

## Monopole の幾何

京大数理解析 島谷 健一郎 (Shimatani Ken'ichiro)

Monopole は数学的には、Bogomolny 方程式と呼ばれる非線型偏微分方程式の、ある境界条件を満たす解として定義される。この解の構成および解全体のなす図形 (Monopole の Moduli space) の形状については既に種々の結果が知られており、かつこれらは互いに有機的に結ばれている。Monopole の非線型方程式の解析には、諸々のアプローチ相互の関係まで正確に把握して、多角的に方程式に取り組むことが必要である。

これらの一つに、Nahm 方程式と呼ばれる非線型常微分方程式の解から Monopole 解を構成する理論と、spectral curve と呼ばれる代数曲線が Monopole 解全体をパラメータライズする理論が知られている。 Hitchin ([8]) は既にこの両者の関係、対応を調べたことにより、Monopole に関する結果をいくつか証明しているが、ここでは、これをさらに吟味して、Hitchin による spectral curve から Nahm 方程式の解を対応させる手順が、実は、ソリトン理論における、コンバクトリーマン面、この

上の基準点,  $\eta$  は  $\alpha$  の漸近挙動. および positive divisor  $\gamma$  によるデータから Baker-Akhiezer 函数を使, 2 方程式の準周期解を構成する理論 ([3][4][6][10]) の枠組に完全に乗りこえる事. 同時に, Nahm 方程式の解を特殊な場合のテータ函数を用いて, ある程度記述できることを示す.

以下, §1 と §2 で, 定義と Nahm-Hitchin の結果をごく簡単にまとめる. §3 で, 準周期解構成の理論の枠組に乗, 之に乗りこえることを示し, §4 でテータ函数による解の記述をよめることとする.

## §1 Monopole の定義

Monopole は, 勝手な次元リーマン多様体とコンパクトリーマン多様体の積で定義できるが, ここでは簡単にするため,  $\mathbb{R}^3$  上の  $SU(2)$  Monopole に限った定義を講じたことにする.

定義 (1.1)  $k$ -Monopole ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )

$(A_1, A_2, A_3, \Phi)$ ,  $A_i, \Phi$  は  $\mathbb{R}^3$  上の  $AM(2)$  ( $SU(2)$  のリ環) に値を持つ函数で, 次の連立非線型偏微分方程式 (=  $k$  を Bogomolny 方程式と云う) と, 2 つの境界条件をみたす.

ただし  $\|\Phi\|^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Phi^2$   $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  は半径整数  $k$  のことを, Monopole の topological charge と云う.

$$(1.2) \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + [A_1, \Phi] = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} + [A_2, A_3] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + [A_2, \Phi] = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} + [A_3, A_1] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + [A_3, \Phi] = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + [A_1, A_2] \end{cases}$$

$$(1.3) \quad \|\Phi\| = 1 - \frac{k}{2r} + O(r^{-2}) \quad r \rightarrow +\infty$$

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + [A_i, \Phi] \right\| = O(r^{-2})$$

つまり、方程式 (1.2) の、境界条件 (1.3) (1.4) の下での特殊解  $(A_i, \Phi)$  を、topological charge  $k$  の  $S^2(2)$ -Monopole over  $\mathbb{R}^3$  と呼ぶことにする。

定義 (1.5) gauge 同値

$(A_i, \Phi)$  が (1.2) (1.3) (1.4) をみたす時、 $g$  を  $\mathbb{R}^3$  上の  $S^2(2)$ -値関数とし  $\tilde{A}_i = g^{-1} A_i g + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}$   $\tilde{\Phi} = g^{-1} \Phi g$  とおくと  $(\tilde{A}_i, \tilde{\Phi})$  もまた (1.2) (1.3) (1.4) をみたす事は容易に確かめられる。このよる各 2 つの Monopole 解を互いに gauge 同値と称する。

定義 (1.6) Moduli space

$\{ \text{長-Monopole 解} \} / \text{gauge 同値}$  (長-Monopole 解全体  $\subset \mathbb{R}^3$  集合を gauge 同値で割った空間) のことを, 長-Monopole の Moduli space と呼ぶ。

Monopole における基本的問題は, 方程式 (1.2) と (1.3) (1.4) の下で解く事と, Moduli space の形状の決定にあるわけである。

Remark (1.7)

$\mathbb{R}^3$  上の Bogomolny 方程式 (1.2) は,  $\mathbb{R}^4 = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  上の自己双対 Yang-Mills 方程式  $\omega = \omega_0$  による束  $\mathbb{R}^3$  の gauge 同値である。この事は方程式を書き下せばすぐわかる。

Remark (1.8)

理論物理の Yang-Mills-Higgs の理論は, gauge 場と Higgs 場に対し作用積分が定義されるが, 定義 (1.1) の  $A_\mu$  が gauge 場,  $\Phi$  が Higgs 場に対応し, 方程式 (1.2) は  $(A_\mu, \Phi)$  が作用積分の critical point に対応する事を, 境界条件 (1.3) (1.4) は作用積分の有界性に由来する。そして,  $\eta$  のよる gauge 場と Higgs 場を伴った場が, 11 個の Dirac のモノポールになることから, 以上のよる言葉の定義が得られた。

## §2 Nahm と Hitchin の結果

まず, Monopole 解の構成に関して, 次の Nahm の構成法がある。

### 定理 (2.1)

次のようなデータ  $(T_1, T_2, T_3)$  から  $k$ -Monopole 解が構成できる。

逆に与えられた  $k$ -Monopole 解は, このデータから構成される。

(2.2)  $T_1, T_2, T_3$  は開区間  $(0, 2)$  上の  $M(k, \mathbb{C})$ -値実解析的函数

$$(2.3) \quad T_1' = [T_2, T_3]$$

$$T_2' = [T_3, T_1]$$

$$T_3' = [T_1, T_2]$$

この非線型常微分方程式を Nahm 方程式と言う。

$$(2.4) \quad T_i^* = -T_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$(2.5) \quad T_i(2-z) = -\overline{T_i}(z) \quad i = 1, 2, 3 \quad z \in (0, 2)$$

(2.6)  $T_i$  は端点  $0, 2$  で simple pole を持つ

$\pm 5$  に  $\eta = z^5$  の residue を  $a_1, a_2, a_3 \in M(k, \mathbb{C})$  とする。 (2.3) より  $-a_1 = [a_2, a_3]$  等の式が成り立つ。

よって  $su(2) \cong sp(1)$  の  $k$ 次元表現  $\rho: sp(1) \rightarrow M(k, \mathbb{C})$

と、 $\rho(\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k) = -2(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)$  を定義  
 した。

(2.7)  $\rho$  は既約

証明の概略 ([8] [2])

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と表す}$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  として、 $\lambda$  による微分作用素

$$\Delta(\lambda) = -\sum_{j=1}^3 \lambda_j \otimes e_j + i \frac{d}{dz} - i \sum_{j=1}^3 T_j \otimes e_j$$

を考えたとき、(2.6)、(2.7) による kernel が複素 2 次元存在することを示す。この  $L^2$  ノルムに関する正規直交基底

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) \text{ とする } (\Delta(\lambda)\psi(\lambda, z) = 0, \int_0^2 \psi^* \psi dz = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

を用いて

$$A_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \int_0^2 \psi^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) dz \quad i=1, 2, 3$$

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = i \int_0^2 (z-1) \psi^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) dz$$

とすれば、 $(A_i, \Phi)$  が  $k$ -Monopole の条件を満たす。

後半の証明には、これから述べる Hitchin の結果が必要となる。

この定理により、非線型偏微分方程式 (1.2) が非線型常微分方程式 (2.3) に帰着されるわけだが、Vakh 方程式 (2.3) も表が複雑で解法は定かしく、またデータ  $(T_1, T_2, T_3)$  による

Monopole 解 (A.4, 5) を explicit に作るには線型常微分方程式を解く操作と定積分の計算があるため計算の遂行は困難な場合が多い。

一方、Monopole の Moduli space については、代数曲線のホッジ予想が成り立つことと Hodge の結果があるが、この前に記号をたたくことに注意する。

記号

$\mathbb{C}P^1$ : 1次元複素射影空間

$T\mathbb{C}P^1$ :  $\mathbb{C}P^1$  の tangent bundle, non-compact な 2次元複素多様体である。

$\pi: T\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ : projection

$c_1(L)$ :  $\mathbb{C}P^1$  上の Chern class  $c_1$  の line bundle

$\mathbb{C}P^1$  は  $U_0 = \{[z_1, z_2] \mid z_2 \neq 0\}$  と  $U_\infty = \{[z_1, z_2] \mid z_1 \neq 0\}$  の 2枚の chart を cover する。  $T\mathbb{C}P^1$  も多様体として  $(\pi^{-1}(U_0))$  と  $(\pi^{-1}(U_\infty))$  の 2枚を cover する。以後、 $\pi^{-1}(U_0)$  と  $T\mathbb{C}P^1$  の standard な chart を呼ぶことにする。

$\pi^{-1}(U_0) \cong \mathbb{C}^2 = (z, \eta)$   $z$  は  $\mathbb{C}P^1$  方向、 $\eta$  は  $T\mathbb{C}P^1$  方向

$L^z$ :  $\pi^{-1}(U_0)$  上と  $\pi^{-1}(U_\infty)$  上の trivial line bundle と transition function  $e^{\frac{1}{z}z}$  を張り合わせることでできる  $T\mathbb{C}P^1$  上の正則な line bundle。ただし  $c, z \in \mathbb{C}$  は定数

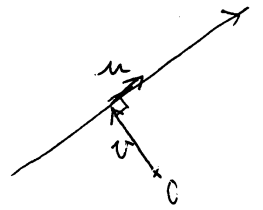
$\mathbb{C}P^1 \cong S^2$  かつ  $T\mathbb{C}P^1 \cong \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |u|=1, u \cdot v = 0\}$

である。ここで  $\mathbb{R}^3$  の向きを込めた直線は、単位方向ベ

クトル  $u$  と原点からの垂線ベクト

ル  $v$  を使って  $\{t u + v \mid t \in \mathbb{R}\}$

を表す。  $|u|=1, u \cdot v = 0$  である。



あり。つまり

$\{\mathbb{R}^3$  の向きを込めた直線全体  $\} \cong T\mathbb{C}P^1$  が成り立つ。

$\tau: T\mathbb{C}P^1 \rightarrow T\mathbb{C}P^1$  上の同一視の下で、直線の向きを逆

にした写像。  $\tau^2 = \text{id}$ , anti-holomorphic になり、  $\tau \notin T\mathbb{C}P^1$

の real structure になり、  $\tau$  になる。

定理 (2.8)

反-Monopole 全体  $\tau$ 、次の条件を満たす  $T\mathbb{C}P^1$  の部分集合  $S$

の全体  $\tau$  は同値である。

(2.9)  $S$  は、ある  $\psi \in H^0(T\mathbb{C}P^1, \pi^* \mathcal{O}(2k))$  の 0 点集合  $\tau$

定義される  $T\mathbb{C}P^1$  の部分集合:  $S = \{p \in T\mathbb{C}P^1 \mid \psi(p) = 0\}$

(2.10) multiple component を持たない

(2.11)  $\tau = \text{id}$  かつ

(2.12)  $\tau$  が不変

(2.13)  $L^2|_S$  は holomorphically trivial

(2.14)  $L^1 \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1)$  は real structure ( $\tau$ : anti-linear かつ

$\tau^2 = \text{id}$  を満たす bundle automorphism) を持つ。



$$(2.15) \quad H^0(S, L^z \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-2)) = 0 \quad z \in (0, 2) \subset \mathbb{R}$$

証明の概略 (L7] L8])

先に説明したように  $P \in \mathbb{TP}^1$  と  $\mathcal{L}_P$  ( $\mathbb{R}^3$  の直線) は同一視でき、 $\nabla = \sum_{i=1}^3 (\partial_i + A_i)$  とおき、各  $P \in \mathbb{TP}^1$  に対し 2 階微分作用素  $\nabla$ -心算 を直線  $\mathcal{L}_P$  上に制限させる。この kernel  $(\nabla - \text{心算})|_{\mathcal{L}_P} \varphi = 0$  は、線型 1 階常微分方程式だから常に複素 2 次元であるが、次のように  $\mathbb{TP}^1$  の部分集合  $S$  を定める。  
 $S = \{ P \in \mathbb{TP}^1 \mid (\nabla - \text{心算})|_{\mathcal{L}_P} \varphi = 0 \text{ を満たす } \mathcal{L}_P \text{ 上の関数 } \varphi \text{ の中に 2 乗可積分なものがある} \}$

毎回の議論を繰り返すことにより、このように  $\mathbb{TP}^1$  の部分集合が (2.9) ~ (2.15) を満たすこと、異なる Monopole 解には異なる代数曲線  $S$  が得られること、そしてこれから述べる Nahm の構成との結びつきから、これが必要十分であることが示される。なお、Monopole 解から導き出される  $S$  を、 Hitchin は Monopole の spectral curve と呼んでいる。

系 (2.16)

$S$  は代数曲線である

証明は (2.9) より明らか

系 (2.17)

$S$  を standard な chart  $(y, \eta)$  上で表示すると、次の形の  $P$  が

この平面曲線が存在することは示す。

$$\eta^k + (a_1^k s^2 + b_1^k s - \bar{a}_1^k) \eta^{k-1} + (a_2^k s^2 + b_2^k s - \bar{a}_2^k) (a_3^k s^2 + b_3^k s - \bar{a}_3^k) \eta^{k-2} + \dots \\ + (a_m^k s^2 + b_m^k s - \bar{a}_m^k) \dots (a_1^k s^2 + b_1^k s - \bar{a}_1^k) = 0 \\ a_j^k \in \mathbb{C}, b_j^k \in \mathbb{R}$$

証明の概略

この形の多項式に於ては (2.9) から、 $b_m^k \in \mathbb{R}$  と  $\bar{a}_j^k$  の所は (2.12) から導かれる。 (2.11) から  $\eta^k$  の係数が 0 であることが導かれる。

Remark (2.13)

(2.10) 以上の式を因数分解した時、重複因子を持たない事を意味する。なお、他の条件が上の式の係数の値による条件に於ては、それは示す。

系 (2.19)

$S$  が non-singular の時、genus は  $(g-1)^2$  になる。

証明は [7]

以上、spectral curve と Nahm 方程式との結びつきは、次の 4 つの命題としてまとめられる。これらから、定理 (2.1), (2.8) の残りが導かれることは明らかである。

## 命題 (2.20)

(2.9) (2.10) (2.11) (2.13) (2.15) をみたす代数曲線  $S$  が  $\mathbb{P}^2$  Nahm 方程式 (2.3) の解が (2.6) (2.7) をみたすものが構成できる。ただし定数行列  $P \in GL(k, \mathbb{C})$  の相似変換の自由度は残子 ( $T_i$  が (2.3) をみたすとき,  $P^{-1}T_iP$  もまた (2.3) をみたす。この自由度を除く)  $\Rightarrow$  unique に  $k$  個の解が定まり、これら意味)

## 証明の概略 [L8]

(a) まず、主として条件 (2.15) を使って

$$(2.21) \dim H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1)) = k \quad z \in (0, 2)$$

を導く。

(b) 実開区間  $(0, 2)$  上の複素  $k$  次元  $\mathbb{P}^1$  の束  $V$  が

$$V = \bigcup_{z \in (0, 2)} H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$$

で定義できることを示す。

(c)  $V$  上の  $k$  次  $\eta$  のような性質を持つ bundle Automorphism  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2$  が唯一つ定まることを示す。

"勝手な  $\psi_z \in H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$  (i.e.  $\psi \in \Gamma((0, 2), V)$ )

に対して

$$\eta \psi(z; z, \eta) + (\tilde{A}_0 \psi)(z; z, \eta) + \gamma (\tilde{A}_1 \psi)(z; z, \eta) + \gamma^2 (\tilde{A}_2 \psi)(z; z, \eta) = 0$$

$\Rightarrow z \in \mathbb{C}$ .  $\eta$  は  $\gamma$  成分,  $\gamma^2$  成分  $\gamma$  の射影が定義される

$\pi^{-1}(0) = (z, \eta)$  上の関数,  $\psi$  や  $\tilde{A}_i \psi$  は  $H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$

の元であるから  $\pi^{-1}(0)$  上の関数表示される。これ

$\psi(z; \zeta, \eta)$ ,  $(\hat{A}_1 \psi)(z; \zeta, \eta)$  と表わしたわけだから、函数として  
和や積をとった結果が 0 に等しいことを意味

(d)  $V$  に接続  $\nabla$  を、 $\psi \in \Gamma((0,2), V)$  に對して、 $\zeta \in \pi^{-1}(0)$  上  
 $\psi_0(z; \zeta, \eta)$ ,  $\pi^{-1}(0)$  上  $\psi_\infty(z; \zeta, \eta)$  と函数表示して

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} + \left( \frac{1}{\zeta} \hat{A}_1 \psi \right)(z; \zeta, \eta) + \mathcal{S} \left( \hat{A}_2 \psi \right)(z; \zeta, \eta) \quad \text{on } \pi^{-1}(0) \\ &= \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \zeta} - \frac{1}{\zeta} \hat{A}_0 \psi - \frac{1}{\zeta} \hat{A}_1 \psi \quad \text{on } \pi^{-1}(0) \end{aligned}$$

が、well-defined に定められることを示す。

(e)  $\nabla$  の接続が covariant constant なら  $V$  の section を 1 次独立  
に基底定め  $\psi_1, \dots, \psi_k \in L$ ,  $V$  の global frame にする。

( $\psi_i$  の選ぶ方には  $GL(k, \mathbb{C})$  の自由度があり、これが命題  
の中の自由度になる)。また  $\nabla$  bundle Automorphism  $\hat{A}_r$  による  
行列表示が成る。この転置を  $A_0(z), A_1(z), A_2(z)$  とすると  
次の式が成り立つことを示す。

$$\begin{cases} \left( (\eta + A_0(z) + \mathcal{S} A_1(z) + \mathcal{S}^2 A_2(z)) \begin{pmatrix} \psi_1(z; \zeta, \eta) \\ \vdots \\ \psi_k(z; \zeta, \eta) \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \left( \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \left( \frac{1}{\zeta} A_1(z) + \mathcal{S} A_2(z) \right) \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases}$$

(f)

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (A_0 + \mathcal{S} A_1 + \mathcal{S}^2 A_2) = [A_0 + \mathcal{S} A_1 + \mathcal{S}^2 A_2, \frac{1}{\zeta} A_1 + \mathcal{S} A_2]$$

を示す。(Nahm 方程式の Lax 表示)

(g)

今の式は  $\gamma$  の係数が  $\gamma$  に等しくなく  $\gamma^2$  は存在しないことを示す。

$$(h) \begin{cases} A_0 = T_1 + i T_2 \\ (2.21) \begin{cases} A_1 = -2i T_3 \\ A_2 = T_1 - i T_2 \end{cases} \end{cases}$$

$z^2 T_1, T_2, T_3$  を定めると, Nahm 方程式 (2.3) をみたす

(i)  $T_i$  は条件 (2.6) (2.7) をみたすことを示す。

命題 (2.22)

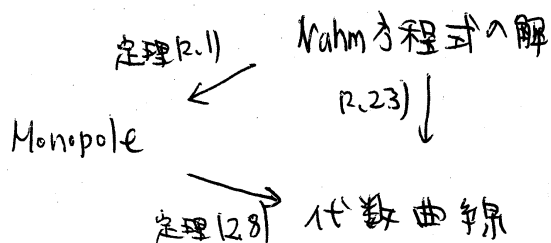
今、得られた  $T_i$  に対し ( $\geq A_i$  と  $\eta$ ) を定め

$$(2.23) \det(\eta + A_0(z) + \gamma A_1(z) + \gamma^2 A_2(z)) = 0$$

とかくと、Lax 表示が  $\gamma$  に対して  $\gamma^2$  になり  $\gamma$  と  $\eta$  に関する式になったが、これが最初の代数曲線の standard chart 上における表示式と一致する。

命題 (2.24)

右の図式は可換



## 命題 (2.25)

命題 (2.20) により、代数曲線  $S$  に  $S$  に条件 (2.16) (2.18) を加え、 $S$  を与えたときは (2.4) (2.5) を満たす。

命題 (2.22) (2.24) (2.25) の証明も [8]

さて、Hitchin は  $S$  に、命題 (2.22) の Nahm 方程式の解  $\rightarrow$  代数曲線  $S$  の対応が、非線型方程式に對してそれを線型化する代数曲線 (リーマン面) を作る Adler-Moerbeke の理論 (Adler-Moerbeke, Adv. Math. 38, 318-379 (1990)) の枠組に入り、 $S$  に関することを言及している ([8])。即ち、Nahm 方程式の解に對して (2.23) で定義される代数曲線を考える。この時、 $\eta$  は、行列  $A_0(\eta) + \zeta A_1(\eta) + \zeta^2 A_2(\eta)$  の固有値となる。曲線 (2.23) の各点  $(\zeta, \eta)$  上  $\eta$  の固有空間を対応させ、曲線上に line bundle が構成される。リーマン面上の line bundle には、 $\eta$  の Jacobi 多様体上の点に対応した。  $\zeta$  が動くとき曲線 (2.23) は変化するが行列  $A_0(\zeta) + \zeta A_1(\zeta) + \zeta^2 A_2(\zeta)$  は実化できるから、固有値も変わり、line bundle も動く。即ち、ヤコビ多様体上の運動が得られる。これが実は直線運動に等しい。このようにある。

ところで、この線型化の理論は、リーマン面、 $\eta$  の上の基準点、 $\eta = \infty$  の漸近挙動、positive divisor とは  $\zeta$  が  $\infty$  である。

方程式の準周期解を構成する Krichever の理論 ([3] [4] [6] [10]) と表裏一体なので、命題 (2.20) の証明の概略で説明した対応を Krichever の理論たのせられるように書き直せるはずで、こうした方がより constructive で両者の関係も明確になり、そして、Nahm 方程式の解をテータ函数を用いて explicit に書ける期待がふさぎます。

次の章で、これを実行する。

### §3 spectral curve と Nahm 方程式

記号は前章と同じとする。S と書けば、常に (2.9) (2.10) (2.11) (2.13) (2.15) をみたすことにする。

要はコホモロジーの条件 (2.15) を適当な形に翻訳して、命題 (2.20) の証明の概略 (e) が定まることを、Baker-Akhiezer 函数として与える事がある。

まず、 $\psi \in H^0(S, L^{\otimes k} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$  の特徴付けから始める。

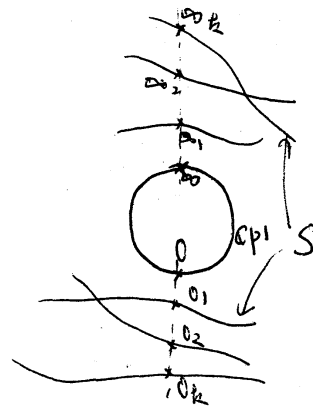
$$\{0_1, \dots, 0_k\} = S \cap \pi^{-1}([0, 1]) \subset \pi^{-1}(0)$$

$$\{\infty_1, \dots, \infty_k\} = S \cap \pi^{-1}([k, 0]) \subset \pi^{-1}(0)$$

とおく。当然

$$S \cap \pi^{-1}(0) = S - \{\infty_1, \dots, \infty_k\}$$

$$S \cap \pi^{-1}(0) = S - \{0_1, \dots, 0_k\}$$



がある。一般には  $O_i$  の点たちが互いに異なるとは限らないが、条件 (2.10) より generic には異なるので、以下、 $O_i$  の点たちが互いに異なることにする。

$\mathbb{C}P^1$  上の line bundle  $L^{\otimes 3} \otimes \pi^*(O(k-1))$  も、 $\pi^{-1}(U_0) \cup \pi^{-1}(U_\infty)$  上では trivial だから、 $\psi \in H^0(S, L^{\otimes 3} \otimes \pi^*(O(k-1)))$  を

$S = \{0, \dots, \infty\}$  上函数表示したものを  $\psi_0$

$S = \{0, \dots, \infty\}$  上函数表示したものを  $\psi_\infty$

と置く。

$L^{\otimes 3}$  は、transition function  $e^{\frac{\eta}{3}z}$  で定義したのである

$$\psi_0(z; s, \eta) = e^{\frac{\eta}{3}z} s^{k-1} \psi_\infty(z; s, \eta) \quad \text{on } \pi^{-1}(U_0) \cap \pi^{-1}(U_\infty)$$

が成り立つ。このことから函数  $\psi_\infty$  の特徴付けとして、2, 3 次方程式が容易に解かれる。

命題 (3.1)

$\psi \in H^0(S, L^{\otimes 3} \otimes \pi^*(O(k-1)))$  を  $S = \{0, \dots, \infty\}$  上函数表示したものを  $\psi_0$

と置く。次の条件を満たす。

(3.2)  $S = \{0, \dots, \infty\}$  上正則

(3.3)  $O_i = (0, \eta_i)$  が真性特異点をもつ

$O_i$  の近傍では、 $S$  の局所座標と projection  $\pi: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$

$(z, \eta) \mapsto z$  の制限を  $\lambda$  とする。  $\eta$  を同じ記号  $z$  で表

わす。

$$(3.4) \quad \psi_\infty(z; s) = e^{-\frac{\eta_i}{3}z} \left( \frac{z_0(z)}{s^{k-1}} + \frac{z_1(z)}{s^{k-2}} + \dots \right)$$



$\Sigma_0$  の近傍が展開される。

(2.15)  $H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(h-2)) = 0$  も同じように考え、次の命題を得る。

命題 (3.5)

(3.2) (3.3) を満たし、かつ  $\Sigma_0$  の近傍で

$$e^{-\frac{2i}{3}z} \left( \frac{z_1^{2i}}{z^{2i}} + \frac{z_2^{2i}}{z^{2i}} + \dots \right)$$

と展開される函数は恒等的に 0 しかない。

$h$  個の一次独立な  $\psi_1, \dots, \psi_h \in H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(h-1))$  に対し、行列  $A(z)$  を定め、行列  $A(z)$  の  $(\psi_1, \dots, \psi_h)^t$  に作用させた結果、 $\Sigma_0$  での展開が  $z^{-(h-2)}$  から始まるように決定すれば、 $h$  個の自動的  $\Sigma_0$  に属してしまっている。以下、この原理を詳しく説明する。

まず一次独立な  $\psi_1, \dots, \psi_h$  とし、次のように正規化されたものをとる。

$$\psi_j(z; s, \eta) = e^{-\frac{2i}{3}z} \left( \frac{z_1^{2i}}{z^{2i}} + \frac{z_2^{2i}}{z^{2i}} + \frac{z_3^{2i}}{z^{2i}} + \dots \right) \quad \text{near } \Sigma_0$$

他の frame  $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_h$  は、ある  $GL(h, \mathbb{C})$ -値函数  $B(z)$  を用いて

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_h \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_h \end{pmatrix}$$

の形に書けるから、もし正規化された  $\psi_j$  たちが命題 (2.20) (e)

が定まる  $\psi_j$  と異なる, 2 11 本 (実際異なる, 2 11 本のだが) 後から B 項の修正が入れたい (後述).

Remark (3.6)

§4 で,  $k=2$  の場合には, テーラー関数を用いた具体的な  $\psi_j$  を与える.

±2. 縦ベクトル  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$  を各  $0_i$  のまわりで展開して, 次のように行列表示しておく. 以後の計算は見かけ.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(z; \gamma) \\ \vdots \\ \psi_k(z; \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{3}z} \left( \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{z_1^{k-1}}{3^{k-2}} + \dots \right) \dots e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \left( \frac{z_1^{k-2}}{3^{k-2}} + \frac{z_2^{k-2}}{3^{k-3}} + \dots \right) \\ \vdots \\ e^{-\frac{\eta_1}{3}z} \left( \frac{z_1^{k-2}}{3^{k-2}} + \frac{z_2^{k-2}}{3^{k-3}} + \dots \right) \dots e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \left( \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{z_1^{k-1}}{3^{k-2}} + \dots \right) \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3^{k-2}} \begin{pmatrix} z_1^{k-1} & \dots & z_1^{k-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{k-2} & \dots & z_1^{k-1} \end{pmatrix} + \dots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{3}z} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \end{pmatrix}$$

今は  $0_1, \dots, 0_k$  が真性特異点を持つ.  $\infty_1, \dots, \infty_k$  の近傍では正則な関数  $\psi_\infty$  を使う. 2 11 子の  $\psi_j$  の, 次の命題が目標になる.

命題 (3.7)

ある一次独立な  $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_k$  に対し (2. 次をみたす) 行列値関数  $A_0(z), A_1(z), A_2(z)$  を,  $\tilde{\psi}_j$  たちの特異点  $0_i$  における漸近挙動が

構成できる。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_1 + A_2\right) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix} = -\frac{\eta}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} A_0 + \frac{1}{2} A_1\right) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix} = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix}$$

正規化した基底  $\psi_1, \dots, \psi_k$  に対する基底上の基底は無理で、次の命題を最初を示すことにする。

命題 (3.3)

正規化した基底 frame  $\psi_1, \dots, \psi_k$  に対し、次の基底行列値関数  $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_0, \hat{A}_1$  が、 $\psi_i$  の基底上の基底から構成できる。

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \hat{A}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{A}_1 + \hat{A}_2\right) \psi = -\frac{\eta}{\sqrt{3}} \psi \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \hat{A}_0 + \hat{A}_1\right) \psi = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \psi \end{cases}$$

証明

$\hat{A}_i$  を示す。上の下側の式の右辺を  $0_i$  のまわりの展開した行列で表わすと

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \psi &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \vdots \\ -\eta_k \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & \dots & \frac{\eta_k}{\sqrt{3}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & \dots & \frac{\eta_k}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \vdots \\ -\eta_k \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{\eta_k}{\sqrt{2}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\eta_1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{\eta_k}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \vdots \\ -\eta_k \end{pmatrix} + \dots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta_1}{\sqrt{3}}} \\ \vdots \\ e^{\frac{\eta_k}{\sqrt{3}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よ、 $z$ 

$$(3.9) \quad \hat{A}_0 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & & \\ & \dots & \\ & & -\eta_k \end{pmatrix}$$

よければ

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z} \hat{A}_0 \right) \psi = \left\{ \frac{1}{z^{k+1}} \left[ \begin{pmatrix} \eta_1 & & \\ & \dots & \\ & & \eta_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\eta_1 & & \\ & \dots & \\ & & -\eta_k \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{z^{k+2}} ( \quad ) + \dots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta_1}{z}} \\ \vdots \\ e^{\frac{\eta_k}{z}} \end{pmatrix}$$

よる  $z^{-k}$  の項が消えた。さらに

$$(3.10) \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0, & (\eta_1 - \eta_2) z^{k-1}, & \dots, & (\eta_1 - \eta_k) z^{k-1} \\ (\eta_2 - \eta_1) z^{k-1}, & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (\eta_k - \eta_1) z^{k-1} & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

よければ

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z} \hat{A}_0 - \hat{A}_1 \right) \psi = \left\{ \frac{1}{z^{k+2}} ( \quad ) + \frac{1}{z^{k+3}} ( \quad ) + \dots \right\} \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta_1}{z}} \\ \vdots \\ e^{-\frac{\eta_k}{z}} \end{pmatrix}$$

よる  $z^{-(k+1)}$  の項も消えて、命題 (3.5) より右辺は自動的に  $0$  となり、求める式ができた。

上例も同様だが、 $\eta \in \mathbb{C}$  のまわりで  $\eta = \eta_i + \eta_i^1 z + \eta_i^2 z^2 + \dots$  と展開しておく必要がある。結果だけ、しかる  $k=2$  の場合だけ書いておく。

$$(3.11) \quad \tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & & \\ & \dots & \\ & & -\eta_k \end{pmatrix}$$

$$\text{B) } \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & (\eta_1 - \eta_2) \xi_1^2 \\ (\eta_2 - \eta_1) \xi_1^{-1} & -\eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{B) } \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1) \xi_1^2 \xi_1^{-1} & (\eta_2 - \eta_1) (\xi_1^2 \xi_1^{-2} - \xi_2^2) + (\eta_1 - \eta_2) \xi_1^2 \\ (\eta_1 - \eta_2) (\xi_1^2 \xi_1^{-1} - \xi_2^{-1}) + (\eta_2 - \eta_1) \xi_1^{-1} & -\eta_2^2 + (\eta_1 - \eta_2) \xi_1^{-1} \xi_1^2 \end{pmatrix}$$

とおけば、上側の式も得るなり。

命題 (3.7) を示す前に、frame 変換の公式を作るとおく。

補題 (3.4)

4.  $\hat{A}_1, \hat{A}_2$  が命題 (3.3) の式を満たす (2.11) とおいて、frame  $B\psi$  では次が成り立つ。

$$\left( \frac{1}{\xi_2} B \hat{A}_1 B^{-1} + \frac{1}{\xi_1} B \hat{A}_2 B^{-1} + B \tilde{A}_3 B^{-1} \right) B\psi = -\frac{\eta}{\xi_2} B\psi$$

$$\left( \frac{1}{\xi_1} B \hat{A}_1 B^{-1} + \frac{\partial B}{\partial \xi_2} B^{-1} + B \hat{A}_2 B^{-1} \right) B\psi = \frac{\partial}{\partial \xi_2} (B\psi)$$

証明は  $\frac{\partial}{\partial \xi_2} (B\psi) = \frac{\partial B}{\partial \xi_2} \psi + B \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}$  より容易に成る。

命題 (3.7) の証明

命題 (3.3) では  $\frac{1}{\xi} \tilde{A}_i = \hat{A}_i$  が一般に成り立つ、2.11 である。よって frame 変換 (2.11)  $\frac{1}{\xi} B \tilde{A}_i B^{-1} = B \hat{A}_i B^{-1} + \frac{\partial B}{\partial \xi} B^{-1}$  が成り立つよと仮定する。この式は  $\frac{\partial B}{\partial \xi} = B \left( \frac{1}{\xi} \tilde{A}_i - \hat{A}_i \right)$  と線型常微分方程式から常微分方程式で解ける。

以上九条をめでかく。

### 定理 (3.15)

(2.9) (2.10) (2.11) (2.13) (2.15) を満たす  $S$  に対して  $(Z, H^0(S, L^{\otimes 30} \pi^* \mathcal{O}(k-1)))$  の元  $\psi$ ,  $\psi$  を  $4k$  を正規化して選ぶ。  $\psi$  の特異点のまわりで展開し、(3.9) (3.10) (3.11) (3.12) (3.13) を  $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2$  と決め、さらに線型常微分方程式  $\frac{\partial B}{\partial Z} = B \left( \frac{1}{2} \tilde{A}_1 - \hat{A}_1 \right)$  を解いて、  $A_i = B \tilde{A}_i B^{-1}$  とおき、最後に (2.21) を  $T_1, T_2, T_3$  と定めれば、Kahm 方程式の解が得られる。

### Remark (3.16)

(a) 方程式  $\frac{\partial B}{\partial Z} = B \left( \frac{1}{2} \tilde{A}_1 - \hat{A}_1 \right)$  に初期値に関する自由度、つまり定数行列  $P \in GL(k, \mathbb{C})$  を左からかけた  $(B \rightarrow PB)$  の自由度がある。これが命題 (2.20) の最後、証明の概略 (c) で示した自由度にほかならない。

(b) 定理 (3.15) のとおり、Kahm 方程式の解は、  $\Gamma$  を  $\mathbb{P}^1$  の  $S$  個の基点  $O_1, \dots, O_k$ ,  $\gamma$  を  $2k$  の挙動  $e^{\frac{\gamma_1}{3Z}}, \dots, e^{-\frac{\gamma_k}{3Z}}$ , および positive divisor  $D_1 = (k-1)O_1 + (k-2)O_2 + \dots + (k-2)O_k, \dots, D_k = (k-2)O_1 + \dots + (k-2)O_{k-1} + (k-1)O_k$  とし  $\gamma$  を  $\Gamma$  から Baker-Akhiezer 函数 (Baker-Akhiezer  $k$ -point 函数)  $\psi_1, \dots, \psi_k$  を通して構成すればいい。この仕組みは [3][4][6][10] と全く同じである。命題 (3.7) の方程式も成り立たすために、  $\Gamma$  を

マン面  $S$  上、 $11$  かつ  $10$  の条件が必要だ。たわけがある。

Nahm 方程式も、 $sp(2n)$  hierarchy の reduction になる。これは、Monopole の topological charge が行列の井戸に反映している。

#### §4 Nahm 方程式の解の表示

この章では、 $n=2$  の場合に、§3 の正規化された frame  $\psi_1, \psi_2$  の具体的表示を与える。一般の場合には、条件付き (予想を含む形) で最後に記す。

以下、spectral curve  $S$  は non-singular (コンパクトリーマン面) があると仮定する。

まず、記号とリーマン面に関するよく知られた結果をまとめておく。

一般に、 $S$  が genus  $g$  のコンパクトリーマン面の時、

$H_1(S, \mathbb{Z})$  の生成元  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  を交点数が  $\alpha_i \times \alpha_j = \beta_k \times \beta_l = 0$ 、 $\alpha_i \times \beta_j = \delta_{ij}$  と選ぶ。

コンパクトリーマン面上の正規化 1-form の次元は genus に等しい。その basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  を  $\int_{\alpha_j} \omega_i = \delta_{ij}$  とした方がよいと決める。 $\gamma_k = \int_{\beta_k} \omega_j$  とリーマン面の周期行列としよう。

$\omega(P, \lambda)$  を  $S$  上の 1 点  $P$  を極の pole、他は正規化

1-form (第2種のAbel微分)  $\omega_j = \int_{\alpha_j} \omega(p, k) = 0 \quad j=1, \dots, g$  を満たすものを選び出すことにする。

$\mathcal{O}$  をリーマン面  $S$  に対するテータ函数, 即ち  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_g) \in \mathbb{C}^g$  上の正則函数が

$$(4.1) \quad \theta(\mu) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^g m_j \mu_j + \pi i \sum_{j,k=1}^g \tau_{jk} m_j m_k\right)$$

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_g)$   $\tau_{jk}$  は  $S$  の周期行列

と  $\mathbb{Z}^g$  上の級数を定義される函数とする。

$\omega$  をアーベル写像, 即ちリーマン面  $S$  のヤコビ多様体  $\mathbb{C}^g / \Gamma$  ( $\Gamma = \left\{ \sum_{j=1}^g m_j \alpha_j + \sum_{j=1}^g n_j \tau_j \mid m_j \in \mathbb{Z}, \alpha_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t, \tau_j = (\tau_{1j}, \dots, \tau_{gj})^t \right\} \subset \mathbb{C}^g$ ) の写像  $\omega: p \in S$  に對して

$$\omega(p) = \begin{pmatrix} \int_{P_0}^p \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{P_0}^p \omega_g \end{pmatrix}$$

が定めるものを選び出す。ここで  $P_0$  は  $S$  上の基準点が1個決められておく。 $\omega$  を  $\mathbb{C}^g / \Gamma$  の写像とみる。積分路のとりかたに依存するが、ヤコビ多様体  $\Gamma$  の写像とみる  $\omega$  well-defined である。

±2.  $g=2$  の時,  $\omega$  を  $\mathbb{C}^2 / \Gamma$  は系(2.14)より  $(z-1)^2 = 1$  である。

### 定理(4.2)

次の2つの函数 (ポラトーマー  $\theta$  (0.2) を含む  $S$  上の函数)



$\psi_1, \psi_2$  が正規化された  $H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$  の frame を与える。

$$\psi_1(z:P) = e^{-z} \left\{ \eta_1 \int_{p_0}^P \omega(0_1, z) + \eta_2 \int_{p_0}^P \omega(0_2, z) + C_1 \right\} \\ \times \frac{\theta(\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(0_1) - z\mathcal{U} + k) \frac{\partial}{\partial z} \theta(\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(0_1) + k) \Big|_{P=0_1}}{\theta(\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(0_1) + k) \theta(-z\mathcal{U} + k)}$$

$$\psi_2(z:P) = e^{-z} \left\{ \eta_1 \int_{p_0}^P \omega(0_1, z) + \eta_2 \int_{p_0}^P \omega(0_2, z) + C_2 \right\} \\ \times \frac{\theta(\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(0_2) - z\mathcal{U} + k) \frac{\partial}{\partial z} \theta(\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(0_2) + k) \Big|_{P=0_2}}{\theta(\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(0_2) + k) \theta(-z\mathcal{U} + k)}$$

ただし,  $\{0_1, 0_2\} = S \cap \pi^{-1}([0, 1]) \subset \pi^{-1}(0)$   $0_i = (0, \eta_i)$

$p_0$  は  $S$  の基準点  $\Rightarrow$  任意に 1 個決めておく。

$\omega(0_i, z)$  は  $0_i$  を局所座標  $z$  (projection の制限) での

$-\frac{1}{z^2} dz$  とする主要部をもちた 2 種の  $\mathbb{P}^1$  の微分形式を正規化

したものである。

$C_1, C_2$  はある定数

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2\pi i} \left( \eta_1 \int_{\beta} \omega(0_1, z) + \eta_2 \int_{\beta} \omega(0_2, z) \right)$$

$k$  は  $g-1-p$  の定数。  $g$  は genus  $g$  であり  $k = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}g$

$\frac{\partial}{\partial z} \theta(\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(0_i) + k) \Big|_{P=0_i}$  は  $\mathbb{P}^1$  写像とテータ関数の合成で定義される  $g-1-p$  面上の関数  $z$  のまわりの局所座標  $z$  を表わした時の  $z$  による  $0_i$  での微分係数

証明の概略

(a) well-defined

積分路のとり方に依存しない事は、ポロトータ変換型では

積分値は変わらない事とテータ函数の性質から容易に示される。

(b)  $S = \{0, 0\}$  上正則

$\psi_j$  の形と、テータ函数の0点一般論より  $\theta(w(p) - u(p) + k)$  は0点のみ1位の0点を持つ事から、おなじにわかる。

(c)  $0_i$  の挙動

$$\int e^{\frac{m_i}{\alpha} z} \psi_j(z; p) \Big|_{p=0_i} = 0_{ij}$$

と示せばよいが、これを  $C_1, C_2$  で適当に定めれば容易に示せる。

系 (4.3)

$A_i$  の計算に必要は  $\psi_j$  の展開項は次のように表わされる。

$$\sum_1^{i+1} (z) = \frac{z}{\alpha} \left( e^{\frac{m_i}{\alpha} z} \int \psi_i(z; p) \Big|_{p=0_i} \right) \quad i=1, 2$$

$$\sum_1^{i+1} (z) = \left( e^{\frac{m_j}{\alpha} z} \int \psi_i(z; p) \Big|_{p=0_j} \right) \quad j=1, 2 \quad i=1, 2$$

$$\sum_2^{i+1} (z) = \frac{z}{\alpha} \left( e^{\frac{m_j}{\alpha} z} \int \psi_i(z; p) \Big|_{p=0_j} \right) \quad j=1, 2 \quad i=1, 2$$

最後に右が一般の場合に適用できる。positive divisor  $\delta_1, \dots, \delta_k$  を

$$\delta = (k-1)\delta_1 + (k-2)\delta_2 + \dots + (k-2)\delta_k$$

...

$$\delta_i = (k-2)\delta_1 + \dots + (k-2)\delta_{i-1} + (k-1)\delta_i + (k-2)\delta_{i+1} + \dots + (k-2)\delta_k$$

が示す。  $\deg \mathcal{O}_k = (k-1)(k-2) + k-1 = (k-1)^2 = \text{genus}$  である。

定理 (4.4)

0), ...  $\mathcal{O}_k$  が一般因子なSは

$$\psi_k(z, P) = e^{-z \left\{ \eta_1 \int_{P_0}^P \omega(0_1, 2) + \dots + \eta_k \int_{P_0}^P \omega(0_k, 2) + C_k \right\}}$$

$$\times \frac{\Theta(\omega(P) - \omega(\sigma_k) - zU + K) \frac{\partial \Theta}{\partial z}(\omega(P) - \omega(\sigma_k) + H) \Big|_{P=P_k}}{\Theta(\omega(P) - \omega(\sigma_k) + K) \Theta(\omega(\sigma_k) - \omega(\sigma_k) - zU + K)}$$

$$U = \left( \frac{1}{2\pi i} \left( \eta_1 \int_{\beta_1} \omega(0_1, 2) + \dots + \eta_k \int_{\beta_k} \omega(0_k, 2) \right) \right), \dots, \frac{1}{2\pi i} \left( \eta_1 \int_{\beta_1} \omega(0_1, 2) + \dots + \eta_k \int_{\beta_k} \omega(0_k, 2) \right)$$

が正規化±1に frame を与える。

証明は定理(4.2)と同じである。

Remark (4.5)

spectral curve の条件の, 本ト(2.15) 中の  $\mathcal{O}_k$  の一般であることが導かれたのは正しいかと思うが, 今のところ証明はできていない。

あとがき

以上の内容は, [14] とほぼ同じであるが, 維数の関係上, いくつか簡略化されている。

なお, §2 の結果の一つは, [1] の解説が非常にわかりやすい。

## References

- [1] Atiyah, M.F.; Geometry of monopoles, Monopoles in Quantum field theory, World Scientific, Singapore, 3-20 (1982)
- [2] Corrigan, E.; Goddard, P.; Construction of instantons and monopole solutions and reciprocity, Ann. Phys. 154, 253-279 (1984)
- [3] Date, E.; Multi-soliton solutions and quasi-periodic solutions of nonlinear equations of Sine-Gordon type, Osaka J. Math. 19, 125-158 (1982)
- [4] 伊達悦朗, 田中俊一 ;  $KdV$  方程式, 紀伊國屋書店
- [5] Donaldson, S.K.; Nahm's equations and the classification of monopoles, Comm. Math. Phys. 96, 387-408 (1984)
- [6] Dubrovin, B.A.; Theta functions and nonlinear equations, Russ. Math. Surv. 36:2 11-92 (1981)
- [7] Hitchin, N.J.; Monopoles and geodesics, Comm. Math. Phys. 83, 579-602 (1982)
- [8] Hitchin, N.J.; On the construction of monopoles, Comm. Math. Phys. 89, 145-190 (1983)
- [9] Jaffe, A.; Taubes, C.H.; Vortices and monopoles, Boston: Birkhauser, (1980)
- [10] Krichever, I.M.; Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, Russ. Math. Surv. 32:6, 185-213 (1977)

- [11] Nahm, W.; The algebraic geometry of multimonopoles, preprint
- [12] Nahm, W.; Self-dual monopoles and colorons, preprint
- [13] 島谷健一郎: Monopole に関する Hitchin, Donaldson, Nahm の結果について, 低次元多様体の幾何学的諸相 (1985)
- [14] 島谷健一郎: Monopole の spectral curve と Nahm の方程式: 修士論文
- [15] Ward, R.; A Yang-Mills-Higgs monopole of charge 2, Comm. Math. Phys. 79, 317-325 (1981)