mathfrak{G}(k), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\Lambda_m"] \arrow[d, "j^*"'] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathfrak{G}(k_{\mathfrak{p}}), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "j^*"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X(k;2m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(\mathfrak{G}(k), \tfrac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\Lambda_{2m}"] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathfrak{G}(k_{\mathfrak{p}}), \tfrac{1}{2m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}
$$

§6. Steinke, Opolka の結果とその改良

上記可換図式をもとに, §4 の最後にとり出した問題, 特に $\mathfrak{K}(K/k)$ の中心解に関するものをしらべる. まず $\bar{\eta} \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ をとり, その位数 $l(\bar{\eta})$ の倍数 m をとる. 加法的に書いているから $m\cdot\bar{\eta}=0$ である. このとき $\hat{\eta} \in H^2(\mathfrak{g}, \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ であって $i^*(\hat{\eta})=\bar{\eta}$ となるものがある. かかる $\hat{\eta}$ をうまく選べば $\lambda(\hat{\eta})=0$ となるかどうかが問題である. そこで更に Λ_m でうつして分析すれば $\Lambda_m\circ\lambda=\oplus\lambda_{\mathfrak{p}}\circ\Lambda^{(m)}_{K/k}$ により, 局所化が可能になる. それと引きかえに, $\Lambda_m\circ\lambda(\hat{\eta})=0$ からは, $|X(k;m)|\lambda(\hat{\eta})=0$ しか得られない. そこで $|X(k;m)|=2$ の場合は, 更に j^* でうつして $j^*\circ\lambda(\hat{\eta})=0$

を得ることになる．即ち m を $2m$ で置き換えればよい．

もし K/k が不分岐拡大であれば（アーベル拡大でなくても），どの m に対しても $\oplus\lambda_g = 0$ であることが知られている．しかも このとき $\hat{\mathfrak{K}}(K/k) \cong \widehat{\mathrm{Ker}\Lambda_{K/k}} = \widehat{H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ であった．従って Miyake [7] の結果が改良され，次を得る．

__定理__　もし K/k が不分岐ガロワ拡大であれば，$H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ のどの $\bar{\eta}$ についても $m(\bar{\eta}) \mid 2\cdot l(\bar{\eta})$ である．特に $k^\times \cap k_A^{\times l(\bar{\eta})} = k^{\times l(\bar{\eta})}$ であれば $m(\bar{\eta}) = l(\bar{\eta})$ が成り立つ．

Opolka [12] の結果は，次の形に改良される．

__定理__　有限次アーベル拡大 K/k に対し，次が成り立つ．

(1) もし $\bar{\eta} \in \mathrm{Ker}\Lambda_{K/k} \cap 2\cdot H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ならば $m(\bar{\eta}) \mid 2\cdot l(\bar{\eta})$．特に $k^\times \cap k_A^{\times l(\bar{\eta})} = k^{\times l(\bar{\eta})}$ であれば $m(\bar{\eta}) = l(\bar{\eta})$．

(2) 従って $\bar{\eta} \in \mathrm{Ker}\Lambda_{K/k}$ について，もし $l(\bar{\eta})$ が奇数であれば $m(\bar{\eta}) = l(\bar{\eta})$．

この (2) から直ちに次の Steinke の結果が得られる．

__定理__（Steinke [16]）奇数次アーベル拡大 K/k に対して

は $\mathfrak{K}(K/k)$ の中心解 L で $L \cap K\cdot k_{ab} = K$ となるものが存在する．

<u>問題</u>. K/k がアーベル拡大のとき，一般に $\bar{\eta} \in \mathrm{Ker}\,\Lambda_{K/k}$ に対して必ず $m(\bar{\eta}) \mid 2\cdot l(\bar{\eta})$ が成り立つか？

§7. Yamazaki [18] から.

上記定理の (1) を証明するにあたっては類 $\bar{\eta} \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に対する 2-cocycle $\eta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の選び方が本質的であり，そのために Yamazaki [18] の特に §2, pp 155–161 を復習し，Lemma をひとつ与える必要がある.

ここでは $\mathfrak{g}$ がアーベル群であるとする.

さて，cocycle $\eta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が，すべての $\sigma, \tau, \omega \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{cases} \eta(\sigma, \tau\omega) = \eta(\sigma, \tau) + \eta(\sigma, \omega), \\ \eta(\sigma\tau, \omega) = \eta(\sigma, \omega) + \eta(\tau, \omega), \end{cases}$$

を満たすとき，η は pairing と呼ばれる; また

$$\eta(\sigma, \tau) = \eta(\tau, \sigma) \qquad (\sigma, \tau \in \mathfrak{g})$$

となっているとき，η は abelian であるという; 特に

$$\eta \in B^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \eta \text{ は abelian}$$

となっている; 更に η の属する $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の類を $\bar{\eta}$ とし，

その位数を $l(\bar{\eta})$ とするとき

$$\rho(\sigma, \tau) := \eta(\sigma, \tau) - \eta(\tau, \sigma) \qquad (\sigma, \tau \in g)$$

とおけば $\rho \in Z^2(g, \frac{1}{l(\bar{\eta})}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ である; しかもどの $\eta \in Z^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ についても $Z^2(g, \frac{1}{l(\bar{\eta})}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ に属する pairing η_0 であって, 各 $\sigma, \tau \in g$ に対し

$$\eta_0(\sigma, \tau) - \eta_0(\tau, \sigma) = \eta(\sigma, \tau) - \eta(\tau, \sigma)$$

となるものが存在する; このとき $\eta_0 - \eta$ は abelian であり, 従って η_0 は $\bar{\eta}$ に属する. 但しすべての cochain は 'normalized', i.e. $\eta(1, \tau) = \eta(\sigma, 1) = 0$ $(\sigma, \tau \in g)$, であるとする.

Yamazaki [18], p160, Remark により, 次の lemma が得られる.

__Lemma.__ Cocycle $\eta \in Z^2(g, \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ が pairing であるとき, もし $2\cdot\eta$ が abelian であれば $2\cdot\eta \in B^2(g, \frac{2}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$.

§8. 定理 (1) の証明

K/k がアーベル拡大, 即ち g がアーベル群であるとし, $\bar{\eta} \in \mathrm{Ker}\,\Lambda_{K/k} \cap 2\cdot H^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ をとる. まず 2-cocycle $\xi \in Z^2(g, \frac{1}{l(\bar{\xi})}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ で pairing であり, $\bar{\eta} = 2\cdot\bar{\xi}$ となるものをとる. このためには, まず $\rho \in Z^2(g, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を $\bar{\eta}$

$= 2\cdot\bar{\rho}$ となるようにとり，次に $Z^2(\mathfrak{g}, \frac{1}{l(\bar{\rho})}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ の pairing ξ で，各 $\sigma, \tau \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\xi(\sigma,\tau)-\xi(\tau,\sigma)=\rho(\sigma,\tau)-\rho(\tau,\sigma)$$

となるものをとる；このとき $\xi-\rho \in B^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ であるから $l(\bar{\xi})=l(\bar{\rho})$ である．一方 $\bar{\eta}$ に属する cocycle η をとれば

$$\begin{aligned}\eta(\sigma,\tau)-\eta(\tau,\sigma) &= 2\rho(\sigma,\tau)-2\rho(\tau,\sigma)\\ &= 2\xi(\sigma,\tau)-2\xi(\tau,\sigma)\end{aligned}$$

がすべての $\sigma, \tau \in \mathfrak{g}$ に対して成り立ち，よって $\eta-2\cdot\xi$ は $B^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に属する；即ち $\bar{\eta}=2\cdot\bar{\xi}$．そこで $\eta= 2\xi$ ととりなおす．このとき η は $Z^2(\mathfrak{g}, \frac{1}{l(\bar{\eta})}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ の pairing である．そこで $m=l(\bar{\eta})$ に対して §5 の可換図式において $\Lambda_m\circ\lambda(\bar{\eta})$ をしらべる．この η において η を $\mathfrak{g}(\mathfrak{p})$ に制限して得られる $\eta_{\mathfrak{p}}$ はやはり $Z^2(\mathfrak{g}(\mathfrak{p}), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ の pairing になっており，$\eta_{\mathfrak{p}}=2\cdot\xi_{\mathfrak{p}}$ である．しかも $\bar{\eta}\in \mathrm{Ker}\,\Lambda_{K/k}$ より，各 $H^2(\mathfrak{g}(\mathfrak{p}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の中では $\bar{\eta}_{\mathfrak{p}}=0$, i.e. $\eta_{\mathfrak{p}}\in B^2(\mathfrak{g}(\mathfrak{p}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, である．故に $\eta_{\mathfrak{p}}$ は abelian であり，前節の lemma より

$$\eta_{\mathfrak{p}}=2\xi_{\mathfrak{p}}\in B^2\Big(\mathfrak{g}(\mathfrak{p}), \frac{2}{l(\bar{\xi})}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\Big)$$

を得るが，

$$\frac{2}{l(\bar{\xi})}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}=\frac{1}{l(\bar{\eta})}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}=\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

であることは見易い. 故に各$\mathfrak{p}$において$\hat{\eta}_{\mathfrak{p}}=0$となっており, $\Lambda_m\circ\lambda(\hat{\eta})=0$を得る. 以下は§6の不分岐拡大の場合に用いた論議をくり返せばよい.

§9. 最大不分岐中心拡大

この節ではK/kが有限次不分岐ガロワ拡大であるとし, $C(K/k)$でK/kの最大不分岐中心拡大をあらわすことにする. また$\mathcal{O}^\times(k)$でkの単数群を, $\hat{k}$でkの絶対類体をあらわす. 類体論より, 例えばFuruta[2]に見られるように, 次が得られる:

<u>定理</u> 上記の仮定と記号のもとで, 次の完全列が成り立つ.

$$1\longrightarrow \mathcal{O}^\times(k)/\mathcal{O}^\times(k)\cap N_{K/k}(K^\times)\longrightarrow \mathfrak{K}(K/k)\longrightarrow Gal(C(K/k)/K\cdot\hat{k})\longrightarrow 1.$$

ここで$C(K/k)$のK/kに関するgenus fieldは$K\cdot\hat{k}$である.

<u>問題</u> K/kが不分岐アーベル拡大のとき

$$[\,\mathcal{O}^\times(k):\mathcal{O}^\times(k)\cap N_{K/k}(K^\times)\,]=1$$

が必ず成り立つであろうか?

もしK/kが不分岐巡回拡大なら，Hasse norm theoremにより答はYesである．一方もし$k^\times \cap k_A^{\times[K:k]} = k^{\times[K:k]}$であるならば，$K/k$の中心拡大Lで$L \cap K\cdot k_{ab} = K$であり，従って$Gal(L/K) \simeq \hat{R}(K/k)$となるものが存在した．かかるLで，$L\cdot\tilde{k} \supset C(K/k)$となるものが存在するか？

もし$[\mathcal{O}^\times(k) : \mathcal{O}^\times(k) \cap N_{K/k}(K^\times)] \neq 1$ならば，$K/k$の中心拡大を考えるとき$C(K/k)$では十分大きいとはいえない．そうであるとしたら，上のようなLで分岐が極小であるものについて，その分岐とkの単数の剰余群

$$\mathcal{O}^\times(k)/\mathcal{O}^\times(k) \cap N_{K/k}(K^\times)$$

との関係はいかなるものか？

文献

[1] E.Artin and J.Tate, Class Field Theory, Benjamin(1967).

[2] Y.Furuta, On nilpotent factors of congruent ideal class groups of Galois extensions, Nagoya Math. J.62(1976),13-28.

[3] H.Hasse, Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol, Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.H1(1931),64-69 = Math. Abhand. Bd.1, 155-160.

[4] K.Hoechsmann, Zum Einbettungsproblem, J. reine angew. Math. 229(1968),81-106.

[5] K.Miyake, Models of certain automorphic function fields, Acta Math.126(1971),245-307.

[6] ———, Central extensions and Schur's multiplicators of Galois groups, Nagoya Math. J.90(1983),137-144.

[7] ———, On central extensions of a Galois extension of algebraic number fields, Nagoya Math. J.93(1984),133-148.

[8] K.Miyake and N.Ormerod, Abundant central extensions of non-trivial genera, Nagoya Math. J.95(1984),51-62.

[9] J.Neukirch, Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie, Invent. math.21(1973),59-116.

[10] H.Opolka, Zur Auflösung zahlentheoretischer Knoten, Math. Z. 173(1980),95-103.

[11] ———, Some remarks on the Hasse norm theorem, Proc. Amer. Math. Soc.84(1982),464-466.

[12] ———, Normenreste in relative abelschen Zahlkörpererweiterungen und symplectischen Paarungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 54(1984),1-4.

[13] A.Scholz, Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen I, II : I, J. reine angew. Math.175(1936),100-107; II , 182(1940),217-234.

[14] J.-P.Serre, Modular forms of weight one and Galois representations, in A.Fröhlich(ed.), Algebraic Number Field, Acad. Press (1977),193-268.

[15] S.Shirai, On the central class field mod of Galois extensions of an algebraic number field, Nagoya Math. J.71(1978),61-85.

[16] G.Steinke, Über Auflösungen zahlentheoretischer Knoten, Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster, Ser.2,25, Univ. Münster, Math. Inst., Münster(1983).

[17] J.Tate, Global class field theory, in J.W.S.Cassels and A. Fröhlich(ed.), Algebraic Number Theory; Acad. Press(1967),162-203.

[18] K.Yamazaki, On projective representations and ring extensions of finite groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.IA Math.10(1964), 147-195.