数理解析研究所講究録
第 590 巻 1986 年 52-59

最小2乗法による3母数ワイブル分布の母数推定

国立水俣病研究センター
柴田義貞

1. はじめに

3母数ワイブル分布

$$f(x)=\frac{\gamma}{\theta}\left(\frac{x-\xi}{\theta}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{x-\xi}{\theta}\right)^{\gamma}\right], \qquad (1)$$

$$x>\xi;\ \theta>0,\ \gamma>0$$

の母数推定を考える．すべての母数が未知の場合，本来の意味での最尤推定値は存在しない（柴田，1984）．もちろん，ξの推定値を一つ定めると，“尤度”を最大にするθ，γの値は一意に定まる．柴田（1984）はこの種の推定量の特性を調べている．本論では，位置母数が既知の2母数ワイブル分布の母数推定において最小2乗法と称して用いられている方法を3母数の場合に適用し，得られる推定量の特性を検討する．

$X_1, \cdots, X_n$ を3母数ワイブル分布（1）からの大きさnの

標本，$X_{(1)} < \cdots < X_{(n)}$ をその順序統計量とする．

2．最小2乗推定

いま

$$U_{(i)} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{X_{(i)} - \xi}{\theta}\right)^{\gamma}\right]$$

とおくと

$$\gamma\{\log(X_{(i)} - \xi) - \log\theta\} = \log[-\log(1 - U_{(i)})]$$

の関係が成立ち，$U_{(i)}$ は（0，1）上の一様分布からの大きさ n の標本における順序統計量である．

位置母数 ξ が既知の場合，Gumbel（1958）は θ，γ の推定量として

$$S_{\xi}(\theta, \gamma) = \sum_{i=1}^{n}\{\log[-\log(1 - U_{(i)})] - \log[-\log(1 - E[U_{(i)}])]\}^2 \quad (2)$$

を最小にするものを提案している．簡単な計算から

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(K_i - \overline{K})\{\log(X_{(i)} - \xi) - \overline{\log X}\}}{\sum_{i=1}^{n}\{\log(X_i - \xi) - \overline{\log X}\}^2}$$

$$\hat{\theta} = \left\{\prod_{i=1}^{n}(X_i - \xi)\right\}^{1/n}\left[\prod_{i=1}^{n}\left\{-\log\left(\frac{n - i + 1}{n + 1}\right)\right\}\right]^{-1/n\hat{\gamma}}$$

を得る．ただし，

$$K_i = \log\left[-\log\left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)\right],\quad \overline{K} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_i,$$

$$\overline{\log X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i - \xi).$$

ξが未知の場合，まず$\xi < X_{(1)}$を与えて，(2)式を最小にする$\hat{\gamma} \equiv \hat{\gamma}(\xi)$，$\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}(\xi)$を求め，次に$S_\xi(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$を最小にする$\xi$を求めればよい．同一の一様乱数列を用いて作った大きさ20の標本に対する$S_\xi \equiv S_\xi(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$の挙動を図2.1に示す．形状母数$\gamma$が大きくなるにしたがい，$\xi$は過小に推定される傾向にある．

2母数ワイブル分布の場合，K_iとして上記のほかに二つのものが提案されている．Bain and Antle (1967)は

$$K_i = \log\left[\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n-j+1}\right]$$

を提案し，Miller and Freund (1965)は

$$K_i = \log\left[-\log\frac{n-i+1/2}{n}\right]$$

を提案している．

3. 推定量の比較

前述した3種類のK_iを用いた場合の母数およびパーセン

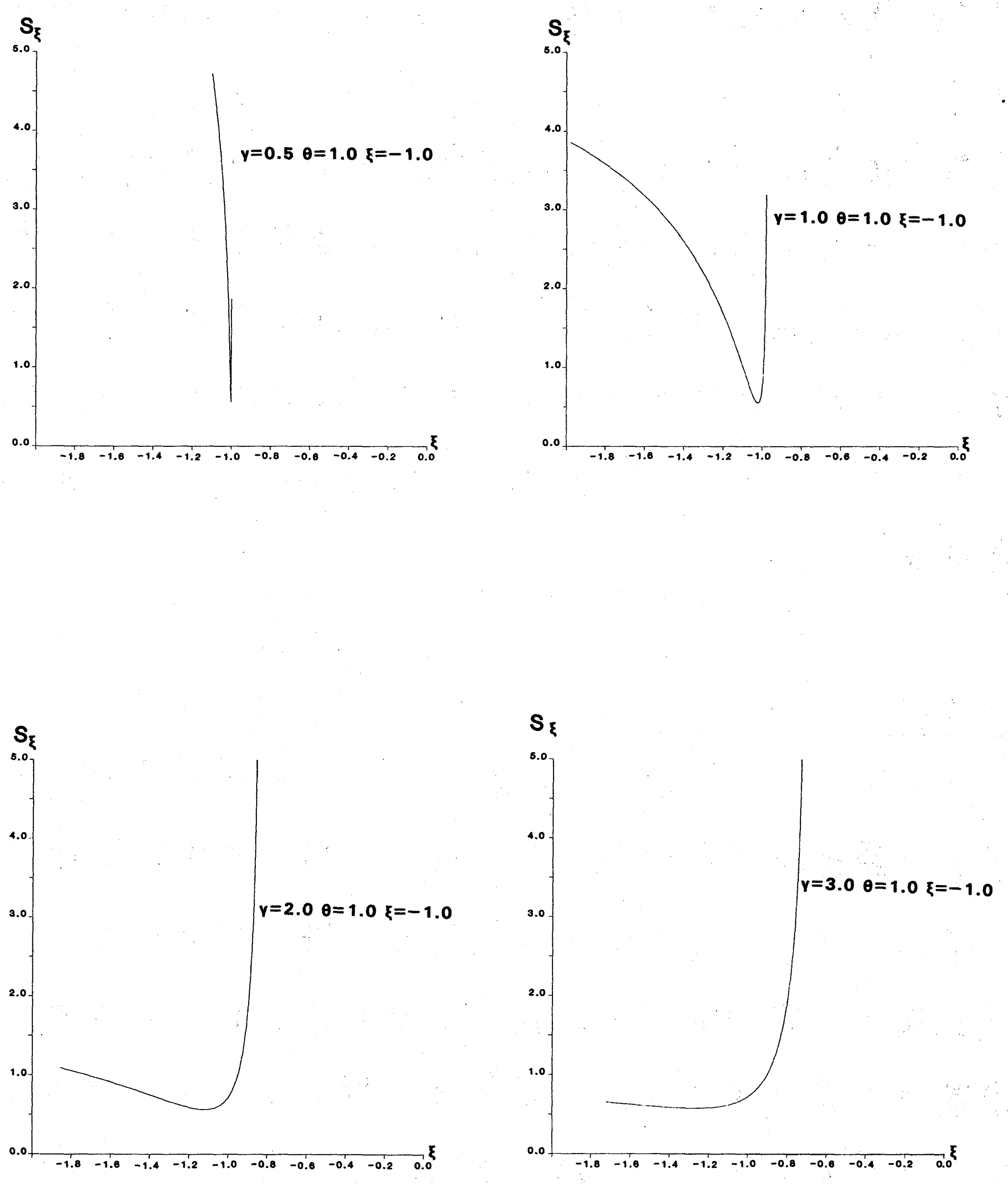

図2.1　関数S_ξの挙動

ト点の推定量について，その偏り，分散，平均２乗誤差をシミュレーションで求めた結果を表3.1から表3.4に示す．いずれも，標本の大きさは20，シミュレーション回数は10,000である．

母数の推定に関しては，形状母数が小さい場合（$\gamma=0.5$）を除き，Miller and Freund (1965)の提案したK_iが勝っており，Bain and Antle (1967)のK_iはもっとも劣っている．しかも，３者の優劣はγの値が大きくなるにしたがい顕著になっている．しかし，パーセント点については，３者の間に大差はない．

4. 考察

１節で述べたように，３母数ワイブル分布の場合，厳密な意味での最尤推定量は存在しないが，類似の推定量は得られる．柴田（1984）はこれらの推定量を得るための方法をいくつか比較し，実用上は方法Ⅲで十分であるとしている．この推定量を本論で考察した推定量と比較すると，母数の推定に関しては前者がはるかに勝っているが，パーセント点の推定では大差がない．理由は判然としないが興味深い現象と思われる．

本論で述べた推定値の計算は面倒である．計算の手間と精

表3.1　ξ の推定量の比較；$\xi = 0$, $\theta = 1$

γ		G	B&A	M&F
	bias	-0.0005	-0.0016	0.0025
0.5	variance	0.0005	0.0008	0.0003
	m.s.e	0.0005	0.0008	0.0003
	bias	-0.0175	-0.0280	0.0115
1.0	variance	0.0201	0.0290	0.0071
	m.s.e.	0.0204	0.0298	0.0072
	bias	-0.0769	-0.1056	0.0026
1.5	variance	0.1389	0.1627	0.0544
	m.s.e.	0.1449	0.1739	0.0545
	bias	-0.1774	-0.2373	-0.0307
2.0	variance	0.4268	0.5538	0.1736
	m.s.e.	0.4583	0.6101	0.1773
	bias	-0.3999	-0.4957	-0.1368
3.0	variance	1.3654	1.6559	0.6781
	m.s.e.	1.5253	1.9016	0.6968

G: Gumbel. B&A: Bain and Antle. M&F: Miller and Freund.

表3.2　θ の推定量の比較；$\xi = 0$, $\theta = 1$

γ		G	B&A	M&F
	bias	0.1523	0.0222	0.0785
0.5	variance	0.3120	0.2550	0.2749
	m.s.e.	0.3352	0.2555	0.2810
	bias	0.0611	0.0121	-0.0077
1.0	variance	0.0956	0.1037	0.0712
	m.s.e.	0.0993	0.1039	0.0712
	bias	0.1001	0.0903	-0.0087
1.5	variance	0.1918	0.2209	0.0955
	m.s.e.	0.2018	0.2290	0.0956
	bias	0.1922	0.2232	0.0227
2.0	variance	0.4798	0.6137	0.2142
	m.s.e.	0.5168	0.6635	0.2147
	bias	0.4060	0.4821	0.1279
3.0	variance	1.4179	1.7185	0.7185
	m.s.e.	1.5828	1.9509	0.7322

表3.3　γの推定量の比較；ξ＝0，θ＝1

γ		G	B&A	M&F
	bias	-0.0242	-0.0061	0.0050
0.5	variance	0.0122	0.0139	0.0128
	m.s.e.	0.0127	0.0140	0.0128
	bias	-0.0186	0.0342	0.0023
1.0	variance	0.1503	0.2254	0.0925
	m.s.e.	0.1506	0.2264	0.0925
	bias	0.0895	0.2043	0.0386
1.5	variance	1.0075	1.2932	0.5355
	m.s.e.	1.0156	1.3350	0.5370
	bias	0.3463	0.5785	0.1524
2.0	variance	3.7480	5.0378	2.1051
	m.s.e.	3.8680	5.3724	2.1283
	bias	1.1365	1.5794	0.5994
3.0	variance	17.914	22.149	12.041
	m.s.e.	19.205	24.643	12.400

表3.4　5%点の推定量の比較；ξ＝0，θ＝1

γ		G	B&A	M&F
	bias	0.00135	0.00076	0.00521
0.5	variance	0.00022	0.00026	0.00020
	m.s.e.	0.00022	0.00026	0.00023
	bias	-0.00500	-0.00799	0.02072
1.0	variance	0.00287	0.00301	0.00284
	m.s.e.	0.00289	0.00307	0.00327
	bias	-0.02018	-0.02505	0.02459
1.5	variance	0.00752	0.00780	0.00656
	m.s.e.	0.00792	0.00842	0.00717
	bias	-0.03149	-0.03700	0.02300
2.0	variance	0.01105	0.01143	0.00900
	m.s.e.	0.01204	0.01280	0.00953
	bias	-0.03802	-0.04201	0.01850
3.0	variance	0.01347	0.01376	0.01027
	m.s.e.	0.01492	0.01553	0.01061

度を勘案すると，$S_\xi(\hat{\theta},\hat{\gamma})$の最小化よりも，$\xi<X_{(1)}$を十分$X_{(1)}$に近くとって(2)式を最小にする$\theta$，$\gamma$の値$\hat{\theta}$，$\hat{\gamma}$を求め，方法Ⅲのように$\xi$，$\hat{\theta}$，$\hat{\gamma}$を修正する方がよいかもしれない．こうして得られる推定量も方法Ⅲの推定量には劣るかもしれないが，本論で述べた推定量や方法Ⅲの推定量を求めるのに必要な繰り返し計算は不要である．

参考文献

Bain, L. J. and Antle, C. E. (1967). Estimation of parameters in the Weibull distribution. *Technometrics* 9, 621-27.

Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of Extremes*. Columbia University Press.

Miller, I. and Freund, J. E. (1965). *Probability and Statistics for Engineers*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

柴田義貞(1984)．3母数ワイブル分布の推定問題．数理解析研究所講究録 538, 153-67.