数理解析研究所講究録
第 595 巻 1986 年 21-26

解析空間のある位相的性質

東北大理　佐藤 肇 (Hajime SATO)

複素代数多様体，あるいは，複素解析空間は，広中の定理により，特異点解消を持つ。この事実を '位相的' に証明せよ　というのが Sullivan の問題（加藤 [2] 参照）であった。しかし，この問題は，一般の多面体の特異点解消という問題に一般化されるべきものではなく，まず

解析空間の位相を調べよ

という面から始まるべきものと思われる。ある種の隠れた位相的構造が，特異点解消に役立っているのに違いない。

Sullivan は [6] で，複素解析空間は，Euler 空間であることを示した。即ち，複素解析空間の，各点の局所ホモロジーから定まる Euler 数は，非特異なものと等しいという結果である。

この結果は著しいが，複素解析空間の位相となる為の条件からは，まだ遠いと思われる。

Euler 空間は，(細分した空間の) k 次元単体すべてを集めたものが，輪体となり，そのホモロジー類

$$S_k \in H_k(\mathbb{Z}_2)$$

を，<u>Stiefel-Whitney ホモロジー類</u>と呼ぶ。多様体の Stiefel-Whitney ホモロジー類は，Stiefel-Whitney コホモロジーのポアンカレ双対となり，ホモトピー不変の量となる。

非特異な複素解析空間（即ち，複素多様体）は，その接束が，複素束に還元される。即ち，<u>概複素多様体</u>である。このような多様体では，Chern コホモロジー類の mod 2 還元が Stiefel-Whitney 類（偶数次元）となり，奇数次元の Stiefel-Whitney コホモロジー類は，$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ で定められる Bockstein 準同型

$$\begin{array}{ccc} H^{2i}(\mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^{2i+1}(\mathbb{Z}_2) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ w^{2i} & & w^{2i+1} \end{array}$$

の像であるから，常に消えている。即ち，<u>複素多様体の奇数次元 Stiefel-Whitney コホモロジー類は常に 0</u> である。

これに対応する事実が，特異点のある解析空間の場合に成立するかどうか，疑問に思っていたが，実は，広中の特異点解消を用いれば，簡単に示されることがわかった。既知のこととは思われるが，文献が見当らないので，述べておく。

定理 1　X をコンパクト複素解析空間, $S_{2j-1}(X)$ をその奇数次元 Stiefel-Whitney ホモロジー類とすると,

$$0 = S_{2j-1}(X) \in H_{2j-1}(X;\mathbb{Z}_2) \qquad j=1,2,\cdots$$

証明　X_i を非特異な複素多様体, $g_i : X_i \to X$ 射を

$$\forall p \in X \qquad \sum_i k_i \chi(g_i^{-1}(p)) = 1$$

(但し $\chi(g_i^{-1}(p)) \in \mathbb{Z}$ で空間 $g_i^{-1}(p)$ の Euler 数をあらわす)

となるように作ることが, 広中の定理を, 次元の上からの induction で用いることにより, できる。この時, Akin[1] により, $\cup(g_i)_*(S_k(\cup X_i)) = S_k(X)$ となることが知られており, $S_{2j-1}(X_i)=0$ であるから, 定理は証明される。

この結果を, 広中の定理を用いないで証明できるだろうか?

MacPherson[3] により, (特異点のある) 代数多様体に対して, Chern ホモロジー類が構成されている。次の結果も既知と思われるが, 文献は同様に見当らない。

k 次元 Chern ホモロジー類を $c_k(X) \in H_{2k}(X;\mathbb{Z})$ と書く。

定理２　Xをコンパクト複素代数多様体（特異点を許す）とする。その時

$$c_k(X) \equiv S_{2k}(X) \in H_{2k}(X; \mathbb{Z}_2)$$

証明は定理１と全く同様であり，解析空間にも$c_k(X)$が定義出来れば，同様の定理が成立すると思われる。

MacPhersonのChern類は，MacPherson cycleの構成と，そのblowing up（Nashによる）から定まるMather類の構成という，２つの主要部分に分かれるが，定理２は，Chern類のcombinatorial topologicalな構成の可能性を残している様に思われる。

さて，定理１は，Sullivanの定理のように，解析空間が，解析多様体によるstratificationを持つという事実のみから従うのであろうか？　次の定理は，これが，そうではないことを示している。即ち，複素解析空間の複素多様体によるstratificationは，strataの間によい"関係"が成立していることを意味している。

Euler空間の定義で，mod 2のEuler数を考える時にはmod 2 Euler空間，一般的な整係数の時，整Euler空間という。

定理３　あるコンパクトな整Euler空間Xで、複素多様体でstratifyされており、$\exists j$. $S_{2j-1}(X) \neq 0$となるものが存在する。

複素多様体でstratifyされていることの正確な意味は

$$X = \bigcup_i X^i \qquad X^i : i\text{次元複素多様体と同相}$$

ということである。

このようなXは沢山作れるが、例えば、

$$X = P^3(R) \times S^1 \times S^2 = P^3(R) \times S^1 \times (S^2 - \text{pt}) \cup P^3(R) \times S^1$$

と考え、

$P^3(R)$の１次元ホモロジーに対応する元を、松井＝佐藤[4][5]の方法で構成すれば、それは、各strata毎に同相で、Stiefel-Whitney homology類を変えることが出来るからである。

以上の結果は、筆者と松井明徳氏（一関高専）の共同研究の内に得られたものである。

References

[1] E. Akin, Stiefel-Whitney homology classes and bordism, Trans AMS 205 (1975), 341-359.

[2] 加藤十吉, 解析集合の初等位相幾何学, 数学 25 (1973), 38-51.

[3] R. D. MacPherson, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. Math 100 (1974), 423-432.

[4] A. Matsui and H. Sato, Stiefel-Whitney homology classes and homotopy type of Euler spaces, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 437-453.

[5] 佐藤 肇, 特異空間と両変理論, 数解研講究録 577 (1985), 62-73.

[6] D. Sullivan, Combinatorial invariants of analytic spaces, Proc. Liverpool Singularities I. Lec. Note in Math 192 Springer, 1971, 165-168.