数理解析研究所講究録
第 592 巻 1986 年 111-118

BRONSTEIN 作用素と双曲型初期値問題

防衛大　　打越 敬祐

KEISUKE UCHIKOSHI

佐藤超函数の枠組において，任意の双曲型初期値問題の解が存在することはよく知られている（Bony-Schapira [1]）．しかし，この場合，解の存在は正則函数の解析接続の結果を用いて抽象的に示されている．この論説では，Bronstein [2] の論法により，超函数解の定義函数が，具体的に構成されることを説明する．

$x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (or $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$), $D = \partial/\partial x$ とする．解析的係数をもつ偏微分作用素

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

において，$a_{(m,0,\cdots,0)} = 1$ とし，$P(x, \xi)$ は双曲型とする：

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha = 0, \ (x, \xi') \in \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\mathbb{R}^{n-1}$$
$$\Longrightarrow \quad \xi_1 \in \sqrt{-1}\mathbb{R}.$$

$I_m(x,\xi)=0$ の根を $\xi_1=\lambda_1(x,\xi'), \cdots, \lambda_m(x,\xi')$ とし，この重複度は高々 r であるとする．各 $\lambda_j(x,\xi')$ は (x,ξ') の函数である．以下 $r \geqq 2$ とする（$r=1$ のときは易しい）．

さて，local Bochner の定理により，
$(x,\xi')\in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1}$, $|x|<<1$, のとき

$$|\mathrm{Re}\,\lambda_j(x,\xi')| \leq \frac{{}^{\exists}C}{2}\left(|\mathrm{Im}\,x|\cdot|\mathrm{Im}\,\xi'|+|\mathrm{Re}\,\xi'|\right)$$

となる．従って，a, C を十分大とし，$1<s<2$, $s\leq\frac{r}{r-1}$ なら，

$$(1)\quad\begin{cases}\mathrm{Re}\,\xi_1 > C\left(|\mathrm{Im}\,x|\cdot|\mathrm{Im}\,\xi'|+|\mathrm{Re}\,\xi'|+C|\mathrm{Im}\,\xi'|^{1/s}+C\right)\\ a|\mathrm{Re}\,x_j|<1,\ a|\mathrm{Im}\,x_j|<1,\quad 1\leq j\leq n\end{cases}$$

のとき，

$$|I_m(x,\xi)| = \prod_{j=1}^{m}|\xi_1-\lambda_j| \geqq \prod_{j=1}^{m}(\mathrm{Re}\,\xi_1-\lambda_j) \neq 0.$$

低階項まで含めて考えても，(1) $\Rightarrow$ $P(x,\xi)\neq 0$ となる．
そこで，(1) の領域において，形式的に，

$$E_0(x,\xi) = \frac{1}{P(x,\xi)}$$

$$E_j(x,\xi) = -\frac{1}{P(x,\xi)}\sum_{\substack{k+|\alpha|=j\\ k\neq j}}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P(x,\xi)\,\partial_x^\alpha E_k(x,\xi)$$

とおく．このとき，次のことが成立する：

命題 1、領域(1) において、

$$|\partial_x{}^\beta E_\gamma(x,\xi)| \leq C^{\gamma+|\beta|+1}(\gamma+|\beta|)!(1+|\xi|)^{-\frac{m}{s}-\frac{2-s}{s}\gamma+\frac{2-1}{s}|\beta|}$$

以下、このシンボルのもつ意味を説明するが、簡単のため、$n=2$ の場合に限定する。このとき、$\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ を、

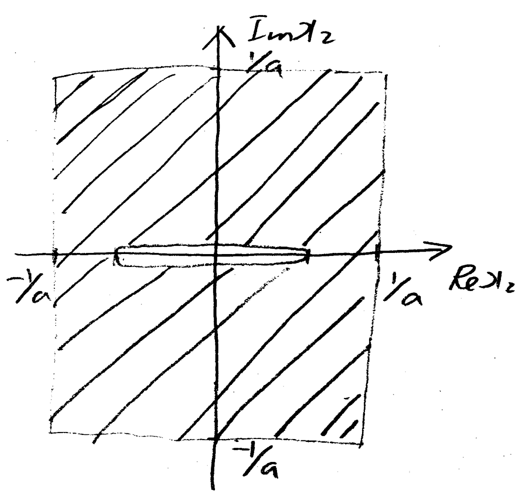
$$\Omega=\Omega_0\cup\Omega_+\cup\Omega_-$$

$$\Omega_0=\{x\in\mathbb{R}\times\mathbb{C};\ a_0|x_1|<1,$$
$$a|\mathrm{Re}\,x_2|<1,\ a|\mathrm{Im}\,x_2|<1,$$
$$\mathrm{Im}\,x_2\neq 0\}$$

$$\Omega_\pm=\{x\in\mathbb{R}\times\mathbb{C};\ a_0|x_1|<1,$$
$$a|\mathrm{Re}\,x_2|<1,\ a|\mathrm{Im}\,x_2|<1,$$
$$\pm\mathrm{Re}\,x_2>a(x_1-R_0)+R\}$$

とする。ここで、$a_0\gg a\gg 1$、$1\gg R, R_0>0$ とする。

$x_1=\mathrm{const.}>0$ における Ω の断面図を右に示す。この図から分かるように、Ω 上の函数で、x_2 について正則なものは、(x_2 について境界値をとれば)



$$|\mathrm{Re}\,x_2|<a(x_1-R_0)+R$$

という領域上の超函数を与える。

さて，bをある決まった正数として，函数空間$\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$ ($s>1$, $q\in\mathbb{Z}_+$)を，次のように定める：

$f(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$

$\Leftrightarrow$ ① $f(x)$はΩ上の函数で，x_1についてC^q級．

② $D_1^i f(x)$, $0\le i\le q$, はx_2について正則．

③ $f(x)=0$ if $x_1\le R_0$．

④ $|\mathrm{Re}\,x_2|<a(x_1-R_0)+R$ のとき，

$$|D_1^i f(x)|\le {}^{\exists}C\exp\{b\,x_1^{\frac{s}{s-1}}|\mathrm{Im}\,x_2|^{\frac{1}{s-1}}\},\quad 0\le i\le q.$$

④′ $|\mathrm{Re}\,x_2|>a(x_1-R_0)+R$ のとき，

$$|D_1^i f(x)|\le {}^{\exists}C,\qquad 0\le i\le q.$$

$f(x)$は，$x_1\ge R_0$に台をもつultradistributionの空間である．あとで，次の定理を証明する：

定理2． a_0を十分大きくしておくと，${}^{\forall}f(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$に対して，${}^{\exists}u(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$が存在して，$P[u]=[f]$をみたす（$[u]$は$x_2$について$u$の境界値をとった超函数）．

次に，$f(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$ ($q\in\mathbb{Z}_+$) のFourier変換を考える．$\varphi(x_1)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$が，$0\le\varphi(x_1)\le 1$,

$$\varphi(x_1)=\begin{cases}1 & |x_1|\le 1/4a_0\\ 0 & |x_1|\ge 1/2a_0\end{cases}$$

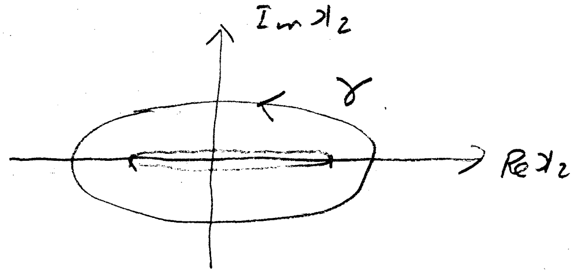
をみたすとき，

$$\hat{f}(\xi)=\frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma} e^{-x\xi}\varphi(x_1)f(x)\,dx$$

とする．但し，

$$\Gamma=\{x\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}\,;\ |x_1|\leq 1/a_0,\ x_2\in\gamma\}$$

とする（γ は右図の通り）．



このとき，$\hat{f}(\xi)$ は

$U=\{\xi\in\mathbb{C}^2\,;$

$$\operatorname{Re}\xi_1>a|\operatorname{Re}\xi_2|+\left(\frac{b}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{s}}s\,|\operatorname{Im}\xi_2|^{1/s}\}$$

において正則で，U 上

$$|\hat{f}(\xi)|\leq a_0^{\,2q}\exp\{b\,a_0^{-\frac{s}{s-1}}a^{\frac{1}{s-1}}\}$$

をみたす．

さて，一般に，$Q(x,\xi)$ が

$V=\{(x,\xi)\in\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\,;$

$$a|\operatorname{Re}x_j|<2,\ a|\operatorname{Im}x_j|<2,\ 1\leq j\leq n,$$

$$\operatorname{Re}\xi_1>a_1|\operatorname{Re}\xi_2|+a_1|\operatorname{Im}x|\cdot|\operatorname{Im}\xi_2|$$

$$+b_1^{\,2}|\operatorname{Im}\xi_2|^{1/s}+a_1^{\,2}\}$$

において正則で，V 上 $|Q(x,\xi)|<C$ をみたすとする．

ここで，$a_1,\ b_1>>1,\ a_1^{\,2}<<a,\ b_1^{\,2}<<b^{(s-1)/s}$ とする．

さて、このような $Q(x,\xi)$ に対し、「Bronstein 作用素」$Q(x,D)$ を次式で定める：

$$Q(x,D)f(x) = \int_{\Delta} e^{x\xi} Q(x,\xi)\hat{f}(\xi).$$

ここで、$f \in \Theta^{s,q}$ $(q \in \mathbb{Z}_+)$ とし、

$$\Delta = \{\xi \in \mathbb{C} \times \sqrt{-1}\mathbb{R}_+ ;$$
$$\mathrm{Im}\,\xi_1 \in \mathbb{R},$$
$$\mathrm{Re}\,\xi_1 = \max\left(a_1 |\mathrm{Im}\,x| \cdot |\mathrm{Im}\,\xi_2| + b_1^2 |\mathrm{Im}\,\xi_2|^{1/s},\ \left(\frac{b}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{s}} s\, |\mathrm{Im}\,\xi_2|^{1/s}\right)\}$$

とする。

このとき、次のことがわかる：

命題3. ① $f(x) \in \Theta^{s,q}(\Omega) \Rightarrow Q(x,D)f(x)$ は、Ω 上の函数で、x' について正則。

② $Q(x,\xi)$ が V 上

$$|Q(x,\xi)| \le C\,|\xi_1|^{-sn-1}$$

をみたせば、$Q(x,D)f(x) \in \Theta^{s,q}(\Omega)$ となり、

$$\|Qf(x)\|_{\Theta^{s,q}(\Omega)}$$
$$\le 2(2a_0^2)^q C \exp\left(b a_0^{\frac{s}{s-1}} a^{\frac{1}{s-1}} + 1\right) \|f(x)\|_{\Theta^{s,q}(\Omega)}$$

③ $Q(x,\xi)\equiv 1$ のとき、対応する作用素を $1(x,D)f(x)$ とすると、$1(x,D)f(x)$ と $f(x)$ は、x_2 について境界値をとると同じ超函数になる（このとき、$1(x,D)f(x)\equiv f(x)$ modulo O-class と書くことにする）。

以上の議論により、冒頭の形式的な計算の意味がわかる、$N\in\mathbb{Z}_+$ を十分大として、

$$E(x,\xi)=\sum_{j=0}^{N}E_j(x,\xi)$$

とする。$E(x,\xi)$ は Bronstein 作用素 $E(x,D)$ を与え、

$$P(x,D)\,E(x,D)=1(x,D)-S_N(x,D)$$

となる。ここで、a_0 と N を十分大きくとると、

$$|S_N(x,\xi)|<\varepsilon\,|\xi|^{-sn-1}\qquad(\varepsilon:任意)$$

とできる。従って、$S_N(x,D)$ のノルムはいくらでも小さくとれる。

次に定理2 を証明する：$\forall f(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\Omega)$ に対し、

$$u(x)=E(x,D)\sum_{j=0}^{\infty}\left(S_N(x,D)\right)^j f(x)$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
P u(x) &= P E \sum_{j=0}^{\infty} S^{j} f(x) \\
&= (1-S) \sum_{j=0}^{\infty} S^{j} f(x) \\
&\equiv f(x) \qquad \text{modulo } O \text{ class.} \\
\therefore P[u(x)] &= [f(x)] \qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

この定理は，未来方向に台をもつ超函数の空間で，$P(x,D)$が可解になることを示している．この定理から，標準的議論により，双曲型初期値問題を解くことができる．

文献

[1] Bony-Schapira, Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Lecture Notes in Math. 287, Springer, 82-98.

[2] Bronstein, The Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristic of variable multiplicity, Trudy Moskov. Math. Obšč, 41(1980), 83-99.

なお，本稿のより詳しい解説は，数理研講究録 578 短期共同研究「Infinite analysis」にある．