

# 解析環の準同型のランクに関する条件について

(Mar. 1986)

(On the Rank Condition for Homomorphisms of Analytic Algebras)

近畿大学工学部数学教室 泉 脩藏 (Shuzo IZUMI)

$k$  を実数体  $\mathbb{R}$  か複素数体  $\mathbb{C}$  とする。

収束巾級数環  $k\{x\}$  の剰余環  $k\langle x \rangle$  を ( $k$  上の) 解析環と言う。  $A$  の極大イデアルを  $\mathfrak{m}$  とする。  $f \in A$  の (代数的) 位数  $\nu(f)$  および被約位数  $\bar{\nu}(f)$  を  $\nu(f) = \sup\{p: f \in \mathfrak{m}^p\}$  および  $\bar{\nu}(f) = \lim_{q \rightarrow \infty} \nu(f^q)/q$  で定義する。また解析環の準同型  $\varphi: A \rightarrow B$  は常に  $\varphi(1) = 1$  なるものとする。位数については、次の不等式が知られている。

$A$  の完備化  $\hat{A}$  が巾零元をもたないとき,

$$(CI_0) \exists b_0 > 0, \forall f \in A: \nu(f) + b_0 \geq \bar{\nu}(f) \quad (\geq \nu(f)) \quad ([R_1])$$

$\hat{A}$  が整域のとき,

$$(CI_1) \exists a_1 \geq 1, \exists b_2 > 0, \forall f, g \in A: a_1(\nu(f) + \nu(g)) + b_2 \geq \nu(fg) \quad (\geq \nu(f) + \nu(g)) \quad ([I])$$

(これらは一般の局所環に対しても成立する。 ( $[R_1], [R_2]$ ))

解析環の準同型  $\varphi: A \rightarrow B$  が与えられたとき、それに付随して解析空間の射の芽  $\phi_\varepsilon: Y_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$  が定まる。  $|X|$  の  $\varepsilon$  に近い滑らかな点における  $\phi$  のヤコ

ビアン-マトリックスの階数の最大値を,  $\phi$  あるいは  $\varphi$  の幾何的階数と言い  $\text{grnk } \varphi$  で表わす。これを用いて次の定理が成立する。

$A$  が整域で,  $\text{grnk } \varphi = \dim A$  であれば,

$$(CI_2) \exists a_2 \geq 1, \exists b_2 \geq 0, \forall f \in A: a_2 \nu(f) + b_2 \geq \nu(\varphi(f)) \quad ([1])$$

今回の主張は, これの一般化と, その逆が成立することである。まず一般の  $k$  上の解析環の単射準同型  $\varphi: A \rightarrow B$  に対して,  $A$  の極小素イデアルを  $p_1, \dots, p_s$  とし,  $A_i = A/p_i$ ,  $B_i = B/\varphi(p_i)B$  と置くと,  $\varphi$  は準同型  $\varphi_i: A_i \rightarrow B_i$  をひきおこす。 $\varphi$  の成分別の幾何的階数  $r_1 = (r_1^1, \dots, r_1^s)$  および解析的階数  $r_3 = (r_3^1, \dots, r_3^s)$  を, まず  $k = \mathbb{C}$  のときは  $r_1^i = \text{grnk } \varphi_i$ ,  $r_3^i = \dim A_i$  で, また  $k = \mathbb{R}$  のときは後者は同じ式, 前者は  $r_1^i = \text{grnk } \varphi_i^{\mathbb{C}}$  (複素化) で定義する。

**定理:**  $k$  上の解析環の単射準同型  $\varphi: A \rightarrow B$  に対して, 条件  $r_1 = r_3$  は, 次の条件と同値である。

$$(CT_2) \exists \bar{a}_2 \geq 1, \forall f \in A: \bar{a}_2 \bar{\nu}(f) \geq \bar{\nu}(\varphi(f)) \quad (\geq \bar{\nu}(f))$$

証明には,  $(CI_0) \sim (CI_2)$  の他に, Eakin-Harris [EH] の方法を用いる。定理の条件はまた「 $\varphi(A)$  が  $B$  の極大イデアルの中による位相に関して閉じている」という重要な条件と関係が深い。(閉性については[B]が面白い——少し不正確な点もあるが。) これらの詳細については別のところで述べる予定である。

## References

- [B] Becker, J., On the composition of power series, In: *Commutative algebra (analytic methods)* (LN in pure and apl. math. 68), (159~172), Marcel Dekker, New York, 1982.
- [EH] Eakin, P., Harris, G., When  $\phi(f)$  convergent implies  $f$  is convergent, *Math. Ann.* **229** (1977), 201~210.
- [I] Izumi, S., A Measure of integrity for local analytic algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **21** (1985), 719~735.
- [R<sub>1</sub>] Rees, D., Valuations associated with a local ring (II), *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), 228~235.
- [R<sub>2</sub>] ———., Izumi's theorem, unpublished (1985).