数理解析研究所講究録
第 590 巻 1986 年 1-13

On estimation of a regression model with correlated errors

東京工大・理　矢島美寛　(Yoshihiro Yajima)

§1. 序

Granger and Joyeux (1980), Hosking (1981) は観測値間の相関の強い定常時系列データを解析する為、Long-memory Model を提案している。確率変数列 $\{\varepsilon_t\}$ に対し、backward shift operator を $B\varepsilon_t=\varepsilon_{t-1}$, fractional difference operator を

$$\nabla^d=(1-B)^d=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{d}{k}(-B)^k, \qquad (1)$$

で定義する。(注. ∇^d は Hilbert 空間上の operator 理論を用い数学的に定義可能)　$\{\varepsilon_t\}$ が次式を満足する時 ARIMA(p,d,q) process (Long-memory process) と呼ぶ。

$$\phi(B)\nabla^d\varepsilon_t=\theta(B)a_t, \qquad (2)$$

ここで p,q は非負整数、d は実数で、∇^d は (1) 式で定義される. また

$$\phi(B)=1-\phi_1B-\cdots-\phi_pB^p,\ \theta(B)=1-\theta_1B-\cdots-\theta_qB^q,$$

で $\phi(z)\neq 0,\ \theta(z)\neq 0,\ |z|\leq 1$ を満足する。$\{a_t\}$ は無相関で

$Ea_t=0$, $Ea_t^2=\sigma_a^2$(一定)である。 このモデルはdが非負整数の時、Box and Jenkins (1976)によって提案されたARIMA Modelを一般化したものである。$d<1/2$の時は、(2)式を満足する定常時系列$\{\varepsilon_t\}$が存在し、そのスペクトラル密度は

$$f(\lambda;d)=(\sigma_a^2/2\pi)|\theta(e^{i\lambda})|^2/|\phi(e^{i\lambda})(1-e^{i\lambda})^d|^2,$$

となり、特に$0<d<1/2$の時 $\lambda\to0$の際、$f(\lambda;d)$は発散する。一方自己共分散$\gamma_h(d)=E\varepsilon_t\varepsilon_{t+h}$は

$$\gamma_h(d)=O(h^{2d-1})\ (h\to\infty), \qquad (3)$$

となり、通常のARMA process等に比し、0への収束が遅くなる。

本論文では誤差項$\{\varepsilon_t\}$が上述のARIMA(p,d,q) processに従う回帰モデルのパラメータ推定について論じる

<u>モデル</u> $y_t=X_t'\beta+\varepsilon_t$,

where y_t; an observed sequence

$X_t=(x_{t1},\cdots,x_{tl})'$ a l-vector of nonstochastic regressers,

$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_l)'$ unknown parameters

$\varepsilon_t\sim$ an ARIMA(p,d,q) process.

$Y_T=(y_1,\cdots,y_T)'$を観測値として、次の様な推定方法を用いる。

(a) まず回帰パラメータβをLSE($\hat\beta_T$, say)で推定する。

(b) 次に$\hat\varepsilon_{t,T}\equiv y_t-X_t'\hat\beta_T$を真の$\varepsilon_t$とみなし、通常時系列解

析の分野で用いられる方法により $(d, \sigma_a^2, \theta_1, \cdots, \theta_q, \phi_1, \cdots, \phi_p)$ を推定する.

以下では $0<d<1/2$ とする. したがってスペクトラル密度は有界でなく、誤差項間の相関が強いという非正則な状況で、上述の推定量がどのような漸近的性質をもつかを考える.

§2. LSE $\hat{\beta}_T$ の漸近的性質について

本章ではまず $\hat{\beta}_T$ が強一致性を持つ為の、X_t に関する十分条件を導く。次に $\hat{\beta}_T$ の相対効率を調べる為、多項式回帰モデルにおける $\hat{\beta}_T$ と BLUE ($\tilde{\beta}_T$, say) の共分散行列の極限を比較する.

強一致性

$$\hat{\beta}_T = V_T^{-1} \sum_{t=1}^{T} X_t y_t \quad \text{where} \quad V_T \underset{d}{=} \sum_{t=1}^{T} X_t X_t'.$$

定理 1. μ_t を V_t の最小固有値

(i) $\mu_t / t^{2d} \longrightarrow \infty \ (t \to \infty)$,

(ii) $\sum_{t=\ell+2}^{\infty} \log^2 t \cdot t^{2d} / (t\, \mu_{t-1}) < \infty$,

が成立する時、

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \beta \quad a.s.$$

(略証) So Io (1981) の方法に従い以下の2つの式を証明すれば、確率収束の一意性より導かれる。

$$p\text{-}\lim_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \beta. \qquad (4)$$

$$\hat{\beta}_T \text{ converges } a.s. \ (T\to\infty). \qquad (5)$$

$R_T(d)$ を (i,j) 成分が $\gamma_{i-j}(d)$ となる $T\times T$ 行列とする. その時.

正定数 K が存在して

$$R_T(\alpha) < K T^{2\alpha} I_T, \tag{6}$$

が成立する。ここで I_T は $T \times T$ 単位行列、不等号は正定値の意味で定義する。すると条件 (i), (6) 式より (4) が成立する。一方 $\hat{\beta}_T$ は

$$\hat{\beta}_T = \hat{\beta}_{T-1} + V_T^{-1} X_T e_T, \quad e_T \equiv y_T - X_T' \hat{\beta}_{T-1}, \quad T \geq \ell+1,$$

と表現出来る。従って (5) 式は

$$\sum_{t=\ell+1}^{T} \bar{c}_t e_t \text{ converges a.s } (T \to \infty), \tag{7}$$

と同等である。ここで $\bar{c}_t \equiv \alpha' V_t^{-1} X_t$, α は任意の ℓ 次元ベクトル. $v_t^2 \equiv (1 + X_t' V_{t-1}^{-1} X_t)$ とすれば、任意の数列 $\{c_t\}$ に対し

$$\sum_{t=\ell+1}^{\infty} \log^2 t \cdot t^{2\alpha} c_t^2 v_t^2 < \infty, \tag{8}$$

が成立する時

$$\sum_{t=\ell+1}^{T} c_t e_t \text{ converges a.s } (T \to \infty).$$

条件 (ii) の下で、$\{\bar{c}_t\}$ は (8) 式を満足する。従って (7) 式が成立.

<u>系 1</u>. $m_{ij}^T(h) \equiv \sum_{t=1}^{T-h} x_{t+h,i} x_{tj}$, $h \geq 0$,

$\equiv \sum_{t=1-h}^{T} x_{t+h,i} x_{tj}$, $h < 0$.

(C₁) $\rho_{ij}(h) = \lim_{T \to \infty} m_{ij}^T(h) / (\|x_i\|_T \|x_j\|_T)$ が存在,

$1 \leq i, j \leq \ell$, $h = 0, \pm 1, \cdots$ ここで $\|x_i\|_T = (m_{ii}^T(0))^{1/2}$.

(C₂) $\tilde{\rho}(0)$ は nonsingular ここで $\tilde{\rho}(h) = [\rho_{ij}(h)]_{\ell \times \ell}$

(C₁), (C₂) および

$$0 < \liminf_{t \to \infty} \|x_i\|_t^2 / t^{\gamma}, \quad 1 \leq i \leq \ell, \quad {}^{\exists}\gamma > 2\alpha,$$

が成立する時

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \beta \quad a.s.$$

（略証）　$D_t = diag(\|x_1\|_t, \|x_2\|_t, \cdots, \|x_l\|_t)$，$G_t = D_t^{-1} V_t D_t^{-1}$

とおく．この時 $\|\alpha\|=1$ なる任意の l 次元ベクトルに対し

$$\alpha' V_t \alpha \geq \lambda_{min}(G_t) \min_{1\leq i\leq l} \|x_i\|_t^2 .$$

ここで $\lambda_{min}(\cdot)$ は最小固有値を意味する．故に

$$\liminf_{t\to\infty} \mu_t / t^3 \geq \lambda_{min}(\hat{f}(0)) \liminf_{t\to\infty} \min_{1\leq i\leq l} \|x_i\|_t^2 / t^3 > 0.$$

従って μ_t は、定理 1 の条件 (i)，(ii) を満足する．

定理 1 は自己共分散が(3)式をみたす定常過程 $\{\varepsilon_t\}$ でも成立。

また $x_{ti} = \cos \nu_i t, \sin \nu_i t$ or t^{i-1} などは系 1 の条件を満足する．したがって定理 1 は Doob(1953) の Theorem X.6.2 の拡張である。

<u>The limits of the covariance matrices of the LSE and the BLUE</u>

今モデルを

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \cdots + \beta_l t^{l-1} + \varepsilon_t,$$

とする．Grenander(1954) はスペクトル密度が positive, continuous の時．x_t に対するある種の条件のもとで LSE が BLUE に対して漸近有効であることを示した．ここではスペクトル密度が連続でない ARIMA (p, d, q) process に対して LSE の BLUE に関する相対効率を調べる．

<u>定理 2</u>.　$D_T \underset{d}{=} diag(\|x_1\|_T, \cdots, \|x_l\|_T)$　$(x_{ti} = t^{i-1})$

$$\lim_{T\to\infty} D_T E(\hat{\beta}_T-\beta)(\hat{\beta}_T-\beta)' D_T/T^{2d} = \sigma_a^2 |\theta(1)/\phi(1)|^2 M^{-1}H(d)M^{-1}.$$

ここで　$M=(m_{ij}) = (\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2}/(i+j-1))$

$$H(d) = (h_{ij}(d)) = ([\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2}\Gamma(1-2d)/\{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\}]$$
$$\times \int_0^1\int_0^1 x^{i-1}y^{j-1}|x-y|^{2d-1}dxdy)$$ ($\Gamma(z)$; ガンマ関数)

（略証）
$$D_T E(\hat{\beta}_T-\beta)(\hat{\beta}_T-\beta)' D_T/T^{2d}$$
$$=(D_T^{-1}V_T D_T^{-1})^{-1}\{D_T^{-1}\tilde{X}_T' R_T(d)\tilde{X}_T D_T^{-1}/T^{2d}\}(D_T^{-1}V_T D_T^{-1})^{-1}$$

ここで　$\tilde{X}_T$は $T\times\ell$ 行列で (i,j) 成分は $x_{ij}\,(=i^{j-1})$. この時

$$\lim_{T\to\infty} D_T^{-1}V_T D_T^{-1} = M.$$

および

$$\gamma_k(d) \sim \sigma_a^2 |\theta(1)/\phi(1)|^2 \Gamma(1-2d)/\{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\}k^{2d-1}\ (k\to\infty),$$

(Hosking. Theorems 1 and 2)に注意すると、

$$\lim_{T\to\infty} D_T^{-1}\tilde{X}_T' R_T(d)\tilde{X}_T D_T^{-1}/T^{2d} = \sigma_a^2|\theta(1)/\phi(1)|^2 H(d),$$

が成立する。

<u>定理3</u>.

$$\lim_{T\to\infty} D_T E(\tilde{\beta}_T-\beta)(\tilde{\beta}_T-\beta)' D_T/T^{2d} = \sigma_a^2 |\theta(1)/\phi(1)|^2 W^{-1}(d)$$

ここで　$W(d) = (w_{ij}(d)) = ([\Gamma(i-d)\Gamma(j-d)\{(2i-1)(2j-1)\}^{1/2}]$
$/\{\Gamma(i-2d)\Gamma(j-2d)(i+j-1-2d)\})$

（略証）　$x_{t1}=1$, $x_{tj}=\prod_{n=1}^{j-1}(t-n)$, $2\le j\le \ell$ と仮定しても極限の値は同じである。また $\phi(B)\equiv 1$ としても一般性を失なわない。与任意の定数、x_i, $1\le i\le \ell$に対して

$$\sum_{j=1}^{T} \tilde{\tau}_j y_j = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \tilde{\beta}_{i,T},$$

とおく。この時 $\tilde{P}_T(z) \underset{\alpha}{=} \sum_{j=1}^{T} \tilde{\tau}_j z^{j-1}$ は、制約条件

$$P_T^{(k-1)}(1) = x_k, \quad 1 \leq k = \ell,$$

のもとで

$$(\sigma_a^2/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} | P_T(e^{i\lambda}) \theta(e^{i\lambda})|^2 / |1-e^{i\lambda}|^{2d} d\lambda,$$

を最小にする。ここで $P_T(z) \underset{\alpha}{=} \sum_{j=1}^{T} \tau_j z^j$. あとは Grenander and Rosenblatt (1954) の結果を応用する。

定理3は Adenstedt (1974, 定理5.1の系) のひとつの拡張になっている. 今 LSE の relative efficiency を

$$e(d) = \lim_{T\to\infty} \det[E(\tilde{\beta}_T - \beta)(\tilde{\beta}_T - \beta)'] / \det[E(\hat{\beta}_T - \beta)(\hat{\beta}_T - \beta)'],$$

とする. 定理2,3より簡単な場合は

$$e(d) = (1+2d)\Gamma(1+d)\Gamma(2-2d)/\Gamma(1-d) \qquad , \ell=1,$$

$$= 36\,\Gamma(2-d)^2 / \{(1+2d)^2(3+2d)(3-2d)\Gamma(1+d)^2\Gamma(3-2d)^2\}, \ell=2,$$

となる。具体的には、

<u>e(d)の値</u>

ℓ \ d	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	1.000	0.995	0.987	0.982	0.985	1.000
2	1.000	0.986	0.956	0.925	0.901	0.885 (= 8/9)

$d=0.5$ の値は $\lim_{d\to 0.5} e(d)$

このかぎりでは LSE は漸近有効ではないが、高い相対効率をもつ。

§3. 誤差項のパラメータ推定について

簡単の為 $\varepsilon_t \sim ARIMA(0,d,0)$ process として (d, σ_a^2) の推定について考える。

仮定　$d \in D = [\delta, 1/2 - \delta]$, $0 < \delta < 1/4$, $0 < \sigma_a^2 < \infty$.

真値　$d_0, \sigma_{a,0}^2$ (say).

β が既知の時は、以下の2つの推定量が通常用いられる。

(i) $(\tilde{d}_T, \tilde{\sigma}_{a,T}^2)$ L.S.E.

$\tilde{d}_T$ は

$$U_T(d,\beta) \underset{\text{df}}{=} 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{t=1}^{T} (y_t - X_t'\beta) e^{-it\lambda} \right|^2 / g(\lambda; d)\, d\lambda,$$

を最小にする。ここで $g(\lambda; d) = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d}$ また $\tilde{\sigma}_{a,T}^2$ は

$$\tilde{\sigma}_{a,T}^2 \underset{\text{df}}{=} U_T(\tilde{d}_T, \beta)/T,$$

によって定義される。

(ii) $(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)$ Gaussian MLE

対数尤度を T で割った量を

$$L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \beta) \underset{\text{df}}{=} -\log(2\pi\sigma_a^2)/2 - \sum_{t=1}^{T} \sigma_{t-1}^2(d)/(2T) - \sum_{t=1}^{T} a_t^2(d)/(2T\sigma_{t-1}^2(d)\sigma_a^2),$$

ここで　$a_{t+1}(d,\beta) \underset{\text{df}}{=} (y_{t+1} - X_{t+1}'\beta) - E_d\{y_{t+1} - X_{t+1}'\beta \mid y_t, \cdots, y_1\}$

$$\sigma_t^2(d) \underset{\text{df}}{=} E_d[a_{t+1}(d,\beta)]^2/\sigma_a^2,$$

とする．$(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)$ は $L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \beta)$ を最大にする。

ある種の正則条件のもとで Walker (1964), Hanna (1973) はこれらの推定量の漸近的性質を導いている．我々のモデルは、彼等によって導入された正則条件を満足しないが、にも

かかわらず、推定量が強一致性をもつこと、及び漸近正規性あるいは収束の速度が示されている。(cf. Yajima (1985))．

本論ではβが<u>未知</u>の場合を扱う。したがって$\hat{\beta}_T$をβに代入し、$U_T(d, \hat{\beta}_T)$, $L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \beta)$ を最小あるいは最大にするd, σ_a^2を新たに、各々$(\tilde{d}_T, \tilde{\sigma}_{a,T}^2)$, $(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)$ と定義する．

<u>$(\tilde{d}_T, \tilde{\sigma}_{a,T}^2)$ の漸近的性質について</u>

<u>定理4</u>（強一致性）（C_1），（C_2）及び

（C_3） ε_t ; an ergodic process

（C_4） $\lim\sup_{t\to\infty} \|X_i\|_{n(t)} / \|X_i\|_{m(t)} < \infty$

for $^\forall\{m(t)\}$, $^\forall\{n(t)\}$ s.t. $n(t) \geq m(t)$, $^\forall t$,

$m(t) \to \infty \ (t\to\infty)$, $\lim_{t\to\infty} n(t)/m(t) = 1$,

が成立する時

$$\lim_{T\to\infty} (\tilde{d}_T, \tilde{\sigma}_{a,T}^2) = (d_0, \sigma_{a,0}^2) \quad a.s.$$

（略証） 後述の Lemmas 1, 2 を用い

$$\lim_{T\to\infty} \{U_T(d; \hat{\beta}_T) - U_T(d; \beta)\}/T = 0 \quad a.s$$

uniformly in $d \in D$ を示し、以前の結果（Yajim (1985)）に持ち込む．

<u>Lemma 1</u> （C_1），（C_2），（C_4） を仮定．

$$\lim_{T\to\infty} (D_T / T^{1/2}) (\hat{\beta}_T - \beta) = 0 \quad a.s.$$

（略証） $S_n \equiv (\|X_i\|_n / n^{1/2}) (\hat{\beta}_{i,n} - \beta)$

とおき、一方 ν と $n(m)$ を

$(1-2d_0)\nu>1$ を満足し、かつ $n(m)$ を m^{ν} より大きい最小の整数とする。この時

$$\lim_{m\to\infty} S_{n(m)} = 0 \quad a.s.$$

が示せる。一方

$$\lim_{m\to\infty} \max_{n(m)\le n<n(m+1)} |S_n - S_{n(m)}| = 0. \ a.s$$

も成立する。

<u>Lemma 2.</u> $(C_1)\sim(C_4)$ を仮定.

$$\lim_{T\to\infty}(1/T^{1/2})\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\varepsilon_t D_T^{-1} X_s e^{i(t-s)\lambda}\right\}/g(\lambda;d)\,d\lambda$$
$$= 0 \quad a.s. \ \text{uniformly in } d\in D.$$

（略証） Lemma 1 の証明方法と Hannan (1971, P.774) の方法を用いる。

<u>定理 5</u>.（漸近正規性；収束速度）$(C_1)\sim(C_4)$ を仮定

(i) $0<d_0<1/4$

(C_5) $E\{a_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\}$, $1\le i\le 4$ は constants a.s. ここで

$\mathcal{F}_{t-1} \equiv \sigma\{X_s;\ s\le t-1\}$

を仮定する。この時

$$T^{1/2}(\tilde{d}_T - d_0,\ \tilde{\sigma}_{a,T}^2 - \sigma_{a,0}^2) \xrightarrow{L} N(0,A)\ (T\to\infty)$$

ここで

$$A = \begin{pmatrix} 6/\pi^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{a,0}^4 + K_{4,0} \end{pmatrix}$$

$K_{4,0}$ は a_t の 4 次キュムラント.

(ii) $d_0 = 1/4$.

$$H_{T,j}(\lambda) \underset{\alpha}{=} \left|\sum_{s=1}^{T} x_{sj}\, e^{is\lambda}\right|^2 / (2\|x_j\|_T^2),$$

$$M_{T,j}(\delta) \underset{\alpha}{=} \sup_{\delta \le \lambda \le \pi} H_{T,j}(\lambda),$$

と定義する。もし

$$\lim_{T\to\infty} M_{T,j}(\delta) = 0,\ {}^{\forall}\delta > 0,\ 1 \le j \le \ell$$

が成立すれば、

$$(\tilde{d}_T - d_0,\ \tilde{\sigma}_{a,T}^2 - \sigma_{a,0}^2) = O_p\left((\log T / T)^{1/2}\right).$$

(iii) $1/4 < d_0 < 1/2$.

もし

$$H_{T,j}(\lambda) \le K/(T\lambda^2),\ 0 < \lambda \le \pi,\ 1 \le j \le \ell$$

が成立すれば、（Kは定数）

$$(\tilde{d}_T - d_0,\ \tilde{\sigma}_{a,T}^2 - \sigma_{a,0}^2) = o_p(1/T^{1-2d_0}).$$

（略証）簡単の為、$(\tilde{d}_T - d_0)$ のみ考える。

$$0 = U_T^{(1)}(d_0, \hat{\beta}_T) + (\tilde{d}_T - d_0)\, U_T^{(2)}(d_T^*, \hat{\beta}_T),\ |d_T^* - d_0| \le |\tilde{d}_T - d_0|.$$

したがって

$$\lim_{T\to\infty} \{U_T^{(2)}(d, \hat{\beta}_T) - U_T^{(2)}(d, \beta)\}/T = 0 \text{ a.s uniformly in } d \in D$$

$$p\text{-}\lim_{T\to\infty} \{U_T^{(1)}(d_0, \hat{\beta}_T) - U_T^{(1)}(d_0, \beta)\}/T^{1/2} = 0$$

を示せばよい．第一式は定理4と同様に示せる。一方第二式は

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}\{(U_T^{(1)}(d_0, \hat{\beta}_T) - U_T^{(1)}(d_0, \beta))/T^{1/2}\} = 0$$

を d_0 の各場合について示す．

$x_{ti}=\cos\nu_i t$ or $\sin\nu_i t$ は定理4の仮定を満たすが、定理5の仮定は成立しない．$x_{ti}=t^{i-1}$ はいずれの仮定もみたす．また (C_4) の条件は、より弱い条件で代替可能である。さらに定理4，5は一般の ARIMA(p,d,q) process における $(\sigma_a^2, d, \phi_1, \cdots, \phi_p, \theta_1, \cdots, \theta_q)$ の推定についても成立する。

$(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)$ の漸近的性質について

$$y_t=\beta_1+\beta_2 t+\cdots+\beta_\ell t^{\ell-1}+\varepsilon_t,$$

とする。

定理6

(i) (C_6) ε_t; an ergodic process $E\varepsilon_t^4<\infty$

を仮定．この時

$$\lim_{T\to\infty}(\hat{d}_T, \hat{\sigma}_{a,T}^2)=(d_0, \sigma_{a,0}^2)\ \text{a.s.}$$

(ii) (C_7) ε_t; Gaussian process

を仮定．この時

$$T^{1/2}(\hat{d}_T-d_0, \hat{\sigma}_{a,T}^2-\sigma_{a,0}^2)\xrightarrow{L} N(0, A)\ (T\to\infty),$$

ここで A は定理5(i)で定義された行列

(略証) 定理4，5と同様に

$$L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \hat{\beta}_T)-L_T(Y_T; d, \sigma_a^2, \beta)$$

及びその高次の微分項を評価する。

References

Adenstedt,R.K.(1974). On large-sample estimation for the mean of a stationary random sequence. *Ann. Statist.* 2, 1095-1107.

Box, G.E.P. & Jenkins, J.M. (1976). *Time Series Analysis Forecasting and Control.* 2nd edition. San Francisco: Holden Day.

Doob, J.L. (1953). *Stochastic Processes.* New York: Wiley.

Grenander, U. (1954). On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated errors. *Ann. Math. Statist.* 25, 252-272.

Grenander, U. & Rosenblatt, M. (1954). An extension of a theorem of G.Szegö and its application to the study of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* 76, 112-126.

Granger, C.W.J. & Joyeux, R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *J. Time Series Analysis.* 1, 15-29.

Hannan, E.J. (1971). Non-linear time series regression. *J. Appl. Prob.* 8, 767-780.

Hannan, E. J. (1973). The asymptotic theory of linear time series models. 10, 130-145.

Hosking, J.R.M. (1981). Fractional differencing. *Biometrika* 68, 165-176.

Solo, V. (1981). Strong consistency of least squares estimators in regression with correlated disturbances. *Ann. Statist.* 9, 689-693.

Walker, A.M. (1964). Asymptotic properties of least squares estimates of parameters of the spectrum of a stationary non-deterministic time series. *J. Aust. Math. Soc.* 4, 363-384.

Yajima, Y. (1985). On estimation of long-memory time series models. (To appear in *Austral. J. Statist.* 27.)