60
数理解析研究所講究録
第 594 巻 1986 年 60-76

第二超局所理論におけるRadon 変換の方法について

富士通　国際研　野呂　正行 (Masayuki Noro)

§0 序

microfunctionの,cotangent bundleの involutory submanifold における特異性を記述する 2-microfunctionは，[7] でpurely cohomological method によって扱われている．ここでは 2-microfunction を境界値表示することにより，基本的演算，およびその2-特異スペクトルの評価が直観的に行えることを示す．それらを用いることにより，既存の定理，あるいはそれに若干の修正を加えた程度のものが素朴な方法によって証明される．しかし，本質的に新しい結果は今のところまだ得られていない．

以下で概略を述べる．

$X=\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q\supset\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q=N$, $S^*_NX=\tilde{\Lambda}=\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\supset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\Lambda$ とする．

$\tilde{\Lambda}$ 上には $\mathcal{CO}=\mathcal{H}^p_{\tilde{\Lambda}}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\omega$ (holomorphic parameter を持つmicrofunctionの層)がある．これに対し，$\mathcal{A}^2=\mathcal{CO}|_\Lambda$, $\mathcal{B}^2=\mathcal{H}^q_\Lambda(\mathcal{CO})\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\omega$, $\mathcal{C}^2=\mathcal{H}^q_S(\pi^{-1}\mathcal{CO})^a\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\omega$ ($S=S^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$;それぞれ 2-real analytic function, 2-hyperfunction,2-microfunction の層)が定義される．

定理

$U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$:open proper convex, $D\subset\mathbb{C}^q$:Stein open $\Rightarrow H^j(U\times D,\ \mathcal{CO})=0\quad(j\geq1)$.

これにより $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{C}^2$ を $\mathcal{CO}$ の $\mathcal{O}$ に関する境界値としてとらえることができる．さらに，いくらか小細工をすることにより,cohomological Radon transformation,曲面Radon分解も可能となり，次がいえる(c.f. [8] , [3]):

命題

$f(p^*,z)\in\mathcal{CO}(U\times(D+\sqrt{-1}\Gamma))$ (U,D:open, Γ:open convex cone), $W(z,\zeta)$:曲面Radon 分解核に対し， $F_f(p^*,z,\zeta)=\int_{E+\sqrt{-1}a}f(p^*,w)W(z-w,\zeta)dw$ (E:compact in D, $a\in\Gamma$: 十分小)とおく．このとき

1) $\int_{S^{q-1}}F_f(p^*,z,\xi)d\sigma(\xi)=f(p^*,z)$.

2) $u=\sum f_i(p^*,x+\sqrt{-1}\Gamma_i0)\in\mathcal{B}^2$ に対し，$(p^*,x,\sqrt{-1}\xi\infty)\notin SS^2u$
$\Leftrightarrow\sum F_{f_i}\in\mathcal{A}^2$ at $(p^*,x,\sqrt{-1}\xi\infty)$.

すなわち,$\mathcal{B}^2$を,$\mathcal{C}$-parameter を持つ$\mathbb{R}^q$ 上のhyperfunctionと見なすことができ,
基本的演算, 及びそのSS^2 の評価が直観的に行える. また, 積分に関しても, 一変数の不定積分により定義することができ, その座標不変性も示すことができる.
以上の道具を用いることにより, 次の定理たちが素朴に証明される.

定理 ([7])
$\mathcal{C}|_\Lambda \to \mathcal{B}^2$ は injective.

この morphism は [7] においてfunctorialに定義され, 証明も functorialになされているが,Radon変換により, より直観的に定義され, 証明される.

定理 (microlocal Holmgren theorem; [7])
$P=(p^*,0)\in\Lambda$, $S=\{(p^*,x);x\in\mathbb{R}^q\}$, $f:S\to\mathbb{R}$ s.t. $df(P)\neq 0$ かつ $f(P)=0$,
$P^*=(P,\pm\sqrt{-1}df(P)\infty)$ の一方, $Z=\{Q\in S;f(Q)\geqq 0\}$ とする. このとき
$\Gamma_Z(\mathcal{B}^2|_S)_P\to\mathcal{C}^2{}_{P^*}$ は injective.

系
$\Gamma_Z(\mathcal{C}|_S)_P\to\mathcal{C}^2{}_{P^*}$ は injective.

定理 (watermelon cut with $\mathcal{C}$-parameter;c.f. [14])
$P=(p^*,0)\in\Lambda$, $Z=\{p\in\Lambda;\ x_1\geqq 0\}$ とする. このとき $u\in\mathcal{B}^2$に対し,
Supp $u\subset Z \Rightarrow \exists F\subset S^{q-2}$:closed s.t. $SS^2u\cap\pi^{-1}(P)=p^{-1}(F)\sqcup(P,\pm\sqrt{-1}dx_1\infty)$
または ϕ.(ただし $p:S^{q-1}\setminus\{0\}\to S^{q-2}$:赤道への射影)

これらも従来の方法(c.f. [3])により直観的に示すことができる.

§1 消滅定理

この節では，いくつかのcohomology消滅定理を証明する．

定義1.1

$X=\mathbb{C}^p_w\times\mathbb{C}^q_z\supset\mathbb{R}^p_u\times\mathbb{R}^q_x=M$,

($w=u+\sqrt{-1}v, z=x+\sqrt{-1}y$;それぞれのdual variable を $\tau=t+\sqrt{-1}s, \zeta=\xi+\sqrt{-1}\eta$ とする.)

$X\supset\mathbb{R}^p_u\times\mathbb{C}^q_z=N$,

$\Lambda=\{(u,x;\sqrt{-1}(tdu+0dx)\infty)\}\simeq\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\subset\sqrt{-1}S^*M$,

$\tilde{\Lambda}=S^*_NX=\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q$ ($\Lambda\subsetneq\tilde{\Lambda}$; $\tilde{\Lambda}$はΛの部分複素化),

π: ${}^N\tilde{X}^*\to X$ とするとき,$L=\mathbb{R}^p\subsetneq\mathbb{C}^q=Y$とおけば, ${}^N\tilde{X}^*\simeq{}^L\tilde{Y}^*\times\mathbb{C}^q$ となる.

このとき $\mathcal{CO}:=\mathcal{H}^p_{\tilde{\Lambda}}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)({}^a\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\omega)$はzを正則パラメタにもつmicrofunction の層となる． この層から以下の三つの層たちが定義される:

$\mathcal{A}^2:=\mathcal{CO}|_\Lambda$

$\mathcal{B}^2:=\mathcal{H}^q_\Lambda(\mathcal{CO})(\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\omega)$

$\mathcal{C}^2:=\mathcal{H}^q_S(\pi^{-1}\mathcal{CO})^a\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\omega$ ($S=S^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$; π はcomonoidal変換)

定理1.2

<u>$U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$:open, propre convex, $D\subset\mathbb{C}^q$:Stein open $\Rightarrow H^j(U\times D,\mathcal{CO})=0$ $(j\geqq1)$.</u>

証明) $\mathcal{CO}=\mathcal{H}^p_{\tilde{\Lambda}}(\pi^{-1}\mathcal{O})=\mathbb{R}\Gamma_{\tilde{\Lambda}}(\pi^{-1}\mathcal{O})$ [p] (純p 余次元性) より

$H^j(U\times D,\mathcal{CO})=H^{j+p}_{U\times D}(\tilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{O})$ ($\tilde{U}=\Omega\sqcup U$; Ω:open $\subset\mathbb{C}^p\setminus\mathbb{R}^p$ で

$\tilde{U}$:open in ${}^N\tilde{Y}^*$). そこで次のlong exact sequence を考える:

($☆_1$) $\cdots\to H^j_{U\times D}(\tilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{O})\to H^j(\tilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{O})\to H^j(\Omega\times D,\mathcal{O})\to\cdots$

まず第三項については，次の補題がある：

補題1.3 (c.f. [10] , [2] etc)

<u>$X=\mathbb{C}^p_z\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r, W\subset\mathbb{C}, D\subset\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r$:open かつ $H^j(D,\mathcal{O}\mathcal{E})=0$ $(j\geqq1)$</u>

<u>($\mathcal{O}\mathcal{E}=\mathrm{Ker}(\partial/\partial\bar{z}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}^p)$:z についてholomorphic なsmooth function の層;</u>

<u>以下，混乱のない限り，説明は省略する),$\dim H^j(W,\mathcal{O})<\infty$</u>

<u>$\Rightarrow H^j(W\times D,\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})\simeq H^j(W,\mathcal{O})\otimes\Gamma(D,\mathcal{O}\mathcal{E})$.</u>

上の補題により,$\dim H^j(\Omega,\mathcal{O})<\infty\Rightarrow H^j(\Omega\times D,\mathcal{O})\simeq H^j(\Omega,\mathcal{O})\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\Gamma(D,\mathcal{O})$

ここでMalgrange の定理により,$j\geqq p$ ならば$H^j(\Omega,\mathcal{O})=0$

$\therefore$($☆_1$)より$j\geqq p+1\Rightarrow H^j_{U\times D}(\tilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{O})\simeq H^j(\tilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{O})$.

よって,$H^j(\widetilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{O})=0$ $(j\geqq p+1)$を言えばよい.

$0\to\mathcal{O}\to\mathcal{L}^\cdot$ を$\mathcal{O}$の脆弱分解とする. このとき$0\to\pi^{-1}\mathcal{O}\to\pi^{-1}\mathcal{L}$はひとつの分解であるが, 実は $H^j(\widetilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{L}^k)=0$ $(j\geqq1,k\geqq0)$.

証明) $\cdots\to H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{L}^k)\to H^j(\widetilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{L}^k)\to H^j(\Omega\times D,\mathcal{L}^k)\to\cdots$

なるlong exact sequence において, $\mathcal{L}^k$ が脆弱より$H^j(\Omega\times D,\mathcal{L}^k)=0$ $(j\geqq1)$.

さらに次の補題がある:

補題1.4 ([12] proposition1.2.4)

$N\supset M$:多様体, $\mathcal{F}$:N上の層,$U\subset S=S^*_MN$:open propre convex, π:comonoidal 変換とするとき $H^j(U,\mathbb{R}\Gamma_S(\pi^{-1}\mathcal{F}))\simeq\mathrm{limind}_Z\ H^j_Z(N,\mathcal{F})$.ただし,Zは

1)Z:locally closed in N, $Z\supset\pi(U)$.

2) [cl(Z-M) in ${}^M\widetilde{N}^*$] $\cap U=\phi$.

を満たす.

この補題により,$j\geqq1$ で $H^j_{U\times D}(\widetilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{L})\simeq\mathrm{limind}_Z\ H^j_Z(N,\mathcal{L}^k)=0$ ($\mathcal{L}$:脆弱) よって $H^j(\widetilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{L}^k)$ も$j\geqq1$ で消える. □

よって

(☆$_2$) $H^j(\widetilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{O})\simeq H^j(\Gamma(\widetilde{U}\times D,\pi^{-1}\mathcal{L}^\cdot))$.

以下で右辺を調べる.

一般に $M=\mathbb{R}^m\simeq\{0\}\times\mathbb{R}^m\hookrightarrow\mathbb{R}^l{}_x\times\mathbb{R}^m{}_t=N$, $\mathcal{F}$:N上の層, $\pi:{}^M\widetilde{N}^*\to N$,

$U\subset S^*_MN=\mathbb{S}^{l-1}\times\mathbb{R}^m$:open propre convex とし, $\mathbb{S}^{l-1}\hookrightarrow\mathbb{R}^l-\{0\}$ とみなす.

このとき$\Omega\subset(\mathbb{R}^l-\{0\})\times\mathbb{R}^m$ を

$\Omega:=\{(x,t);x\neq0,\ \exists(\xi,t)\in U\ \mathrm{s.t.} <x,\xi>\geqq0\}=U^{aoc}$ (o:polar,c: 補集合)

と定義する(Ω:open). すると$\widetilde{U}=\Omega\sqcup U$ はopen in ${}^M\widetilde{N}^*$.Uがopen convex より $\exists K_j$ $(j=1,2,\cdots)$:compact propre convex,$K_j\subset\subset K_{j+1}$ s.t. $\cup K_j=U$. このとき$\Omega_j\subset\Omega$を

$\Omega_j:=\{(x,t);x\neq0,\ \exists(\xi,t)\in K_j\ \mathrm{s.t.} <x,\xi>\geqq0,\ |x|\leqq j\}$

と定義すると, $\widetilde{K}_j=\Omega_j\sqcup K_j$ はintK_j の近傍(in ${}^M\widetilde{N}^*$).$\widetilde{K}_j\subset\mathrm{int}\widetilde{K}_{j+1}$ で$\widetilde{U}=\cup\widetilde{K}_j$.

よって $\Gamma(\widetilde{U},\pi^{-1}\mathcal{F})=\mathrm{limind}_j\Gamma(\widetilde{K}_j,\pi^{-1}\mathcal{F})$. ここで実は$\widetilde{K}_j$ はcompact で $\Gamma(\widetilde{K}_j,\pi^{-1}\mathcal{F})\cong\Gamma(\pi(\widetilde{K}_j),\mathcal{F})$

証明) $\widetilde{K}_j\subset\cup_s\widetilde{V}_s$ ($\widetilde{V}_s$:open in ${}^M\widetilde{N}^*$) とする. { $\widetilde{V}_s$ } を細分することによって

$\widetilde{V}_s\cap S^*_MN\neq\phi$なるs については

$\widetilde{V}_s=\{(x,t);x\neq0,\ |x|<\varepsilon_s,\ |t-t_s|<\varepsilon_s,\ \exists\xi\in\mathbb{S}^{l-1}\ \mathrm{s.t.}\ |\xi-\xi_s|<\varepsilon_s,$

$<x,\xi>\geqq0\}$ という形をしているとしてよい. さて$\widetilde{K}_j\subset\cup_s(\widetilde{V}_s\cap S^*_MN)$で$\widetilde{K}_j$ が

S^*_MN でcompact より, $\exists s(1),\cdots,s(N)$ s.t. $\widetilde{K}_j\subset\cup_i\widetilde{V}_{s(i)}$. $\varepsilon=\min_i\varepsilon_{s(i)}$とおくと,

$\tilde{K}_j \subset \cup_i \tilde{V}_{s(i)} \cup \{ (x,t) \in \Omega_j , |x| \geqq \varepsilon \}$ (Ω_j の定義による).

$\{ (x,t) \in \Omega_j , |x| \geqq \varepsilon \}$ は通常のEuclid空間のcompact 集合より，結局$\tilde{K}_j$ は有限個の $\tilde{V}_j$ で覆われる．ゆえに，$\tilde{K}_j$ はcompact.

よって, p (πの$\tilde{K}_j$への制限): $\tilde{K}_j \to \pi(\tilde{K}_j)$ は閉写像かつfibre は連結．よってこのとき $\mathcal{F} \to p_* p^{-1}\mathcal{F}$ なるcanonical morphismにおいてstalk を調べると,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{pt} \to (p_* p^{-1}\mathcal{F})_{pt} &= \mathrm{limind}_W \Gamma(p^{-1}(W), p^{-1}\mathcal{F}) \quad (pt \in W)\\ &\simeq \mathrm{limind}_V \Gamma(V, p^{-1}\mathcal{F}) \quad (V \supset p^{-1}(pt); p\text{は閉写像})\\ &\to \Gamma(p^{-1}(pt), p^{-1}\mathcal{F}) \quad (\text{injective})\\ &\simeq \mathcal{F}_{pt} \quad (\text{fibre が連結})\end{aligned}$$

$\therefore \mathcal{F} \simeq p_* p^{-1}\mathcal{F}$

$\therefore \Gamma(\pi(\tilde{K}_j), \mathcal{F}) \simeq \Gamma(p^{-1}(\pi(\tilde{K}_j)), p^{-1}\mathcal{F}) = \Gamma(\tilde{K}_j, \pi^{-1}\mathcal{F}).$ □

はじめの状況にもどる．$\tilde{U} \times D = (\Omega \sqcup U) \times D$ において，Ωを上と同様にとり，$\tilde{U}_j = \Omega_j \sqcup K_j$ を，上と同様に$\tilde{U}$を取り尽くすようにとる．さらに, DはStein より，$^\exists D_j$ compact 解析的多面体 ($j=1,2,\cdots$) s.t. $\cdots \subset\subset D_j \subset\subset D_{j+1} \subset\subset \cdots \subset\subset D$, $\cup D_j = D$. すると上に述べたことより

$\Gamma(\tilde{U} \times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) = \mathrm{limproj}_j \Gamma(\pi(\tilde{U}_j) \times D_j, \mathcal{L}^k)$

$\therefore$ ($☆_2$)より

($☆_3$) $H^j(\tilde{U} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \simeq H^k(\mathrm{limproj}_j \Gamma(\pi(\tilde{U}_j) \times D_j, \mathcal{L}^k)$

ここで次の古典的補題がある：

補題1.5(c.f. [4])

$\cdots \to F^\bullet_{j+1} \to F^\bullet_j \to \cdots$ を複体のprojective system とし，各i に対し，$\{ F^i_\bullet \}$ が次の条件

(ML): $^\forall j, \{ \mathrm{Im}(F^i_{j+k} \to F^i_j) \}_k$ がstationary

を満たすとする．このとき

1)canonical morphism $\phi_k: H^k(\mathrm{limproj}_j F^\bullet_j) \to \mathrm{limproj}_j H^k(F^\bullet_j)$は全射.

2)もし$\{ H^k(F^\bullet_j) \}$ が(ML)を満たせばϕ_{k+1}は同型.

$F^i_j = \Gamma(\pi(\tilde{U}_j) \times D_j, \mathcal{L}^i)$ とおくと，$\mathcal{L}^i$ が脆弱より$\{ F^i_\bullet \}$ は(ML)を満たす．このとき$H^k(F^\bullet_j) = H^k(\pi(\tilde{U}_j) \times D_j, \mathcal{L}^k)$ となるが，実は

$H^k(\pi(\tilde{U}_j) \times D_j, \mathcal{L}^k) = 0 \ (k \geqq p).$

証明) $\pi(\tilde{U}_j), D_j$ はcompact より

$H^k(\pi(\tilde{U}_j) \times D_j, \mathcal{L}^k) \simeq \mathrm{limind}_{V,W} H^k(V \times W, \mathcal{O})$ ($V \times W \supset \pi(\tilde{U}_j) \times D_j$)

ここで, D_jがcompact 解析的多面体よりStein 基本近傍系が存在する(これは Stein開集

合をcompact 解析的多面体で取り尽くすのと同様の論法により示される).よって
補題1.3 により主張が成立する. □
よって補題1.5 と合わせて定理1.1.2 の証明が完了した. □

注意1.6

この定理は [7] に述べられてはいるが，その証明が不完全であると思われるので，完全と思われる証明を与えた.

以下では,2-超函数のcohomological Radon transformationに必要となるいくつかの中間的な層たちを定義し，それらに対するcohomology消滅定理を述べる.

以下，$X=\mathbb{C}^p{}_w\times\mathbb{C}^q{}_z\times\mathbb{R}^r\supsetneq\mathbb{R}^p{}_u\times\mathbb{R}^q{}_x\times\mathbb{R}^r=N$, $L=\mathbb{R}^p\subsetneq\mathbb{C}^q=Y$,
${}^N\widetilde{X}^*={}^L\widetilde{Y}^*\times\mathbb{C}^q{}_z\times\mathbb{R}^r$, $S=S^*{}_NX$，π:comonoidal 変換とする.

命題1.7

$\mathcal{H}^k{}_S(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})=0\ (k\neq p)$.

証明はabstract edge of the wedge theorem (c.f. [7]) による.

定義1.8

$\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}:=\mathcal{H}^p{}_S(\pi^{-1}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{E})({}^a\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\omega)$.

定義1.9 ([1] , [8])

$D\subset\mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q$ が regular family of Stein domain とは

1) $\pi:\mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$ とし, $\forall x\in\pi(D)$, $\pi^{-1}(x)$:Stein.

2) $\forall x\in\pi(D)$, $\exists W_x\times U_x\supset\pi^{-1}(U_x)\cap D$ かつ$(\pi^{-1}(x)\cap D,W_x)$がRunge pair.

を満たすことをいう.

定理1.10

$U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$:open,propre convex,$D\subset\mathbb{C}^q\times\mathbb{R}^r$:regular family of Stein domain
$\Rightarrow H^j(U\times D,\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E})=0\ (j\geqq 1)$.

これは，定理1.2 の拡張であって，証明も同様である.

次に,$p:\mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{C}^p\times\mathbb{R}^q$ (そのcomonoidal変換への拡張もp と書く) とする.
このとき,

<u>定理1.11</u> (c.f. [8] Theorem2.1.4)
<u>D:open $\subset\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r$, $\exists W_1\subset\subset\cdots\subset\subset D$ s.t. W_j open in D, $\cup W_j=D$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}^q$,
$p^{-1}(x)\cap W_j, p^{-1}(x)\cap cl(W_j), p^{-1}(x)\cap D$ がcontractible とする. このとき
$U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$:open, convex fibre $\Rightarrow H^j(U\times D, p^{-1}\mathcal{C}\mathcal{E})=0$ $(j\geqq 1)$.</u>

この定理も, [8] Theorem2.1.4により, <u>定理1.2</u> と同様の方法により示される .

§2 <u>2-超函数のcohomological Radon transformation</u>

この節では, §1 の消滅定理を用いて $\mathcal{B}^2,\mathcal{C}^2$ のcohomological Radon transformationについて述べる. ([8] の議論の全くの引き写しである.)

$X=\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^q\supset\mathbb{R}^q\times\mathbb{C}^p=N$, Y:dim $Y=r$ の複素多様体とすれば,$X\times Y$ 上に
$0\to p^{-1}\mathcal{O}_X\hookrightarrow\mathcal{O}_X\mathcal{O}_Y{}^{(0)}\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\mathcal{O}_X\mathcal{O}_Y{}^{(r)}\to 0$ (Y に関するde Rham 分解;p: 射影,
$\mathcal{O}_X\mathcal{O}_Y{}^{(i)}$: $\mathcal{O}_X\mathcal{O}_Y$ 係数のY 上のi 次正則微分形式の層; 以下同様の記法を用いる)
なるexact sequenceができる. すると, $\mathcal{O}$の cosphere bundleに対する純余次元性と
[12] lemma 2.2.3 により

$$0\to p^{-1}\mathcal{C}\mathcal{O}_X\hookrightarrow\mathcal{C}\mathcal{O}_X\mathcal{O}_Y{}^{(0)}\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\mathcal{C}\mathcal{O}_X\mathcal{O}_Y{}^{(r)}\to 0$$

なるexact sequence ができる.

同様にして

$$0\to\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}\hookrightarrow\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0,0)}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0,r)}\to 0$$ (Yに関するDolbeault 分解)

また,Yをsmoothとして

$$0\to p^{-1}\mathcal{C}\mathcal{E}\hookrightarrow\mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{E}^{(0)}\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{E}^{(r)}\to 0$$

$$0\to p^{-1}\mathcal{C}\mathcal{O}\hookrightarrow\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(0)}\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(r)}\to 0$$

等もexact になる. これらのexact sequenceと§1 の消滅定理により次の定理が得られる:

<u>定理2.1</u>
<u>上の状況において,$D\subset\mathbb{C}^q\times Y$ を§1 の定理たちの仮定を満たすopen setとし,
$U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$:open, propre convex とする. このとき</u>
<u>1)Y が複素多様体のとき</u> <u>$H^k(\Gamma(U\times D,\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}^{(\cdot)}))\simeq H^k(U\times p(D),\mathcal{C}\mathcal{O})$.</u>
<u>2)Y がsmoothのとき</u> <u>$H^k(\Gamma(U\times D,\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(\cdot)}))\simeq H^k(U\times p(D),\mathcal{C}\mathcal{O})$.</u>

これらは，上のexact sequences によって構成された二重複体に対して，Weil の補題と§1 の定理たちを適用することにより得られる．この定理と$\mathcal{B}^2$, $\mathcal{C}^2$ の定義により，次の定理たちが得られる．(証明は［8］におけるのと同様である．)

定理2.2 (Radon transformation with smooth parameter;c.f. ［8］)

$$\begin{array}{c} p:\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{S}^{q-1}\to\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q=\tilde{\Lambda} \\ \tau\downarrow \\ p:\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{S}^{q-1}\to\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\Lambda \end{array}$$

$g:[0,\infty)\to[0,\infty)$:C^2級, $g(0)=Dg(0)=0$, $Dg(x)$, $D^2g(x)\geqq 0$ に対し

$D(g,e)=\{(p^*,z,\xi)\in\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times\mathbb{S}^{q-1};\ |y|<e\ ,y\xi-g(\mathrm{sqrt}(y^2-(y\xi)^2))>0\}$

$\mathcal{CS}^k_{g,e}:=(\tau|_{D(g,e)})_*\mathcal{COE}^{(k)}$

$\mathcal{CS}^k_g:=\mathrm{liminde}_e\mathcal{CS}^k_{g,e}$

と定義する．このとき次はexact:

$0\to\pi^{-1}\mathcal{A}^2\to\mathcal{CS}^0_g\to\cdots\to\mathcal{CS}^{q-1}_g\to\mathcal{C}^2\to 0$ on $S^*_\Lambda\tilde{\Lambda}=\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$.

$0\to\mathcal{A}^2\to p_*\mathcal{CS}^0_g\to\cdots\to p_*\mathcal{CS}^{q-1}_g\to\mathcal{B}^2\to 0$ on Λ.

定理2.3 (Radon transformation with real analytic parameter;c.f. ［8］)

$N(e)=\{\zeta=\xi+\sqrt{-1}\eta\in\mathbb{C}^q;\ \zeta^2=-1,\ |\mathrm{Re}\zeta|<e\}$

$$\begin{array}{ccc} (p^*,z,\zeta) & & p:\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times N(e)\to\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q=\tilde{\Lambda} \\ \downarrow & & \tau\downarrow \\ (p^*,x,\sqrt{-1}\eta/|\eta|) & & p:\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\times N_e\to\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\Lambda \end{array}$$

$D(e)=\{(p^*,z,\zeta)\in\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{C}^q\times N(e);\ |y|<e\ ,\mathrm{Re}\ z\zeta+1/e|\xi|<0\}$

$\mathcal{CT}^k_e:=(\tau|_{D(e)})_*\mathcal{COO}^{(k)}$

$\mathcal{CT}^k:=\mathrm{liminde}_e\mathcal{CT}^k(e)\subset\mathcal{CS}^j(0)$

と定義する．このとき次はexact:

$0\to\pi^{-1}\mathcal{A}^2\to\mathcal{CT}^0\to\cdots\to\mathcal{CT}^{q-1}\to\mathcal{C}^2\to 0$ on $S^*_\Lambda\tilde{\Lambda}=\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q$.

$0\to\mathcal{A}^2\to p_*\mathcal{CT}^0\to\cdots\to p_*\mathcal{CT}^{q-1}\to\mathcal{B}^2\to 0$ on Λ.

以下，$\mathcal{CS}^{q-1}\to\mathcal{C}^2$, $p_*\mathcal{CS}^{q-1}\to\mathcal{B}^2$ をσと書くことにする．定理2.2 ，2.3 は，$\mathcal{B}^2$, $\mathcal{C}^2$ の元u が，$u=\sigma(f(p^*,z,\xi)d\sigma(\xi))$ $(f(p^*,x,\xi)\in\mathcal{COE}$(または$\mathcal{COO}$), $d\sigma(\xi):\mathbb{S}^{q-1}$ 上の標準的体積要素) と書けることを意味している．

さて，σ はWeilの補題により定義されていた．また，定理1.2 により通常の超函数の場合と同様に，$\mathcal{B}^2$, $\mathcal{C}^2$ の元はČech cohomologyによって表現できる．このことと上の定理を合わせてσの具体的な表現が得られる．そのためにまず境界値写像について述べておく．

定義2.4（境界値写像;c.f. [12]，[8]）

$\tau:(\tilde{X}-\Lambda)\sqcup S\to\tilde{X}\,(S=S_\Lambda\Lambda)$ をreal monoidal 変換, $j:R=\tilde{X}-\Lambda\hookrightarrow(\tilde{X}-\Lambda)\sqcup S\to\tilde{X}$ とするとき，$\mathcal{A}^2:=j_*(\mathcal{CO}\mid_R)\mid_S$ と定義する((open set×無限小楔) で定義された正則パラメータつきmicrofunction の層). このとき通常の超函数の場合と同様に，$b:\mathcal{A}^2\to\tau^{-1}\mathcal{B}^2$ なるcanonical なmorphismが定義され，それはinjective となる(定理1.2 による). $f(p^*,z)\in\mathcal{CO}\,(U\times(D+\sqrt{-1}\Gamma 0))\,(U,D:\text{open},D+\sqrt{-1}\Gamma 0:$無限小楔) に対し，そのb によるimage in $\mathcal{B}^2$ を $f(p^*,x+\sqrt{-1}\Gamma 0)$と書くことにする.

命題2.5

$e(i,j)\in\mathbb{S}^{q-1}(i=1,\cdots,q;j=\pm1)$を $e(i,j)=(0,\cdots,0,j,0,\cdots,0)$（第i 成分のみj）で定義する. これに対し, $K(j_1,\cdots,j_q):=\{(\xi_1,\cdots,\xi_q)\in\mathbb{S}^{q-1};\langle\xi_i,e(i,j_i)\rangle\geqq0\}$ と定義すると, $K(j_1,\cdots,j_q)$ のpolar を$\Gamma(j_1,\cdots,j_q)$ とおけば，$\Gamma(j_1,\cdots,j_q)=\{(y_1,\cdots,y_q)\in\mathbb{R}^q;\langle y_i,e(i,j_i)\rangle>0\}$ となる. このとき $\omega=f(p^*,z,\xi)d\sigma(\xi)\in p_*\mathcal{CS}^{q-1}{}_g$に対し

$\sigma(\omega)=\Sigma_J\int_{K(J)}f(p^*,x+\sqrt{-1}\Gamma_J 0,\xi)d\sigma(\xi)\quad(J=(j_1,\cdots,j_q))$.

積分は$\mathcal{COE}$の，$\mathcal{OOE}$の元による表示により定義できる. 命題2.5 は上で述べた通りWeilの補題における図式を追跡することにより得られる. さらにK(J)の細分を考えれば，$\mathbb{S}^{q-1}$ の任意のcompact convex setによる分割をK(J)のかわりに取れることがわかる. 大雑把にいえば，$\mathcal{B}^2,\mathcal{C}^2$ の元は$\mathcal{CS}^{q-1}{}_g$の積分によって得られる.

§3 $\mathcal{COO}$の$\mathcal{O}$変数に関する曲面Radon 分解

§2 において，$\mathcal{B}^2,\mathcal{C}^2$ の元を$\mathcal{CS}^{q-1}{}_g$の積分によって表した. この節においては，その逆変換を曲面Radon 分解により与える. それにより通常の超函数と同様に，$\mathcal{O}$変数に関する特異性の分解（楔の刃定理, micro-analyticityの判定etc）などがいえ，結局$\mathcal{B}^2$，$\mathcal{C}^2$ を“$\mathcal{C}$-parameterを持つ$\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$”として扱ってよいことがわかる.

$\mathbb{C}$上の曲面Radon 分解核

$$W(z,\zeta):=\frac{(q-1)!(1-\sqrt{-1}z\zeta)^{q-2}\{1-(1-\sqrt{-1}z\zeta)(z^2-(z\zeta)^2)\}}{(-2\pi\sqrt{-1})^q\{z\zeta+\sqrt{-1}(z^2-(z\zeta)^2)\}}$$

$((z,\zeta)\in\mathbb{C}^q\times N(e);N(e)=\{\zeta=\xi+\sqrt{-1}\eta\in\mathbb{C}^q;\ \zeta^2=1,|\eta|<e\})$

に対し，その正則域について次がいえる:

1)$F\subset\subset E:\mathbb{R}^q$ の相対compact とすれば，$\exists e>0$ s.t. $\forall w\in\partial E+\sqrt{-1}B(e)$ (B(e):e-ball)

$W(z-w,\zeta)$ は$(F+\sqrt{-1}B(e))\times N(e)$でholomorphic.

2)$G\subset\mathbb{C}^q$ が有界⇒ $\exists K>0$ s.t. $W(z,\zeta)$ は

$\{(z,\zeta)\in G\times N(e);g(y,\xi):=y\xi-(y^2-(y\xi)^2)>K|\eta|\}$

でholomorphic.

命題3.1 ([8], [3])

$U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$:open, $E_1\subset\subset E\subset\subset D$ を$\mathbb{R}^q$ の相対compact とし, Γ:open convex cone $\subset\mathbb{R}^q$ に対し, $f(p^*,z)\subset\mathcal{O}\mathcal{O}(U\times(D+\sqrt{-1}\Gamma\cap B(e_1)))$ $(e_1>e;e$は上で述べたもの$)$ とする. このとき $a\in\Gamma\cap B(e)$ とすれば

$F_f(p^*,z,\zeta):=\int_{E+\sqrt{-1}a}f(p^*,w)W(z-w,\zeta)dw\in\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}(\tilde{N})$

ただし$\tilde{N}$は,$N=U\times\cup E_w$ $(E_w=\{(z,\zeta)\in E_1+\sqrt{-1}B(e);g(y-w,\xi)>0\}, w\in B(e)\cap\Gamma)$ のある近傍. そして Δ° :propre convex$\subset\mathbb{S}^{q-1}$ とするとき

$F_f(p^*,z,\zeta)\in\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}(U\times(E_1+\sqrt{-1}(\Gamma+\Delta)0\times\Delta^\circ)$.

とくに$F_f(p^*,z,\zeta)\in\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}(U\times(E_1+\sqrt{-1}\Gamma\cap B(e))\times\mathbb{S}^{q-1})$ で $U\times(E_1+\sqrt{-1}\Gamma\cap B(e))$上 $\int_{S^{q-1}}F_f(p^*,z,\xi)d\sigma(\xi)=f(p^*,z)$.

証明は基本的には [3] にあるのと全く同様であるが, $f(p^*,z)$ がglobalな代表元による表示を持たないので積分をlocal にしなければならない点に注意を要する.

系3.2

$b:\mathcal{A}^2\to\tau^{-1}(p_*\mathcal{O}S^{q-1}/d(p_*\mathcal{O}S^{q-1}))\simeq\tau^{-1}\mathcal{B}^2$ は上の積分 $f(p^*,z)\mapsto[(\int_{E+\sqrt{-1}a}f(p^*,w)W(z-w,\zeta)dw)d\sigma(\xi)]$ で与えられる.

証明は, Čech cohomologyとRadon transformationの対応および境界値作用素bの表現を組み合わせれば得られる.

定義3.3 (2-特異スペクトル)

$sp^2:\mathcal{B}^2\to\pi_*\mathcal{C}^2$ なるcanonical morphismが定義されている. この写像に対し, $Supp(sp^2(f))$ $(f\in\mathcal{B}^2)$を$SS^2(f)$と書く.

注意3.4

sp^2 は Radon transformation においても自然な写像となっている.

命題3.5 (c.f. [3])

$u=\Sigma f_i(p^*,x+\sqrt{-1}\Gamma_i 0)\in\mathcal{B}^2(U\times V)$ に対し，

$(q^*,w,\sqrt{-1}\eta\,dx\infty)\notin SS^2u\Leftrightarrow F(z,\zeta)=\Sigma F_{f_i}\in\mathcal{A}^2$ at (q^*,w,η).

(各積分 F_{f_i} における水準 $a_i\in\Gamma_i$，積分領域 $E\subset\subset D$ は十分小にとってあるとする.)

証明) $\Leftarrow$) $u(p^*,x)=\sigma(F(z,\xi)d\sigma(\xi))$ で $\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(\cdot)}$ に対するde Rham の定理より,

$^\exists\omega\in\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-2)}$ s.t. $F(z,\xi)d\sigma(\xi)=d\omega$ at (q^*,w,η). よって

$sp^2(u)=\sigma(d\omega)=0$ at (q^*,w,η). $\square$

$\Rightarrow$) 命題3.1 より $f_i(p^*,z)=\int_{\mathbb{S}^{q-1}}F_{f_i}(p^*,z,\xi)d\sigma(\xi)$ on $U\times(G+\sqrt{-1}\Gamma_i 0)$ $(G\subset\subset E)$

$\therefore F(z,\zeta)\equiv\Sigma_i\int_{H+\sqrt{-1}b_i}dw(\int F_{f_i}d\sigma)W(z-w,\zeta)$ (modulo $\mathcal{A}^2$) $(H\subset\subset G)$

(b_i, H: 十分小;剰余が $I\subset\subset H$ で $\mathcal{A}^2$ にはいることは明らか.)

今, $(q^*,w,\sqrt{-1}\eta\,dx\infty)\notin SS^2u$ より $^\exists\omega\in\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-2)}$ $(^\exists U_1\times{}^\exists\mathfrak{D})$

$(\mathfrak{D}=\{(z,\xi);|z-w|<{}^\exists e,|\xi-\eta|<e,y\xi-\mathrm{sqrt}(y^2-(y\xi)^2)>0\}$

s.t. $F(z,\xi)d\sigma(\xi)=d\omega$ at (q^*,w,η). $J\subset\subset I$ を十分小にとって

$J\subset\subset\{x;|x-w|<e\}$ ととる. $\Delta_0^\circ\subset\subset\{\xi;|\xi-\eta|<e\}$ なる Δ_0° : polygon

をとり, $\mathbb{S}^{q-1}\setminus\Delta_0^\circ=\sqcup_{j=1}^N\Delta_j^\circ$ とpolygon に分解する. これに対応して水準 c_i を

十分小にとって

$F(z,\zeta)\equiv\Sigma_{i,j>0}\int_{J+\sqrt{-1}c_i}dw(\int_{\Delta_j^\circ}F_{f_i}d\sigma)W+\Sigma_i\int_{J+\sqrt{-1}c_i}dw(\int_{\Delta_0^\circ}F_{f_i}d\sigma)W$ (modulo $\mathcal{A}^2$)

$\int_{\Delta_j^\circ}F_{f_i}d\sigma\in\mathcal{CO}(U\times(G+\sqrt{-1}(\Gamma_i+\Delta_j)0)$ より c_i を $d_j\in\Delta_j$ にmodulo $\mathcal{A}^2$ で

変更できる. よって,

$F\equiv\Sigma_j\int_{J+\sqrt{-1}d_j}dw(\int_{\Delta_j^\circ}Fd\sigma)W+\int_{J+\sqrt{-1}d_0}dw(\int_{\Delta_0^\circ}Fd\sigma)W$ (modulo $\mathcal{A}^2$)

$j\geqq 1$ のとき $\int_{\Delta_j^\circ}Fd\sigma\in\mathcal{CO}(U\times(G+\sqrt{-1}(G+\Delta_j)0)$ で $\eta\notin\Delta_j^\circ$ より

$\int_{J+\sqrt{-1}d_j}dw\,W\int_{\Delta_j^\circ}Fd\sigma\in\mathcal{A}^2$ また $\int_{\Delta_0^\circ}Fd\sigma=\int_{\Delta_0^\circ}d\omega=\int_{\partial\Delta_0^\circ}\omega=\Sigma\int_{B_l}\omega$ $(\cup B_l=\partial\Delta_0^\circ)$ で

$\eta\notin B_l$ より $\int_{J+\sqrt{-1}d_0}dw(\int_{B_l}\omega)W\in\mathcal{A}^2$. $\therefore F\in\mathcal{A}^2$. $\square$

これにより [3] にある基本的な命題(に相当するもの) が証明できる. それらのうち,2 つを掲げる. (証明は省略)

命題3.5 (SS^2 の分解)

$f(p^*,x)\in\mathcal{B}^2(U\times V)$; $U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$:open, propre convex , V:open in $\mathbb{R}^p$, $U_0\subset\subset U$,

$V_0\subset\subset V$, $SS^2(f)\subset U\times V+\sqrt{-1}\mathrm{int}(\cup\Gamma^\circ_j)dx\infty$ とすると

$^\exists F_j\in\mathcal{CO}(U_0\times(V_0+\sqrt{-1}\Gamma_j)0)$ s.t. $f=\Sigma F_j(p^*,x+\sqrt{-1}\Gamma_j 0)$.

命題3.6 (Martineau型の局所楔の刃の定理)

$f=\Sigma F_j(p^*,x+\sqrt{-1}\Gamma_j 0)\in\mathcal{B}^2(U\times V)$, $f=0$ on $U\times V$ とする．このとき $U_0\subset\subset U, V_0\subset\subset V$, $\Delta_{ij}\subset\subset\Gamma_i+\Gamma_j$ とすれば，$\exists H_{ij}\in\mathcal{O}(U_0\times(V_0+\sqrt{-1}\Delta_{ij})0)$ s.t. $H_{ij}=-H_{ji}$, $F_j=\Sigma_j H_{ij}$.

§4 基本的演算

§3 の定理により通常の超函数の場合と同様に$\mathcal{O}$変数に関する制限，代入，2-超函数と($\mathcal{O}$変数に関する)超函数の積，また，積分が代表元を用いた直観的な方法により定義でき，そのSS^2 の評価も得られる．(これらは [7] でfunctorialに定義されているが，これらが同一のものを定義するということは明らかなことではなく，証明を要することであるが，ここでは行わない.)

1° 積

定理4.1

$$\begin{array}{cccc}p: S^*_\Lambda\tilde{\Lambda}= & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q & \to & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q\\ & \downarrow & & \downarrow\\ p:\ \Lambda= & \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q & \to & \mathbb{R}^q\end{array}$$

$u(p^*,x)\in\mathcal{B}^2(U\times V)$ ，$v(x)\in\mathcal{B}(V)$ とし$SS^2u\cap p^{-1}((SSv)^a)=\phi$

$\Rightarrow$積 $u(p^*,x)v(x)\in\mathcal{B}^2(U\times V)$ が定義され，

1) $\mathrm{Supp}\ uv\subset\mathrm{Supp}\ u\cap p^{-1}(\mathrm{Supp}\ v)$.

2) $SS^2uv\subset\{(p^*,x,(\lambda\xi+(1-\lambda)\eta)dx\infty);(p^*,x,\xi dx\infty)\in SS^2u,$
$(x,\eta dx\infty)\in SSv, 0\leq\lambda\leq 1\}\cup SS^2u\cup p^{-1}(SSv)$.

2° 制限，代入

$f:N\to M$ 実解析的多様体の間の実解析的写像とする．

$$\sqrt{-1}S^*N \xleftarrow[\rho]{} \{N\times_M\sqrt{-1}S^*M\setminus\sqrt{-1}S^*_NM\}\xrightarrow[\pi]{}\sqrt{-1}S^*M$$

を標準的写像とする．$Y=\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times N, X=\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times M$ とする．

定理4.2

1) f:embeddingのとき（制限）

$u\in\mathcal{B}^2{}_X$ が $SS^2u\cap\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\sqrt{-1}S^*M=\phi$ を満たすとき $u|_Y\in\mathcal{B}^2{}_Y$ が定義され，

$SS^2(u|_Y)\subset\rho\,\pi^{-1}(\,SS^2(u))$.

2) f:smooth　のとき（代入）

$f^*:f^{-1}\mathcal{B}^2{}_X\to\mathcal{B}^2{}_Y$ なる代入が定義され，$SS^2(f^*)=\rho\,\pi^{-1}(\,SS^2(u))$.

3° 積分

積分は反復積分により定義する．そのため次の補題を準備する．(c.f. [6])

補題4.3

1) $U\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p$:open, propre convex , V:open in $\mathbb{R}^p{}_{t,x}$

$\Rightarrow D_t\mathcal{B}^2(U\times V)=\mathcal{B}^2(U\times V)$

2) $V_1\times V_2\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{q-1}$, $V_1=(a,b)$, V_2:open, $u\in\mathcal{B}^2(U\times V_1\times V_2)$ で $D_tu=0$

$\Rightarrow\ \exists^! v\in\mathcal{B}^2(U\times V_2)$　s.t. $u(p^*,t,x)=v(p^*,x)$.

これは，定理1.2 により示される．

定義4.4

$u(p^*,t,x)\in\Gamma_S(U\times\mathbb{R}\times V,\mathcal{B}^2)$　($S=U\times K\times V$; $K=[a,b\,]\subset\mathbb{R}$) とする．$p^*$ について局所化して考えれば $\exists v\in\Gamma(U\times\mathbb{R}\times V,\mathcal{B}^2)$　s.t. $u(p^*,t,x)=D_tv(p^*,t,x)$.

$U\times(-\infty,a]\times V$ で $D_tv=0$ より $v=\exists v_1(p^*,x)$.

同様に $U\times[b,\infty)\times V$ で $D_tv=0$ より $v=\exists v_2(p^*,x)$.　そこで

$\int u\,dt:=v_2-v_1$　と定義する．これは上の補題よりwell-defined. 多変数の場合には，反復積分により定義する．

注意4.5

上の定義は座標に極度に依存しているように見えるが，実は座標不変である．このことは residue map による座標不変な定義と上の定義が一致することを示せばよい．これは，[5] にあるように，residue mapを Čech cohomologyによって表現することにより示される．

命題4.6

$u(p^*,t,x)\in\Gamma_S(U\times\mathbb{R}^r\times V,\mathcal{B}^2)$　($S=U\times K\times V$; $K\subset\mathbb{R}^n$:compact) とすれば

$SS^2\int u\,dt\subset p(SS^2u\cap(\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^r\times\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q)$.

この命題も [6] にあるのと同様に示される.
以上により, $\mathcal{O}$変数のみを扱う限りにおいては, $\mathcal{C}$変数をあたかもパラメータのように扱ってもよいということがわかった.

§5 応用

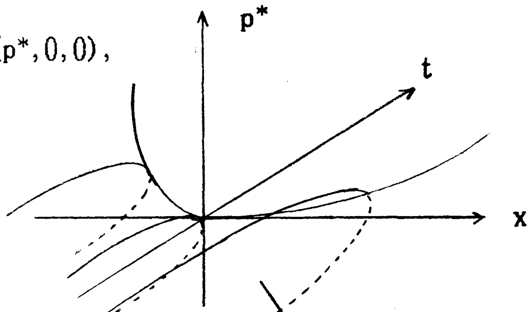
考えられる応用としては, 既存の定理に$\mathcal{C}$パラメータを付けた形のものが(ある場合には) 容易に得られる, ということがまず考えられが, 得られた定理自体既存のものである場合もある. しかし, 超函数に対して局所的な性質を調べるために用いられた方法をそのまま用いることにより超局所的な性質に関する命題が得られるということは興味深い.

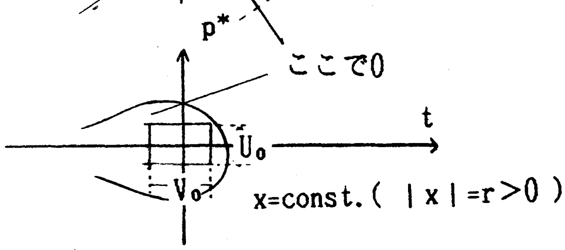
定理5.1 (microlocal Holmgren theorem; [7])
$P=(p^*,0)\in\Lambda, S=\{(p^*,x);x\in\mathbb{R}^q\}$ $f:S\to\mathbb{R}$ s.t. $df(P)\neq 0$ かつ $f(P)=0$,
$P^*=(P,\pm\sqrt{-1}df(P)\infty)$ の一方, $Z=\{Q\in S;f(Q)\geqq 0\}$ とする. このとき
$\Gamma_Z(\mathcal{B}^2|_S)_P\to\mathcal{C}^2{}_{P^*}$ は injective.

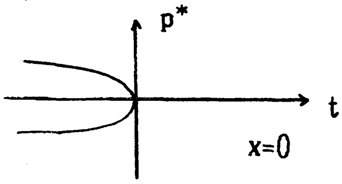
証明) 座標変換により $\mathbb{R}^q=\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x{}^{q-1}, f(t,x)=t-x^2, P=(p^*,0,0)$,
$P^*=(p^*,0,0,\sqrt{-1}dt\infty)$ としてよい. (Holmgren 変換)
$u\in\Gamma_Z(\mathcal{B}^2|_S)_P, sp^2(u)_{P^*}=0$ とする.
$u\in\mathcal{B}^2(U\times V\times W)$ $(P\in U\times V\times W)$で
$(S-Z)\cap(U\times V\times W)$上で $u=0$ としてよい. ここで $r>0$ を
$\{x;|x|<r\}\subset W$ と選ぶと $p^*\in U_0\subset U, 0\in V_0\subset V$ s.t.
$U_0\times V_0\times\{x;|x|<r\}$ 上で$u=0$. よって初めから
$u\in\mathcal{B}^2(U_0\times V_0\times\mathbb{R}_x{}^{q-1})$かつSupp uはx についてcompact で
$\{(p^*,t,x);t=0,x\neq 0\}\cup\{(p^*,t,x);t<0\}$
で0 としてよい. さらに $sp^2(u)_{P^*}=0$より $sp^2(u)$ は
$\{(q^*,t,x,\sqrt{-1}(dt+\xi dx)\infty);q^*\in\exists U_1, |t|<\exists e, |\xi|<\exists e$
で0 としてよい. $(U_1\subset U_0)$.
さて, $\delta(x)=\Sigma W_J(x+\sqrt{-1}\Gamma_J 0)$

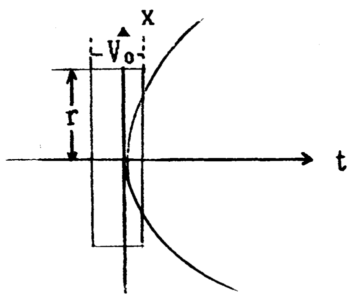
$$(W_J(z)=\frac{\mathrm{sgn}\ \sigma}{(-2\pi\sqrt{-1})^{q-1}\ z_1\cdot\cdots\cdot z_q},\ \Gamma_J: \text{第J 象限})$$

と書けていて, SS $W_J(x+\sqrt{-1}\Gamma_J 0)=\{(x,\sqrt{-1}\xi dx\infty)\in\Gamma_J{}^\circ\}$.
$u_J(q^*,t,x):=\int u(q^*,t,y)W_J(x-y+\sqrt{-1}\Gamma_J 0)dy$ とおく. これは









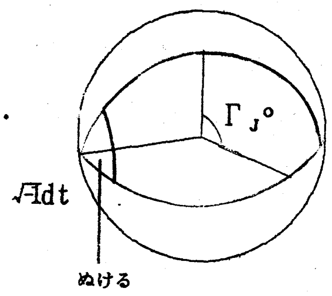
$U_0 \times V_0 \times \mathbb{R}_x^{q-1}$ でwell-defined. すると積，積分のSS^2 の評価より

$SS^2 u \subset \{ (q^*, t, x, \sqrt{-1}(adt + \xi dx)\infty);$

$\quad \exists y \text{ s.t. } (q^*, t, y, \sqrt{-1}(adt + \xi dx)\infty) \in SS^2 u, \xi \in \Gamma_J{}^\circ \}$ ($\xi = 0$も許す).

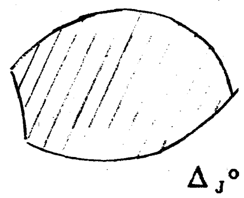
ここで，上で述べたことより $A = U_1 \times \{ t; |t| < e \} \times \mathbb{R}^{q-1}$ 上では

$\sqrt{-1}(adt + \xi dx)\infty$が抜ける.



$\therefore SS^2(u_J|_A) \subset \{ (q^*, t, x, \sqrt{-1}(adt + \xi dx)\infty); (a, \xi) \in \exists \Delta_J{}^\circ \}$

$\quad (\Delta_J$:propre convex in $\mathbb{R}^{q-1})$ よって



$\exists G_J(q^*, \tau, z) \in \mathcal{CO}((U_1 \times [\{ t; |t| < e \} \times \mathbb{R}^{q-1} + \sqrt{-1}\Delta_J])0)$ s.t.

$u_J|_A = G_J(q^*, (t, x) + \sqrt{-1}\Delta_J 0)$. ここで， $\forall t < 0, (p^*, t) \in \exists U_t \times \exists V_t$

s.t. $u = 0$ on $U_t \times V_t \times \mathbb{R}^{q-1}$.よって$u_J = 0$ on $U_t \times V_t \times \mathbb{R}^{q-1}$. $|t|$十分小

$\Rightarrow U_t \subset \{ t; |t| < e \}$ ととれるから$G_J(q^*, (t, x) + \sqrt{-1}\Delta_J 0) = 0$ on $U_t \times V_t \times \mathbb{R}^{q-1}$.

境界値写像の単射性より$G_J(q^*, \tau, z) = 0$ ($U_t \times V_t \times \mathbb{R}^{q-1}$ のfibre 上).よって

$\mathcal{CO}$ に対する解析接続の一意性より $G_J(q^*, \tau, z) = 0$ ($U_t \times \{ t; |t| < e \} \times \mathbb{R}^{q-1}$ のfibre 上). $\therefore 0 = \Sigma u_J = u \underset{x}{*} \delta = u$ on $U_t \times \{ t; |t| < e \} \times \mathbb{R}^{q-1}$. □

<u>系5.2</u>

<u>$\Gamma_Z(\mathscr{C}|_S)_p \to \mathscr{C}^2{}_{p^*}$ は injective.</u>

<u>注意5.3</u>

この定理は [7] に述べられている定理のspecial caseである. [7] においては，量子化接触変換などによりこの定理と同じ状況に帰着させ，そのあとpurely cohomological method によりやや弱い形を証明し，あとはgeometrical な方法で証明がなされているが，ここでは別証明として昔ながらの直観的な証明(c.f.Kaneko [00] etc)を試みてみた.

<u>定理5.4</u> (watermelon cut with $\mathscr{C}$-parameter;c.f. [14])

<u>$P = (p^*, 0) \in \Lambda, Z = \{ p \in \Lambda;\ x_1 \geqq 0 \}$ とする. このとき $u \in \mathscr{B}^2$に対し，</u>

<u>Supp $u \subset Z \Rightarrow \exists F \subset S^{q-2}$:closed s.t. $SS^2 u \cap \pi^{-1}(P) = p^{-1}(F) \sqcup (P, \pm\sqrt{-1}dx_1\infty)$</u>

<u>または ϕ.(ただし $p: S^{q-1} \setminus \{0\} \to S^{q-2}$:赤道への射影)</u>

この定理も従来の方法で直観的に示すことができる.

つぎに，$\mathscr{C}_M|_\Lambda \to \mathscr{B}^2$ を定義し，その単射性を示す. (これも [7] に一般的な形で証明されているが，ここではRadon 変換による証明を与える.)

定義5.5

$\mathcal{C}_M \simeq \mathcal{S}^{p+q-1}{}_0/d\mathcal{S}^{p+q-2}{}_0$ ($\mathcal{S}^k{}_0=\{ f(w,z;\eta,\xi)\in\mathcal{O}\mathcal{E}^{(k)}$ defined on $|w-u|<e, |z-x|<e, v\eta+y\xi>0 \}$;Radon transformation with smooth parameter, [8]) 一方，定理2.2 より

$\mathcal{B}^2\simeq p_*\mathcal{C}\mathcal{S}^{q-1}{}_0/d\, p_*\mathcal{C}\mathcal{S}^{q-2}{}_0$ 　さらに$\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$ の Radon変換により，

$\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}\simeq\mathcal{S}^{p-1}{}_0\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}/d\mathcal{S}^{p-2}{}_0\mathcal{O}\mathcal{E}^{(q-1)}$

右辺→左辺を上から$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ と書く.

$u=\sigma_1[f(w,z;\eta,\xi)d\sigma(\eta,\xi)]$ (f:defined on $|w-u|<e, |z-x|<e, v\eta+y\xi>0$)

に対し,$g(w,\eta,z,\xi):=\int_K f(w,z;\eta\cos\theta,\xi\sin\theta)\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta d\theta$

($K=[0,\delta);\delta>0$) とおくと，g は

$\{(w,\eta);|u|<e, |v|<e, \eta^2=1, |\eta-\eta_0|<e, u\eta>0\}$

$\times\{(z,\xi);|u|<e, |v|<e, \xi^2=1, |\xi-\xi_0|<e, v\xi>0\}$ で定義されているので，$\sigma_2[\sigma_3[gd\sigma(\eta)]d\sigma(\xi)]$ は$\mathcal{B}^2$ の元を定める．これにより$\mathcal{C}_M|_\Lambda\to\mathcal{B}^2$ を定義する．これはwell-defined(証明は省略).

定理5.6

σ: $\mathcal{C}_M|_\Lambda\to\mathcal{B}^2$ は単射.

証明)$P^*{}_0=(p^*{}_0,0);p^*{}_0=(0,\sqrt{-1}\eta_0\infty)$, $\eta_0=(1,0,\cdots,0)$ において証明すればよい.

$u=\sigma_1[f(w,z;\eta,\xi)d\sigma(\eta,\xi)]$, $\sigma(u)=0$ とする.

$\sigma(u)(p^*,x)=\Sigma[\int_{K(J)}h(u;x+\sqrt{-1}\Gamma_J 0,\xi)d\sigma(\xi)]$

($h(u;z,\xi):=\int_L g(w,\eta;z,\xi)d\sigma(\eta)$;$L=\{\eta;\ \eta^2=1, |\eta-\eta_0|<e\}$)

また$u=F((u,x)+\sqrt{-1}\Gamma 0)$ ($F(w,z)=\int_B f(w,z;\eta,\xi)d\sigma(\eta,\xi)$;B:$p^*{}_0$の近傍，Γは，$(0,0)+\sqrt{-1}(1,0,\cdots,0;0)$ の錐状近傍) であって，$sp^2(u)=0$より

$\Sigma_J[\int_{D+\sqrt{-1}a(J)}W(z-t,\zeta)dt\int_{K(J)}h(u;x+\sqrt{-1}\Gamma_J 0,\xi)d\sigma(\xi)]\in\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}$

on $p^*{}_0\times\{0\}\times S^{q-1}$.ここで$f(w,z;\eta,\xi)$ のdomain の形状より a(J) を0 にできる．$\therefore\Sigma[\int_D W(z-t,\zeta)dt\int_{K(J)}h(u;x+\sqrt{-1}\Gamma_J 0,\xi)d\sigma(\xi)]\in\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}$

on $p^*{}_0\times\{0\}\times S^{q-1}$.$\Sigma\int_D W(z-t,\zeta)dt\int_{K(J)}h(u;x+\sqrt{-1}\Gamma_J 0,\xi)d\sigma(\xi)$

$=\int_D W(z-t,\zeta)F(w,t)dt:=G(w,z,\zeta)$ 　より$sp\ G(u+\sqrt{-1}L^\circ 0,z,\zeta)\in\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}$

on $p^*{}_0\times\{0\}\times S^{q-1}$(すなわち,$G(u+\sqrt{-1}L^\circ 0,z,\zeta)$ が $p^*{}_0\times\{0\}\times S^{q-1}$ 上の$\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{O}$の元に拡張される．)

$\therefore\forall J, \exists u_J\in\mathcal{C}\mathcal{O}(p^*{}_0\times\{0\})$ s.t. $sp\ H_J(u+\sqrt{-1}L^\circ 0,z)=u_J$ (共通のdomainの上で) ここで，$H_J(w,z):=\int_{K(J)}G(w,z,\xi)d\sigma(\xi)$ とおいた.

u_J は$\mathcal{C}\mathcal{O}$のstalk の元より，$\exists v_J\in\mathcal{B}\mathcal{O}$ 　s.t. $sp(v_J-H_J(u+\sqrt{-1}L^\circ 0,z))=0$

($\mathcal{CO}(p^*{}_0\times\{0\})$ の元として) $\mathcal{BO}$ の元に関しては, $\mathcal{O}$ に関して境界値をとること により(それをb と書くことにする), $\mathcal{B}_M$ の元が得られ, しかも, そのSSの評価([3]) により, $sp(b(v_J-H_J(u+\sqrt{-1}L^\circ 0,z))=0$ ($\mathcal{C}_M$ の元として).

$\Sigma sp(b(H_J(u+\sqrt{-1}L^\circ 0,z))=F((u,x)+\sqrt{-1}\Gamma 0)=u$ より $u=\Sigma sp(v_J)$. 右辺は $\mathcal{A}^2$ の元より, $\mathcal{A}^2\to\mathcal{B}^2$ の単射性を用いれば $\sigma(u)=0$ から $u=0$ がでる. □

references

[1] Andreotti-Grauert, "Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes," Bull.Soc.Math.France, 90 (1962), 193-259.

[2] Douady, "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires," Asterisque 16 (1974).

[3] 金子　晃, "超函数入門 (上, 下)," 東京大学出版会 (上:1980, 下:1982).

[4] Kashiwara, "Cours à Paris-Nord," (1978).

[5] Kashiwara-Kawai, "On holonomic systems of microdifferential equations III," Publ.RIMS.Kyoto.Univ.17.No.3.(1981).

[6] 柏原-河合-木村, "代数解析学の基礎," 紀伊國屋書店 (1980).

[7] Kashiwara-Laurent, "Théorèmes d'annulation et deuxième microlocalisation," Paris-Sud, Orsay (pre-print).

[8] Kataoka, "On the theory of Radon transformations of hyperfunctions," J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect I A 28 No.2 (1981).

[9] 小松　彦三郎, "佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式," 東大セミナリーノート 22 (1968).

[10] ――――――, "グロタンディク空間と核定理," 上智大学数学講究録 No.9 (1981).

[11] 森本　光生, "佐藤超函数入門," 共立出版 (1976).

[12] Sato-Kawai-Kashiwara (S-K-K), "Microfunctions and Pseudo-differential equations," Lecture Notes in Math.287 Springer (1973).

[13] Bony, "Extentions du théorèmes de Holmgren," Séminaire Goulaouic-Schwartz (1975-1976).

[14] 戸瀬　信之, 東京大学修士論文 (1985).