数理解析研究所講究録
第592巻 1986年 97-105

くさびの刃定理と細くなる領域

東大 理、リエージュ大 理
ベルギーのF.N.R.S.の研究員
Lieutenant Jean-Louis.

序

二〇年前に、リスボンで、Martineau先生は『くさびの刃定理』と佐藤先生の超関数理論の関係をコホモロジー的に説明しました。その後、森本先生 [4] と柏原先生 [1] は、相対コホモロジーを使って、この関係を精密にしました。森本の結果は $\mathbb{R}^n$ 全体についての結果ですが柏原のは一点の近傍のローカルな結果になります。これから、次の質問を考えましょう。

Ωを $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とする時、『くさびの刃定理』がΩ上成立するか？ここでは、Ωが凸である場合は、こんな質問に肯定的に答えます。

森本と柏原の結果の証明には、Bochner柱状領域定理が利用される。Ωが $\mathbb{R}^n$ の部分集合の時、**細くなる領域**を導入して、小松によって発見されたローカルなBochner定理をこの問題に応用可能にしよう。

記法

$\mathbb{C}^n$の点$z=(z_1, \ldots, z_n)$に対して$z_j = x_j + iy_j$と置く。zに$(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$を対応されたことにより $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{R}^{2n}$ を同一視する。
$(0,\ldots,1,\ldots,0)$をユニットベクトルといい e_j と記す。$A \subset \mathbb{C}^n$ を集合である、
A の凸包、$\langle\langle A \rangle\rangle = \{\sum_{j=1}^{J} \theta_j z_j : J \in \mathbb{N}, z_j \in A, \theta_j \geq 0, \sum \theta_j = 1\}$ で書く。

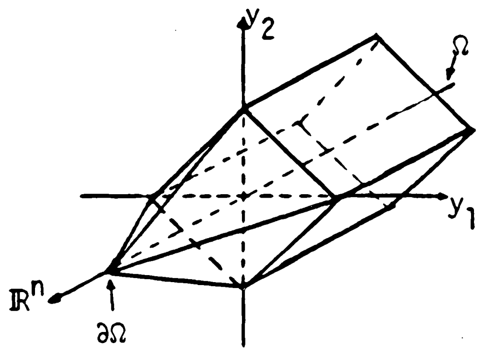
閉錐 $\{z\in\mathbb{C}^n : y_1 \geq 0,\dots,y_j \geq 0\}$ は Γ_j $(j=1,\dots,n)$ と記す。ここで、$z, z' \in \mathbb{C}^n$ に対して、ヘルミシャン内積 $\langle z, z'\rangle = \mathrm{Re}(\Sigma_{j=1}^n z_j \overline{z'_j})$ で定めた。以上、A,B を $\mathbb{C}^n$ の集合で、ユークリデアン距離は $d(A,B)$ を書くことがある。更に、$\mathcal{O}$ を $\mathbb{C}^n$ 上の正則函数の層とする。

Ω を $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n + i\{0\}$ の開凸部分集合とする時、$\Omega \ni 0$ であると仮定して一般性を失うことではない。以下では、$a > 0$ に対して、次の不等式が成立：

$$r < \inf\,[1,\ d(0, \complement\Omega)] \tag{1}$$

さて以上の準備の下に<u>細くなる</u> Ω <u>複素近傍</u> Ω_r を定義しよう：

$$\Omega_r := \langle\langle\, \Omega \cup \textstyle\bigcup_{j=1}^n \{ir'e_j : -r<r'<r\}\,\rangle\rangle \tag{2}$$



この時、

$$\rho_r(x) := \sup\{s>0 : x+ise_j \in \Omega_r\}$$

は well-definedな函数である。従って、

$$z^0 \in \Omega_r \Longleftrightarrow \begin{cases} x^0 \in \Omega \\ \sum_{j=1}^n |y_j^0| < \rho_r(x^0) \end{cases} \tag{3}$$

$$s\,\rho_r(.) = \rho_{sr}(.),\ \forall r \in]0,1] \tag{4}$$

$$x^0 \in \Omega \Rightarrow \{x : |x-x^0| < \rho_r(x^0)\} \subset \Omega \tag{5}$$

こともある。

ここで、小松のローカルなBochner定理を用いれば、次の命題を得る：

命題 1．$n \geq 2$ を固定し、任意の $f \in \mathcal{O}(\Omega_r \setminus \Gamma_2)$ は $\Omega_{r(2-\sqrt{2})}$ まで解析接続される。

<u>証明</u>．まず、$z^0 \in \Omega_{r(2-\sqrt{2})}$ に対して、

$$0 < \delta < (2-\sqrt{2})\ \rho_r(x^0) - \Sigma_{j=1}^n |y_j^0| \tag{$*$}$$

が存在する。ここで、$r' = \rho_r(x^0) - \delta - \sum_{j=3}^{n}|y_j^0|$ と置けば、

$$\{(x_1^0 \pm ir', x_2^0), (x_1^0, x_2^0 \pm ir')\} \times (z_3^0, \ldots, z_n^0) \subset \Omega_r$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| \leq r'\} \subset \Omega$$

$$K := \{(z_1, z_2, z_3^0, \ldots, z_n^0) : |(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0)| \leq r' - (\sigma_1 y_1 + \sigma_2 y_2); \sigma_j = \pm 1\} \subset \Omega_r$$

が成立する。

従って、f は $\Omega_r \setminus \Gamma_2$ の上で定義された正則函数とする。$\eta > 0$ を十分小さい正数にとれば

$$b := \{z \in \mathbb{C}^{n-2} : |z - (z_3^0, \ldots, z_n^0)| < \eta\}$$

$$U := \{(z_1, z_2, z_3^0, \ldots, z_n^0) : |(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0)| < r' - (\sigma_1 y_1 + \sigma_2 y_2); \sigma_j = \pm 1\} \times b$$

と記して、$U \setminus \Gamma_2 \subset \Omega_r \setminus \Gamma_2$ となる。$\mathbb{C}^n$ の座標系$(z_1, \ldots, z_n)$を $z'_j = (z_j - x_j^0)/r'$ $(1 \leq j \leq 2)$、及び $z'_j = z_j$ $(2 \leq j \leq n)$ として新しい座標系 $(z'_1, \ldots, z'_n)$ に取り換えると

$$U \setminus \Gamma_2 := [\{(z'_1, z'_2) : |x'| < 1 - (\sigma_1 y'_1 + \sigma_2 y'_2);\ \sigma_j = \pm 1\} \times b] \setminus \Gamma_2$$

となる。従って、[2]の定理1 ($\varepsilon = 1/2$) により、f は

$$[\{(iy'_1, iy'_2) : y'_1 + y'_2 < 2 - \sqrt{2}\} \times b] \cap \Gamma_2 \qquad (**)$$

の近傍で正則的に拡張される。元座標系では、(**)が

$$[\{(x_1^0 + iy_1, x_2^0 + iy_2) : y_1 + y_2 < r'(2 - \sqrt{2})\} \times b] \cap \Gamma_2$$

となる。(*)が成り立つから、結果が得られる。

注意. 明らかに、$\gamma \subset \mathbb{R}^{n-2}$ が開凸錐状とすれば、$\{z \in \Omega_r : (y_3, \ldots, y_n) \in \gamma\}$ を Ω_r と取り替えても命題1は成り立つ。

命題 2. $n \geq j \geq 3$ の仮定のもとで、制限写像

$$H^{j-1}_{\Omega_r \cap \Gamma_j}(\Omega_r, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{j-1}_{\Omega_{r'} \cap \Gamma_j}(\Omega_{r'}, \mathcal{O})$$

の射は、$r' \in\ ]0, r(2-\sqrt{2})/2(j-1)[$ の時、零となる。

証明. まず $\{z \in \mathbb{C}^n : y_k < 0\}$ を E_k と記す。

$$\mathcal{U}'_r = \{\Omega_r \cap E_1, \ldots, \Omega_r \cap E_j\}\ ;\ \mathcal{U}_r = \mathcal{U}'_r \cup \{\Omega_r\}$$

とすれば、$(\mathcal{U}_r, \mathcal{U}'_r)$ は $(\Omega_r, \Omega_r \cap \Gamma_j)$ のStein相対開被復である。ここで、$\check{\mathrm{C}}$echのコホモロジーの $(j-1)$ 一余輪体 f を次式で定める：

$$\begin{cases} f = (f_1, \ldots, f_j)\ ;\ f_k \in [\Omega_r \cap (\bigcap_{k \neq \ell \leq j} E_\ell)] \\ \Omega_r \cap (\bigcap_{\ell \leq j} E_\ell) \text{ の上で } \sum_{k=1}^{j} (-1)^k f_k = 0 \text{ が成立つ} \end{cases} \qquad (i)$$

さて、k, $\underline{k} \in \{1, \ldots, j\}$ 、任意の $z^0 \in \Omega_r \cap (\bigcap_{k \neq \ell \leq j} E_\ell)$ に対して、$\{z^0_\ell\}$ を正の向きに囲む十分小さい閉路 $\mathcal{C}_\ell$ $(\ell \leq n)$

$$\phi(z, \zeta) := \sum_{\ell=1}^{j} (\zeta_\ell - z_\ell)$$

と置けば、次ぎの函数

$$f_k^{(\underline{k})}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{\mathcal{C}_1} \cdots \oint_{\mathcal{C}_n} \frac{f_k(\zeta) d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{\phi(z, \zeta) \prod_{\underline{k} \neq \ell \leq n} (\zeta_\ell - z_\ell)}$$

は z^0 の近傍上で定義される。$\Omega_r \cap (\bigcap_{k \neq \ell \leq j} E_\ell)$ 凸集合なので $f_k^{(\underline{k})}$ は $\Omega_r \cap (\bigcap_{k \neq \ell \leq j} E_\ell)$ 上でwell-defined正則な函数である。今、この函数について、補題を準備しよう。

補題. $r' = r(2 - \sqrt{2}) / 2(j-1)$を固定し、$f_k^{(\underline{k})}$ は $\Omega_{r'} \cap (\bigcap_{k, \underline{k} \neq \ell \leq j} E_\ell)$ まで解析接続出来る。

証明. $k = \underline{k}$ 場合は明らかので、$k \neq \underline{k}$ を仮定しよう。

まず、$y^0_k = 0$ 、 $y^0_{\underline{k}} > 0$を満たす $z^0 \in \Omega_r$ に対して、ε 、λ 、a_k をこういう風に選ぼう：

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \varepsilon < \rho_r(x^0) - \sum_{\ell=1}^{n} |y^0_\ell| \\ 0 < \lambda < (\varepsilon + 2 \sum_{\underline{k} \neq \ell \leq n} |y^0_\ell|) / (\varepsilon + 2 \sum_{\ell=1}^{n} |y^0_\ell|) \\ a_k = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} |y^0_\ell| \end{array} \right\} \qquad (*)$$

ここで、$\ell \neq k$ の時、十分小さい$a_\ell \in]0, (1-\lambda)a_k / 4(j-1)[$を

選んで、

$$\mathscr{C}_1 \times \ldots \times \mathscr{C}_n := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_k - x_k^0| = a_k ;\ |\zeta_{\underline{k}} - x_{\underline{k}}^0 + \frac{i\varepsilon}{4(j-1)}| = a_k ;$$

$$\ell \neq k, \underline{k} \Longrightarrow |\zeta_\ell - z_\ell^0| = a_\ell\} \subset \Omega_r \cap (\bigcap_{k \neq \ell \leq j} E_\ell)$$

が満足される。更に、

$$\tilde{z}^0 = (z_1^0, \ldots, z_{\underline{k}-1}^0, x_{\underline{k}}^0 - \frac{i\varepsilon}{4(j-1)}, z_{k+1}^0, \ldots, z_n^0)$$

と置けば、

$$T := \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{n} \{(\zeta_\ell, z_\ell) \in \mathbb{C}^2 : |\zeta_\ell - \tilde{z}_\ell^0| = a_\ell ; |x_\ell - \tilde{x}_\ell^0| < a_\ell, |y_\ell - \tilde{y}_\ell^0| < \frac{1-\lambda}{2(j-1)} a_k\}$$

$$\times \quad \{(\zeta_k, z_k) \in \mathbb{C}^2 : |\zeta_k - x_k^0| = a_k, |z_k - x_k^0| < \lambda a_k\}$$

が定義された。$(\zeta, z) \in T$ に対して、

$$|\zeta_k - z_k| \geq |\zeta_k - x_k^0| - |x_k^0 - z_k| > (1-\lambda) a_k$$

$$|\sum_{k \neq \ell \leq j} (\zeta_\ell - z_\ell)| \leq \sum_{k \neq \ell \leq j} (|\zeta_\ell - \tilde{z}_\ell^0| + |\tilde{x}_\ell^0 - x_\ell| + |\tilde{y}_\ell^0 - y_\ell|)$$

$$\leq \sum_{k \neq \ell \leq j} (2\, a_\ell + \frac{1-\lambda}{2(j-1)} a_k) \leq \sum_{k \neq \ell \leq j} \frac{1-\lambda}{(j-1)} a_k = (1-\lambda)\, a_k$$

が得られるので T の上で $\phi \neq 0$ を満足するものとする。これによつて、$(\zeta_{\underline{k}} - z_{\underline{k}})$ の因子が(ii)の分母でないから、

$$b := \{z \in \mathbb{C}^{n-2} : |z_\ell - z_\ell^0| < a_\ell \ (\ell \neq k, \underline{k})\}$$

とおく、$f_k^{(\underline{k})}$ の函数は

$$\Big\{(z_k, z_{\underline{k}}) \in \mathbb{C}^2 : |z_k - x_k^0| < \lambda a_k ; |x_{\underline{k}} - x_{\underline{k}}^0| < a_{\underline{k}} ;$$

$$\left|\frac{\varepsilon}{4(j-1)} + y_{\underline{k}}\right| < \frac{1-\lambda}{2(j-1)} a_k\Big\} \times b$$

上に解析接続できる。特に、(＊)により

$$\frac{y_{\underline{k}}^0}{2(j-1)} = \frac{1}{2(j-1)} \left[\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} |y_\ell^0| - \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{k \neq \ell \leq n} |y_\ell^0|\right] < \frac{a_k}{2(j-1)} (1-\lambda)$$

を得るので、この開集合は

$$\left\{(x_k^0, x_{\underline{k}}^0+iy_{\underline{k}}) : y_{\underline{k}} < \frac{y_{\underline{k}}^0}{2(j-1)} - \frac{\varepsilon}{4(j-1)}\right\} \times b \qquad (**)$$

の近傍である。さて、ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすればし $y_k^0 = 0$ 、$y_{\underline{k}}^0 > 0$ を満たす任意の $z^0 \in \Omega_r$ に対して同様にやれば、命題1により、$f_k^{(\underline{k})}$ は

$$\left\{(z_1^0, \ldots, z_k, \ldots, z_{\underline{k}}, \ldots, z_n^0) \in \mathbb{C}^n : |(x_k, x_{\underline{k}})-(x_k^0, x_{\underline{k}}^0)| < \frac{1}{2(j-1)}\rho_r(x^0);\right.$$

$$\left. y_{\underline{k}} > 0 \text{ , } |y_k| + y_{\underline{k}} < \frac{2-\sqrt{2}}{2(j-1)}\left[\rho_r(x^0) - \sum_{k,\underline{k}\neq \ell}|y_\ell^0|\right]\right\}$$

まで正則な函数になる。

以上により補題の証明が完成した。□

さて、命題2の証明を完結させよう。(i)とCauchy積分とΦの定義により、

$$\Omega_{r'} \cap \left(\bigcap_{k\neq \ell<j} E_\ell\right)\text{上で、} \sum_{\ell=1}^{j} f_k^{(\ell)} = f_k \quad (k=1,\ldots,j) \qquad \text{(iii)}$$

$$\Omega_{r'} \cap \left(\bigcap_{\ell\leq j} E_\ell\right)\text{上で、} \sum_{k=1}^{j} (-1)^k f_k^{(\ell)} = 0 \quad (\ell=1,\ldots,j) \qquad \text{(iv)}$$

が成立する。

最後に $(\mathcal{U}_{r'}, \mathcal{U}'_{r'})$ の任意の $(j-2)$ ー余鎖体を

$$g = \{g_{k,\underline{k}} \in \mathcal{O}[\Omega_{r'} \cap (\bigcap_{k,\underline{k}\neq \ell\leq j} E_\ell)] : 1 \leq k < \underline{k} \leq j\}$$

と記せば、余境界作用素を

$$(\delta g)_k = \sum_{\underline{k}<k} (-1)^{\underline{k}} g_{\underline{k},k} - \sum_{\underline{k}>k} (-1)^{\underline{k}} g_{k,\underline{k}} \text{ , } \quad (k=1,\ldots,j) \qquad \text{(v)}$$

と書く。

$$g_{k,\underline{k}} = (-1)^{\underline{k}-1} f_k^{(\underline{k})} + (-1)^k f_{\underline{k}}^{(k)} \qquad (1 \leq k < \underline{k} \leq j)$$

と定めれば、(iii)、(iv)、(v)により、$\delta g = f$ を得ることが出来る。□

注意．明らかに、$\gamma \subset \mathbb{R}^{n-j}$ が開凸錐状とすれば、$\{z\in\Omega_r : (y_{j+1}, \ldots, y_n) \in \gamma\}$ をΩ_rと取り替えても命題2は成り立つ。

定理 1. $n \geq j > k \geq 0$ に対して、

$$\varinjlim_{r \downarrow 0} H^k_{\Omega_r \cap \Gamma_j}(\Omega_r, \mathcal{O}) = 0$$

が成立する。以上、 $\gamma \subset \mathbb{R}^{n-j}$ が開凸錐状とすれば、$\{z \in \Omega_r : (y_{j+1}, \ldots, y_n) \in \gamma\}$ を Ω_r と取り替えてもこの式は成り立つ。

証明. この証明で、 Ω_r とか $\{z \in \Omega_r : (y_{j+1}, \ldots, y_n) \in \gamma\}$ とか、どちらでも Ω_r で記す。同時、$\ell_1, \ldots, \ell_k \in \{1, \ldots, j\}$ に対して、

$$\Omega_{r;\ell_1,\ldots,\ell_k} := \{z \in \Omega_r : y_{\ell_1} < 0, \ldots, y_{\ell_k} < 0\}$$

と置く。j に関する帰納法で証明を行なる。

$j = 1$ であれば、 Ω_r が凸であるから、解析接続定理により、

$$H^0_{\Omega_r \cap \Gamma_1}(\Omega_r, \mathcal{O}) = 0 \quad , \quad \forall r \qquad \text{(i)}$$

を得る。それで、$j = 2$ と仮定しよう。(i)とCartanのB定理によって、次の完全系列

$$0 \to H^0(\Omega_{r;2}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(\Omega_{r;1,2}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1_{\Omega_{r;2} \cap \Gamma_1}(\Omega_{r;2}, \mathcal{O}) \to 0$$

が成り立つ。従って、

$$H^k_{\Omega_{r;2} \cap \Gamma_1}(\Omega_{r;2}, \mathcal{O}) = \begin{cases} 0 & \forall r,\ k = 0 \quad \text{(ii)} \\ \dfrac{\mathcal{O}(\Omega_{r;1,2})}{\mathcal{O}(\Omega_{r;2})} & \forall r,\ k = 1 \quad \text{(iii)} \end{cases}$$

である。次の相対コホモロジー群の長完全列を考える：

$$0 \to H^0_{\Omega_r \cap \Gamma_2}(\Omega_r, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0_{\Omega_r \cap \Gamma_1}(\Omega_r, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0_{\Omega_{r;2} \cap \Gamma_1}(\Omega_{r;2}, \mathcal{O})$$

$$\to H^1_{\Omega_r \cap \Gamma_2}(\Omega_r, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1_{\Omega_r \cap \Gamma_1}(\Omega_r, \mathcal{O}) \xrightarrow{u_r} H^1_{\Omega_{r;2} \cap \Gamma_1}(\Omega_{r;2}, \mathcal{O})$$

もちろん、(i)により、$H^0_{\Omega_r \cap \Gamma_2}(\Omega_r, \mathcal{O})$ がゼロである。しかし、

その上、(iii)と$\check{\text{C}}$echコホモロジーによって、u_r という射は

$$\frac{\mathcal{O}(\Omega_{r;1})}{\mathcal{O}(\Omega_r)} \xrightarrow{u_r} \frac{\mathcal{O}(\Omega_{r;1,2})}{\mathcal{O}(\Omega_{r;2})}$$

書くことが出来る。命題1の御蔭で、任意の $f \in \mathcal{O}(\Omega_{r;1}) \cap \mathcal{O}(\Omega_{r;2})$, $\Omega_{r(2-\sqrt{2})}$ まで解析接続できる。従って、$\varinjlim_{r\downarrow 0} u_r$ は単射になる。ここで、(ii)により、帰納的極限がexact functorだから、

$$\lim_{r\downarrow 0} H^1_{\Omega_r\cap\Gamma_2}(\Omega_r, \mathcal{O}) = 0$$

が成り立つ。こうして、$j = 2$の場合は証明された。

今、$j \geq 3$ としよう。まず、次の長い完全系列

$$0 \to H^0_{\Omega_r\cap\Gamma_j}(\Omega_r, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0_{\Omega_r\cap\Gamma_{j-1}}(\Omega_r, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0_{\Omega_{r;j}\cap\Gamma_{j-1}}(\Omega_{r;j}, \mathcal{O})$$

$$\to H^1_{\Omega_r\cap\Gamma_j}(\Omega_r, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1_{\Omega_r\cap\Gamma_{j-1}}(\Omega_r, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1_{\Omega_{r;j}\cap\Gamma_{j-1}}(\Omega_{r;j}, \mathcal{O})$$

に $\lim_{r\downarrow 0}$ をする。定理が(j-1)まで証明されたと仮定すれば、

$$\lim_{r\downarrow 0} H^k_{\Omega_r\cap\Gamma_{j-1}}(\Omega_r, \mathcal{O}) = \lim_{r\downarrow 0} H^k_{\Omega_{r;j}\cap\Gamma_{j-1}}(\Omega_{r;j}, \mathcal{O}) = 0 \quad \forall k \leq j-2$$

を得る。従って、命題2により、

$$\lim_{r\downarrow 0} H^k_{\Omega_r\cap\Gamma_j}(\Omega_r, \mathcal{O}) = 0 \qquad \forall k \in \{0,\dots,j-1\}$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。□

とうとう、次の結果も知らせる：

定理 2. $n > T \geq 0$ 場合は、$\mu_1,\dots,\mu_L \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n : \langle y, \mu_\ell\rangle \geq 0,\ \forall \ell \leq L\}$ と置く。もし $\mu_1,\dots,\mu_n$ が線型独立であれば、$\nu_t \in \mathbb{R}^n (t \leq T)$ に対して、次の帰納的極限は

$$\lim_{r\downarrow 0} H^k_{\Omega_r\cap\Gamma}(\Omega_r, \mathcal{O}) = 0 \quad , \ k = 0,\dots,n-T-1$$

なくなります。

最後になりましたが、この二年間『代数解析セミナー』で私を御指導下さった小松先生、並びにしばしば学問上の相談にのっていただいた金子先生に心から感謝致します。

また、奨学金を支給して日本での研究を可能にして下さったロータリーインターナショナルと素晴しい日本語講座を受講させて下さった国際キリスト教大学に厚くお礼申し上げます。

文献

[1] 柏原正樹:超関数の代数的基礎付け、数理解析研究所講究録 108 (1971)、58-71.

[2] 小松彦三郎:A local version of Bochner's tube theorem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect I A, 19, (1972) 201-214.

[3] Martineau Andre:Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes , Instituto Gulbenkian de Sciencia , Lisbonne (1964).

[4] 森本光生:Sur les ultradistributions cohomologiques, Ann. Inst. Fourier, XIX-2 (1969), 129-153 .