数理解析研究所講究録
第 595 巻 1986 年 13-20

アレンジメントの特性多項式と logarithmic multi vector fields

国際基督教大学（ICU）・理
寺尾宏明

先に、筆者は、1981年に free arrangement について、その特性多項式（characteristic polynomial）と、arrangement に沿った logarithmic forms との間に、次の関係を得た。

定理（[2]）. $\mathcal{A}$ を free arrangement で、$(d_1, \cdots, d_\ell)$ をその exponents とするとき、$\mathcal{A}$ の特性多項式 $\chi(\mathcal{A}; t)$ は、$\prod_{i=1}^{\ell}(t-d_i)$ で与えられる。

ここでは、この公式を、全く一般の arrangement に拡張した公式を得たことを報告したい。これは、筆者が、P. Orlik-L. Solomon の好意により、1985年の夏を、米国の Wisconsin 大学で過ごすことができた折りの、彼らとの共同研究の中から生まれたものであり、ここで、彼らに心から感謝したい。

さて、用語の解説からはじめよう。$\mathbb{K}$を体として、Vを$\mathbb{K}$上のvector spaceとし、その次元をℓとする。Vのhyperplaneとは、Vの余次元1のsubspaceのことをいう。Vのarrangementとは、hyperplanesの有限集合のことである。ここで、$L(\mathcal{A})$（$\mathcal{A}$はVのarrangement）とは、$\mathcal{A}$の元たちのすべての組み合わせのintersectionの集合を指す。記号で書くと、

$$L(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{H \in B} H \;\middle|\; B \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

となる。特に、$\bigcap_{H \in \phi} H = V$と解釈して、$V \in L(\mathcal{A})$と約束する。そして、$L(\mathcal{A})$に、inclusionの逆によって、partial orderをいれる；

$$X \leq Y \iff X \supseteq Y.$$

すると、$L(\mathcal{A})$は、latticeになるが、このlatticeを（$\mathcal{A}$の）intersection latticeとよぶ。さて、$L(\mathcal{A})$上のMöbius関数 μ を考える。μは、$\mu : L \times L \to \mathbb{Z}$であって、

$$\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } X = Y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が、勝手な$X, Y \in L(\mathcal{A})$について成立することで特徴づけられている。$\mathcal{A}$の<u>特性多項式</u> $\chi(\mathcal{A}; t)$は、

$$\chi(\mathcal{A};t)=\sum_{X\in L(\mathcal{A})}\mu(V,X)\cdot t^{\dim X}$$

によって定義される。これは arrangement の組み合わせ論的研究において、最も中心的な役割をする多項式である。我々の新公式は、この $\chi(\mathcal{A};t)$ を、ある種の graded modules $D^p(\mathcal{A})$ の Poincaré series を用いて表わすものに他ならない。この $D^p(\mathcal{A})$ に関して説明しよう。$p=1$ の場合は、これは "$\mathcal{A}$ に沿った logarithmic vector fields のなす module" に他ならない。一般の p については、次のように定義する。まず、$S=S(V^*)$ を、V の dual space V^* の対称代数とする。ここで、

$$\mathrm{Der}^p(S)=\{\theta:\underbrace{S\times\cdots\times S}_{p}\to S \mid \theta\text{ は }\mathbb{K}\text{-multi-linear で、かつ、各変数について derivation}\}$$

と定義する。もちろん、$p=1$ のときは、通常の derivation である。すると、$\mathrm{Der}^p(S)$ は、自然に graded-S-module になる。$Q\in S$ を、$\mathcal{A}$ の定義式とする：

$$Q=\prod_{H\in\mathcal{A}}\alpha_H\ ,\quad \alpha_H\in V^*,\ \ker(\alpha_H)=H.$$

ここで,

$$D^p(\mathcal{A}) = \{ \theta \in \mathrm{Der}^p(S) \mid \theta(Q, f_2, \cdots, f_p) \in QS \text{ for any } f_2, \cdots, f_p \in S \}$$

と定義すると, これは $\mathrm{Der}^p(S)$ の graded S-submodule になる。我々の新しい公式は, 次の通りである:

定理. 勝手な arrangement $\mathcal{A}$ について,

$$\chi(\mathcal{A}; t) = (-1)^\ell \lim_{x \to 1} \sum_{p \geq 0} \mathrm{Poin}(D^p(\mathcal{A}); x) \{t(x-1)-1\}^p.$$

但し, $\mathrm{Poin}(D^p(\mathcal{A}); x)$ は, $D^p(\mathcal{A})$ の Poincaré series をさす。

簡単のため,

$$\Psi(\mathcal{A}; x, t) = \sum_{p=0}^{\ell} \mathrm{Poin}(D^p(\mathcal{A}; x)(t(x-1)-1)^p$$

を定義しよう。すると, 上の新公式は,

$$\chi(\mathcal{A}; t) = (-1)^\ell \lim_{x \to 1} \Psi(\mathcal{A}; x, t)$$

と書ける。

free arrangement に関する公式 $\chi(\mathcal{A}; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (t - d_i)$

との関係は次の通りである。$\mathcal{A}$の exponents とは、free module $D^1(\mathcal{A})$ ($\mathcal{A}$が free とは、$D^1(\mathcal{A})$が free module であることによって定義される) の基底の degrees に他ならなかったことを想起すれば、$\mathrm{Poin}(D^1(\mathcal{A});x)$は、$(d_1,\cdots,d_\ell)$で完全に記述される。同様に、$\mathrm{Poin}(D^p(\mathcal{A});x)$ $(p\geq 2)$も、実は、$(d_1,\cdots,d_\ell)$で、完全に記述されることが示せて、具体的には、

$$\Psi(\mathcal{A};t)=\prod_{i=1}^{\ell}(1+x+x^2+\cdots+x^{d_i-1}-x^{d_i}t)$$

となる。従って、ここで、$x\to 1$とすれば、新公式より

$$\chi(\mathcal{A};t)=\prod_{i=1}^{\ell}(t-d_i)$$

を得、これが、free arrangement に関する旧公式に他ならないという訳である。従って、新公式は、旧公式の一般化であると云える。

新公式の証明は、かなり複雑であるが、その道具として用いられる complexes について、少し述べる。2種類の complexes があるが、そのうちのひとつは、次のように作る。まず、$\mathcal{A}$は non-empty として、$H\in\mathcal{A}$とする。$\alpha=\alpha_H\in V^*$を、Hの定義式とする。

$$\partial : D^p(\mathcal{A}) \to D^{p-1}(\mathcal{A})$$

を、$(\partial\theta)(f_2, \cdots, f_p) = \theta(\alpha, f_2, \cdots, f_p)/\alpha$ $(\theta \in D^p(\mathcal{A}$

と定義する $(f_2, \cdots, f_p \in S)$。この map ∂ は、

homogeneous of degree -1 であって、$\partial \circ \partial = 0$

を満たす。我々は、complex

$$0 \to D^\ell(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} D^{\ell-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} D^0(\mathcal{A}) = S \to 0$$

を得る。実は、これが、acyclic になるのであって、それが証明のひとつのポイントである。　もうひとつの complex は、次のように作る。$h \in S$ を"十分 generic"にとって、$\deg h = d+1$ (h は同次式) としておく。

$$\partial_h : D^p(\mathcal{A}) \to D^{p-1}(\mathcal{A})$$

を、$(\partial_h\theta)(f_2, \cdots, f_p) = \theta(h, f_2, \cdots, f_p)$ $(\theta \in D^p(\mathcal{A}$

によって、定義する $(f_2, \cdots, f_p \in S)$。この map ∂_h は、homogeneous of degree d になって、$\partial_h \circ \partial_h = 0$ であるので、complex

$$0 \to D^\ell(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial_h} D^{\ell-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial_h} \cdots \xrightarrow{\partial_h} D^0(\mathcal{A}) = S \to 0$$

を得る。実は、この homology group が、$\mathbb{K}$ 上有限次元になる。そのことから、上で定義した $\Psi(\mathcal{A}; x, t)$ が、x についても多項式になることがわかり (a priori には、

$x=1$ で pole をもつ可能性がある）、他の情報とうまく組み合わせて新公式を得る、というのが、きわめて大雑把な証明の荒筋である。

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のときには、Orlik-Solomon [1] の結果とあわせると、$\mathbb{C}^{\ell}$ 内の超平面族の complement の Poincaré polynomial が ~~に関して、それが~~

$$t^{\ell}\,\Psi(\mathcal{A};1,-t^{-1})$$

で表わされ、結局、Betti 数が、$D^0(\mathcal{A}), D^1(\mathcal{A}), \cdots, D^{\ell}(\mathcal{A})$ 等の代数的情報で決まっていることになる。

また、上記の complex

$$0\to D^{\ell}(\mathcal{A})\xrightarrow{\partial_h} D^{\ell-1}(\mathcal{A})\xrightarrow{\partial_h}\cdots\xrightarrow{\partial_h} D^0(\mathcal{A})=S\to 0$$

については、0次 homology 以外は、すべて 0 ではないかと思われるが、— いくつかの仮定のもとでは証明可能 — 一般の場合の証明はできていない。

References

[1] Orlik, P., Solomon, L.: Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. Inventiones math. 56, ~~197~~ 167–189 (1980).

[2] Terao, H.: Generalized Exponents of a free

arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. Ibid. 63, 159-179 (1981).