数理解析研究所講究録
第 594 巻 1986 年 12-21

概均質ベクトル空間の理論
―分類理論を中心として―

筑波大・数学系 木村達雄
Tatsuo Kimura

1961年に佐藤幹夫先生によって創始された概均質ベクトル空間の理論は，約$\frac{1}{4}$世紀たった現在，多くの人が研究をするようになり論文もふえてきている。そこで大ざっぱにでも，今までの事をふり返ってまとめておくのも何かの役に立つかもしれないので，簡単に，やってみることにする。

概均質ベクトル空間の理論は大きくわけると

(1) ゼータ関数（関数等式をもつDirichlet級数，超関数など）

(2) b-関数　(3) 相対不変式の複素巾のフーリエ変換

(4) p進体や標数pの体上での話，ガウス和，L-関数

(5) 分類（既約，単純，2-単純，その他）

にわかれると思われる。

佐藤幹夫先生は概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換の理論を構成し，超関数として関数等式をもつゼータ関数（zeta distribution）を構成した。この内容は，数学の歩み 15-1（佐藤幹夫特集号，1970）に

新谷卓郎先生がまとめている。解析関数としてのゼータ関数の構成は，新谷卓郎先生による（M. Sato–T. Shintani, Ann. of Math. Vol. 100, No. 1, 1974, pp 131–170）。この一般論が適用できないが，興味ある例として，新谷先生は（$GL(2)$, $3\Lambda_1$（=□□□））。即ち二元三次型式の概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数を構成し，その数論への応用も与えている（T. Shintani, J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 132–188）。以上は一変数であるが，これを多変数に拡張することは，佐藤文広氏の一連の論文によって与えられた（例えば F. Sato, Ann. of Math. 116 (1982), 177–212）。

最近では，p進体上での概均質ベクトル空間の研究が，井草準一先生の一連の論文でなされている（例えば J-I. Igusa, Amer. J. of Math. 106 (1984), 1013–1032，他にプレプリントあり）。

またある種の Jordan algebra から作られる概均質ベクトル空間の zeta distribution の研究が，佐武一郎先生及び J. Faraut が独立にやったが，共著の論文としてまとめられた（I. Satake and J. Faraut, Tohoku Math. J. Vol 36, No. 3 (1984), 464–482）。

最近の川中宣明，行者明彦両氏による概均質ベクトル空間のガウス和の結果を使うと，概均質ベクトル空間のL-関数に

関する結果が直ちに得られる(佐藤文広氏談)。 さて,次に b-関数について述べよう。もともと佐藤幹夫先生は概均質ベクトル空間に a-関数, b-関数, c-関数の概念を導入した。 a-関数は b-関数の最高次斉次部分である。b-関数が重要で例えば既約正則概均質ベクトル空間の既約相対不変多項式を $f(x)$ とすると $f(D)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s$ となる s の多項式を b-関数という。 のちに Bernstein が原点の近傍で定義された正則関数 $f(x)$ に対し $P(s,x,D)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s$ となる微分作用素 $P(s,x,D)$ と $b(s)$ の存在を示した。これを Bernstein 多項式とか b-多項式, b-関数ともいう。これに刺激されて佐藤先生等の研究がすゝみ, b-関数とモノドロミーの関係などがわかってきた。柏原正樹氏は"広中の特異点解消"の定理を用いて b-関数の根が有理数であることを示した(Inv. Math.)。 b-関数と特異軌道の関係は佐藤幹夫先生によりかなり前から研究されており,佐藤先生や木村によりその方法で多くの b-関数が研究された。(木村 東大修論 1973)。 しかし,それは因子の決定 $(s+\alpha)|b(s)$ ができるだけで $(s+\alpha)^e \| b(s)$ となる e を決定することはできなかった。 のちに,超局所解析を用いる方法が開発され(M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura, T. Oshima, Inv. Math 62 (1980), 117-179) それを用いて木村 (Nagoya Math. J. Vol 85 (1982), 1-80)

，室，尾関などにより，既約正則概均質ベクトル空間のb-関数は，一つを除いて，すべて決定された。その一つとは，(SL(5)×GL(4)，$\Lambda_2\otimes\Lambda_1$，V(40))である。このb-関数は，尾関育三氏により，

（尾関予想）
$$b(s)=\left\{\prod_{i=1}^{3}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{i}{4}\right)^2\cdot\prod_{j=1}^{4}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{j}{5}\right)\cdot\prod_{k=1}^{5}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{k}{6}\right)^2\right\}^2$$

と予想されている。最近の川中氏の結果は，この予想をsupportしている。V(40)は$\{u_i\wedge u_j\wedge u_k\,;\,1\le i<j\le 5,\ 6\le k\le 9\}$で$\mathbb{C}$上張られる空間と同一視され，SL(5)×GL(4)∋g=(A,B)に対し$(u_1,\cdots,u_5)\mapsto(u_1,\cdots,u_5)A$，$(u_6,\cdots,u_9)\mapsto(u_6,\cdots,u_9)B$によってV(40)への作用が定まる．この軌道分解は尾関（Proc. of Japan Acad. Vol 55 (1979)）が与えたが，b-関数の研究の過程で，1982年頃尾関自身が，一つ軌道をミスしていた事に気付いた．つけ加えるのは，

16，16；156−246−147＋237，N.P.

である．但し$u_i\wedge u_j\wedge u_k$をijkと略記した。のちに川中氏が，独立に軌道分解を与え，全部で63個あることを確認している。尚，矢野環氏は概均質とは限らない色々な場合にもb-関数を研究している。

次にフーリエ変換の超局所解析による計算法について述べよう。これらの計算は一般に難しくSiegelや新谷卓郎先生らが，特別な場合に色々工夫して計算していた。1974年頃，名古屋大学へ集中講義にきた佐藤幹夫先生に

当時大学院生だった鈴木利明氏が，喫茶店で「フーリエ変換の計算は難しい」と言ったのをきっかけに，佐藤先生は「そんな事ないだろう」と言い，考えてあるアイデアを得て，$(GO(n), \Lambda_1)$の場合に例を計算して，その可能性を確かめた。それから佐藤先生は柏原氏にそのアイデアを説明したが，柏原氏はなかなか納得せず，約半年後，柏原氏は納得して，猛烈に研究をスタートした。佐藤先生がにこにこしながら「柏原君が始めてしまえば，もう大丈夫だ，あとはまかせておけば良い」と私に言われたのが印象に残っている。こうして柏原アルゴリズムとも呼ばれる microlocal calculus が確立し，鈴木氏はそれを使って多くの場合の Fourier 変換を計算した（名大修論 1975）。のちに，この microlocal calculus は室政和氏がひきついで，現在でも多くの結果を出している。この microlocal calculus は佐藤先生たちによって創られた"代数解析学"の最初の決定的な応用例といえる。1977年頃，柏原－木村－室による microlocal calculus の lecture note の原稿が書かれたが，完成直前でそのまゝになってしまい，まだ出版されていない。近いうちにもう一度やって何とか完成させようと，この3人は今お互いに言ってるのである……

最近川中宣明氏は阪大で概均質ベクトル空間の講義をしたが，それがひとつのきっかけになって有限体上のChevalley群

の既約指標の研究と概均質ベクトル空間の相対不変式との関係に気付き，概均質ベクトル空間のガウス和を定義し色々予想を与えた。この研究に行者明彦氏が加わり，多くの成果を出している。尚，中国の陳氏もガウス和について概均質ベクトル空間の立場で研究している。

複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$-graduation $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ を考え，G を $\mathfrak{g}$ の adjoint 群，G_0 を $\mathfrak{g}_0$ に対応する連結な部分群とすると，$(G_0, \mathfrak{g}_1)$ は概均質ベクトル空間になるがこれについて Muller, Rubenthaler, Schiffmann 等による最近の研究がある。

次に分類の話に移る。単純群の作用で概均質ベクトル空間になるもの（スカラー倍なしで）は，1960年に Vinberg が分類している (Trudy Moskwa Math. 9 (1960), 191-210)。スカラー倍を許した単純群による既約な正則概均質ベクトル空間の分類は佐藤幹夫先生の研究をついで，新谷卓郎先生が1970年6月8日に $(GL(1)\times Spin(14)$, 半スピン表現) が正則概均質ベクトル空間であることを確かめることにより完成した（日付は佐藤先生の研究ノートの書き込みによる。この結果は M. Sato-T. Shintani, Ann. of Math. Vol 100, (1974) の Remark 4，144頁から145頁，にかかれている。）1970年に佐藤幹夫先生が東大で「既約概均質ベクトル空間の分類」という題で集中講義をされ，スピン群及び例外群の関係した約10個の

空間の概均質性が未決定である事を教えられた。1972年3月に木村は佐藤先生を京大数理研に訪ねて，2週間滞在中にスピン群関係を決定し，同年6月に再び訪ねたときに例外群関係を決定して分類が完成した。佐藤先生は，論文をSato-Shintani-Kimuraで書こう（但し実際は木村一人が書く）と言われたが新谷先生は「佐藤先生のような大先生は良いが，自分の程度で人に書かせておいて共著として名前だけのせるというわけにはいかない」と言い，どうしてもO.K.しなかったので，結局Sato-Kimuraという事になってしまったが，分類理論の基礎を木村に教えて下さったのは新谷先生であり，実質的には3人の共著である。そのかわりに，新谷先生は私の書くのをすみからすみまで目を通して，なかなかO.K.が出ないで「ボツ！」と言われつづけるのには少々閉口したが今思えばありがたい事である。「自分がやったことでも何年かたったらわからなくなってしまうのだから もっと詳しく書け」と何回も言われ，何回もダメと言われるので，プリンストンに滞在中のことであるが，それなら徹底的に詳しくていねいに書こうとすっかり書き直して初めてO.K.がでた。序文の英語は志村五郎先生がていねいにみて，すっかり直して下さり大変恐縮，感激した。こうして分類ができてから5年たってやっと論文が出た（M.Sato-T.Kimura, Nagoya Math. J. Vol 65, 1977, 1～155頁）。今は亡き新谷卓郎先生の御冥福を心から祈ります。

スカラー倍を許した単純代数群による概均質ベクトル空間の分類は木村（T.Kimura, J. of Alg. Vol 83, No.1, 1983, 72-100）

によるが，のちに 2-単純代数群の研究から大塚晶明君が List から1つもれている事を指摘した．

☆ $(GL(1)^3 \times SL(5),\ \Lambda_2 \oplus \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^*,\ V(10) \oplus V(10) \oplus V(5))$ が非正則概均質ベクトル空間であることがわかった。

この論文の修正は type I の 2-単純代数群の分類の論文 (preprint) にのせてあるが，この機会にここでも訂正をしておく。

この論文の80頁の Prop. 2.2 を次のように変更する。
J. of Alg. vol 83 (1983) No.1

Proposition 2.2. For $n=2m$, the triplets (2), (3), (4), (5), (6) are not P.V.'s. For $n=2m+1$, the triplet (5) for $n=5$ and the triplet (2) are P.V.'s., and the triplet (3), (4), (5) with $n \neq 5$, (6) are not P.V.'s.

そして100頁の表に 19番目の単純概均質ベクトル空間として ☆ を加える。

さて 表現の組 (G, ρ, V) があって，V が有限個の G-軌道に分解すれば，概均質ベクトル空間である．既約の場合は，伊原康隆先生に質問されたのがきっかけで1972年に木村がやったが，のちに V.G. Kac も同じ結果を出している (1975, Uspechi Math. Nauk 30, 173-174, 又は J. of Alg. 64 (1980), の207頁) P. Gabriel (Man. Math. 6 (1972), 71-103) の結果を拡張して V.G. Kac は Inv. Math. (1980) 56-92 に於て，群が，

$G = GL(n_1) \times \cdots \times GL(n_k)$ の形で，表現に Λ_1 又は Λ_1^* しかでてこない場合に，軌道が有限個になるものを分類している。

1984年に木村－笠井－保倉（to appear in Amer. J. of Math）は，reductive な群の表現で（各既約成分にスカラー倍が独立にかかるという条件のもとで）軌道が有限個になるものをすべて分類した。

本講演（1985.7.12金）の少し前（7月9日火）に２個の単純代数群 G_1 と G_2 の直積 $G_1 \times G_2$ の表現とスカラー倍の合成で概均質ベクトル空間になるもの（2-simple P.V. と略す）の分類が丁度完成した。type Ⅰ（木村－笠井－大塚－保倉，preprint）と type Ⅱ（木村－笠井－田口－大塚）にわかれるが，難しくて残っていたのは，むしろ群や表現がかんたんな $(GL(1)^{k+s+t} \times SL(m) \times SL(n),$ $(\overbrace{\Lambda_1^{(*)} + \cdots + \Lambda_1^{(*)}}^{s}) \otimes 1 + (\overbrace{\Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_1 \otimes \Lambda_1}^{k}) + 1 \otimes (\overbrace{\Lambda_1^{(*)} + \cdots + \Lambda_1^{(*)}}^{t})$ $(m < n)$ の場合で，4年の間 open problem であった。

この講演の直後に佐藤幹夫先生や神保君などからコメントをいただき，結果の整理に大いに役立った。

色々な変換により，次の場合がわかれば良いということがわかる。

$(*)$ $(GL(1)^{k+s+t} \times SL(m) \times SL(n),$ $(\overbrace{\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_1}^{s}) \otimes 1 + (\overbrace{\Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_1 \otimes \Lambda_1}^{k})$ $+ 1 \otimes (\overbrace{\Lambda_1^* + \cdots + \Lambda_1^*}^{t}))$. $(m < n)$ $(t \geq 1,\ n < km)$

これがいつ概均質になるか？　それを述べてこのノートを終めることにする。これが概均質である為には

少なくとも $(GL(1)^k\times SL(m)\times SL(n),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1+\overset{k}{\cdots}+\Lambda_1\otimes\Lambda_1)$ も概均質で しかも $\dim GL(1)^k\times SL(m)\times SL(n) \gneq \deg(\Lambda_1\otimes\Lambda_1+\cdots+\Lambda_1\otimes\Lambda_1)$ でなければならない。この場合，j という1以上の自然数があって，j 回裏返変換すると trivial P.V. になる（$(H\times GL(n),\ \rho\otimes\Lambda_1)$ は $\deg\rho\leq n$ である限り $\forall H,\forall\rho$ に対し概均質になるので，この type のものを trivial P.V. という）。空間の次元を下げる裏返変換のみを行うなら この j は unique である.

このとき $\left\{\begin{array}{l}(\ast)\text{ が概均質ベクトル空間}\\ \Longleftrightarrow s a_{j+1}+t a_{j+2}\leq a_{j+1}m-a_j n\end{array}\right.$

となる。（詳しくは，田口正信，筑波大・修論 1986，又は preprint 参照）

（ここで 数列 $\{a_i\}_{i\geq -1}$ は，$a_{-1}=-1$，$a_0=0$，$a_i=ka_{i-1}-a_{i-2}$ $(i\geq 1)$ で 定義される.）

一般に $a_i^2-a_{i+1}a_{i-1}=1$ となることを佐藤先生に指摘していただいた。これを示すのに，$\begin{pmatrix} a_i & a_{i+1}\\ a_{i-1} & a_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{i-1} & a_i\\ a_{i-2} & a_{i-1}\end{pmatrix}$

の両辺の行列式をとれば良い，というのは神保道夫氏に教わった。

標数 $p>0$ の場合の既約概均質ベクトル空間の分類は 陈 志杰 という人がやっている.

（特征数 p 的代数闭域上不可约概齐次空间的分类(I)）。