数理解析研究所講究録
第 595 巻 1986 年 30-38

土橋カスプ特異点の無限小変形

東北大理 尾形庄悦 (Shoetsu Ogata)

§0. 序. (V, p) を $n(\geq 2)$ 次元正規孤立特異点とする。ここでは (V, p) が"カスプ"と呼ばれる場合を考察する。Hirzebruch は[H]で Hilbert modular 多様体 $(\mathbb{H}^n/SL_n(\mathcal{O}))^*$ $= (\mathbb{H}^n/SL_n(\mathcal{O})) \cup \{p_1, \cdots, p_h\}$ を研究し, $n=2$ のときカスプ特異点 p_i の最小特異点解消を与えた。ここに $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ は上半平面, $\mathcal{O}$ は総実 n 次代数体の整数環である。これが, カスプ特異点の現われた最初である。土橋はこれを一般化して, tube 領域 $\mathcal{D}$ とある離散群 G とを使って, $V \setminus \{p\} \cong \mathcal{D}/G$ となるような"土橋カスプ特異点"を構成した[T1]。ここでは, tube 領域が第一種 Siegel 領域とも呼ばれることから, $V \setminus \{p\}$ $\cong \mathcal{D}/G$ で $\mathcal{D}$ が第二種 Siegel 領域になっている正規孤立特異点 (V, p) も"カスプ"と呼ぶことを提案したい。

本論では, この拡張されたカスプ特異点が正規孤立 Du Bois 特異点であることと, $n \geq 3$ のときにはこれが equisingular であることを示す[O2]。

次に，(V,p)がn次元Hilbert modularカスプ特異点のとき Freitag と Kiehl により，$n\geqq 3$ならば(V,p)は"rigid"，つまり変形が自明であることが示された[FK]。ここでは，$n=3$のとき土橋カスプ特異点は一般にrigidでないことを示す[O1]。この結果をもとに土橋は(V,p)のversal族を構成した[T2]。

§1. カスプ特異点の構成

1.1. 第二種 Siegel 領域

$r\geqq 1$，$m\geqq 0$，$n:=r+m\geqq 2$を整数とし，Nを階数rの自由$\mathbb{Z}$-加群とする。$C\subset N_{\mathbb{R}}=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$を開凸錐で$\overline{C}\cap(-\overline{C})=\{0\}$なるものとする。$H:\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m\longrightarrow N_{\mathbb{C}}=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$をHermit形式で

(i) $H(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2,v)=\lambda_1H(u_1,v)+\lambda_2H(u_2,v)$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $u_i,v\in\mathbb{C}^m$

(ii) $\overline{H(u,v)}=H(v,u)$，$\overline{}$は複素共役を表わす．

(iii) $H(u,u)\in\overline{C}$，$u\in\mathbb{C}^m$，$\overline{C}$はCの$N_{\mathbb{R}}$における閉包．

(iv) $H(u,u)=0$ ならば $u=0$.

を満たすものとする。このとき

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}(H,C):=\{(z,u)\in N_{\mathbb{C}}\times\mathbb{C}^m:\ \mathrm{Im}\,z-H(u,u)\in C\}$$

とおいて，これをHとCに付随した第二種Siegel領域という。

群$N(\mathcal{D}):=\{(a,c)\in N_{\mathbb{R}}\times\mathbb{C}^m\}$が$\mathcal{D}$上に

$$(a,c)(z,u)=(z+a+2\sqrt{-1}H(u,c)+\sqrt{-1}H(c,c),\ c+u)$$

として作用することに注意しておく。

1.2. Lattice data.

$L\subset\mathbb{C}^m$ を階数 $2m$ の自由 $\mathbb{Z}$-加群で，その商 $\mathbb{C}^m/L$ がコンパクトなものとする。$\Gamma\subset \mathrm{Aut}(N)$ を C を保つ部分群で，更に次の条件を満たすものとする。

a) Γ は $D:=C/\mathbb{R}_{>0}$ 上に固有不連続かつ固定点なしに作用する。

b) 商 D/Γ はコンパクト。

c) 群準同型 $\Gamma\ni g\longmapsto \tilde{g}\in GL_m(\mathbb{C})$ で
$gH(u,u)=H(\tilde{g}u,\tilde{g}u)$ かつ $\tilde{g}L\subset L$ なるものがある。

d) すべての $l,\ l'\in L$ に対し，$H(l,l')-H(l',l)\in\sqrt{-1}N$.

1.3. 構成.

$T_N:=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^*$ を r 次元代数的トーラスとする。$N,\ L$ を $N(\mathcal{X})$ の部分群とみて

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{X}/N & \subset & T_N\times\mathbb{C}^m\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{X}/N\rtimes L & \subset & (T_N\times\mathbb{C}^m)/L\end{array}$$

を考える。$(T_N\times\mathbb{C}^m)/L$ は Abel 多様体 $A:=\mathbb{C}^m/L$ 上の T_N-束になっている。その推移関数は，$u\in\mathbb{C}^m,\ l\in L$ に対し

$$\exp(2\pi(2H(u,\ell)+H(\ell,\ell)))\in T_N$$

である。但し, $\exp : N_{\mathbb{C}} \longrightarrow T_N = N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^*$ とおいた。

今, $C\cup\{0\}$ の Γ-admissible rational partial polyhedral 分割 $\hat{\Delta}$ で $\hat{\Delta} \bmod \Gamma$ が有限となるものをとる。このとき

$$\begin{array}{ccc} T_N\times\mathbb{C}^m & \subset & T_N\,\mathrm{emb}(\hat{\Delta})\times\mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T_N\times\mathbb{C}^m)/L & \subset & (T_N\,\mathrm{emb}(\hat{\Delta})\times\mathbb{C}^m)/L \end{array}$$

となる。

Γ の作用による商をとるために, "うまい"作用域をとりたい。そのために, 実解析的写像 $(T_N\times\mathbb{C}^m)\ni(t,u)\longmapsto \mathrm{ord}(t)-H(u,u)\in N_{\mathbb{R}}$ を拡張して, $\Phi : (T_N\,\mathrm{emb}(\hat{\Delta})\times\mathbb{C}^m)\longrightarrow M_C(N,\hat{\Delta})$ を作る。(トーラス埋込に関係する記号は[MO]に依る。) この写像は L-不変だから, $(T_N\,\mathrm{emb}(\hat{\Delta})\times\mathbb{C}^m)/L\longrightarrow M_C(N,\hat{\Delta})$ が誘導され, これも同じ Φ で表わす。この Φ は Γ-同変である。今,

$$\tilde{\mathcal{U}} := \Phi^{-1}(\,C \text{ の } M_C(N,\hat{\Delta}) \text{ 内での閉包の内部}\,)$$

$$\tilde{Y} := \tilde{\mathcal{U}} \setminus \Phi^{-1}(C)$$

とおく。Γ は $\tilde{\mathcal{U}}$, $\tilde{Y}$ 上に固有不連続かつ固定点なしに作用するから, その商を $\mathcal{U} := \tilde{\mathcal{U}}/\Gamma$, $X := \tilde{Y}/\Gamma$ とおく。

X を contract して正規孤立特異点を作りたい。そのため $\mathcal{D}$ の核関数を利用する。$(z,u)\in\mathcal{D}$ に対し

$$\Phi(z,u) := \int_{C^*}\exp(-\langle \mathrm{Im}\,z - H(u,u), t\rangle)\det\Theta(t)\,\phi_{C^*}(t)^{-1}\,dt$$

とおく。ここに，$C^*=\{y\in N_R^* : \langle x,y\rangle>0\ \forall x\in\overline{C}\setminus\{0\}\}$ はCの双対錐で，φ_{C^*} は C^* の特性関数 [V] である。$\Theta(t)\in M_m(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^m$ の内積 (,) を固定したとき

$$\langle H(u,v),t\rangle=(v,\Theta(t)u)\quad \forall u,v\in\mathbb{C}^m,\ t\in N_{\mathbb{R}}^*$$

で定義されるHermit対称行列である。更に，$t\in C^*$ に対して $\Theta(t)$ は正定値になる。Φ は，$\mathcal{D}$ 上正値で，その Hessian は正定値であり，N-，L-不変，更に $g\in\Gamma$ に対し

$$\Phi(gz,\tilde{g}u)=|\det g|^{-2}|\det\tilde{g}|^{-2}\,\Phi(z,u)$$

である。従って，Φ は $U\setminus X$ 上の関数とみなされる。X上で $\Phi\equiv 0$ と定めると，Φ は U 上 plurisubharmonic かつ $U\setminus X$ 上 strictly plurisubharmonic となるので，X を contract することができる (cf. [GR])；　$\pi:(U,X)\longrightarrow(V,p)$.

注意 1．$m=0$ のとき，(V,p) は土橋カスプ特異点に他ならない。

2．$r=1$ のとき，$\mathcal{D}$ は $n=m+1$ 次元超球と同型になり，このとき X は Abel 多様体 $A=\mathbb{C}^m/L$ と同型で，(V,p) は A 上の affine cone になる。

§2. 結果.

<u>定理 2.1.</u> §1で構成された(V,p)について,

$$(R^i\pi_*\mathcal{O}_U)_p \xrightarrow{\sim} H^i(X,\mathcal{O}_X) \quad (i\geq 1),$$

$$R^i\pi_*\mathcal{O}_U(-X)=0 \quad (i\geq 1).$$

特に,(V,p)は正規孤立Du Bois特異点である。

2.2. 無限小変形について.

ここでは,(V,p)の変形とは,複素解析空間の芽の間の平坦射$f:(\mathcal{V},0)\longrightarrow(T,0)$と同型$(V,0)\xrightarrow{\sim}(f^{-1}(0),0)$の組の意味である。$(V,p)$の一次無限小変形とは,$(V,p)$の変形$f:(\mathcal{V},0)\longrightarrow(T,0)$であって,$T=\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}\{\varepsilon\}/(\varepsilon^2)$のこととする。我々に興味があるのは$T_V^1:=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_V,\mathcal{O}_V)$である。これは$(V,p)$の一次無限小変形の分類空間になっている。これを調べるためにSchlessingerによる次の定理が有効である:

<u>比較定理([S]).</u> $(V,p)\hookrightarrow(\mathbb{C}^d,0)$を閉埋込とするとき,

$$0\longrightarrow T_V^1\longrightarrow H^1(V\setminus\{p\},\Theta_V)\longrightarrow H^1(V\setminus\{p\},\Theta_{\mathbb{C}^d}|_V)$$

は完全列である。

<u>定理 2.2.</u> $n\geq 3$のとき,

$$H^1(U,\Theta_U(-\log X))\xrightarrow{\sim}T_V^1\xrightarrow{\sim}H^1(V\setminus\{p\},\Theta_V).$$

ここに $\Theta_V(-\log X)$ は，Xに沿って対数的極を持つKähler微分の層 $\Omega^1_V(\log X)$ の双対層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_V(\log X), \mathcal{O}_V)$ である。

注意. Xの既約分解を $X=\cup_i X_i$ とし，X_iのVにおける法層を $N_{X_i/V}$ とすると，$\Theta_V(-\log X)=\mathrm{Ker}(\Theta_V \longrightarrow \oplus_i N_{X_i/V})$ が成立する。更に，$H^1(\Theta_V(-\log X))=\mathrm{Ker}(H^1(\Theta_V)\longrightarrow \oplus_i H^1(N_{X_i/V}))$が成立し，従って $H^1(\Theta_V(-\log X))$ はVの一次無限小変形でどのX_iも消えないものの分類空間である(cf. [W])。

定理 2.3. $m=0$ のとき，すなわち (V,p) が土橋カスプ特異点のとき，

$$H^i(V, \Theta_V(-\log X)) \cong H^i(\Gamma, N_{\mathbb{C}}) \quad (i\geq 1).$$

ここに右辺は $\Gamma\subset \mathrm{Aut}(N)$ の作用による群cohomologyである。

定理 2.4([O1]). 錐Cがより低次元の錐の直積に分解するとき，つまり $C=C_1\times\cdots\times C_s\ (s\geq 2)$ と書けるとき，

$$H^1(\Gamma, N_{\mathbb{C}})=0 .$$

定理 2.5([O1]). $r=3$ のとき，

$$3(1-\chi(D/\Gamma)) \geq \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, N_{\mathbb{C}}) \geq -3\chi(D/\Gamma).$$

ここに，$\chi(D/\Gamma)$は閉曲面 D/Γ の Euler 数である。

注意 1. (V, p) が土橋カスプ特異点のとき，Hilbert modular カスプでなければ，すなわち D/Γ が実トーラスでなければ，$\chi(D/\Gamma) < 0$ であることが[T1]により判る。従って，その時には，定理2.2 と2.5 により $\dim_{\mathbb{C}} T^1_V > 0$，つまり (V, p) が rigid でないことが判る。

2. 最近，土橋は定理2.5 の精密化 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, N_{\mathbb{C}}) = -3\chi(D/\Gamma)$ を示し，土橋カスプ特異点の versal 族を構成した[T2]。

これらの定理の証明については[O1]，[O2]を参照。

参考文献

[BS] C. Bǎnica and O. Stǎnǎşilǎ, Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces, Editura Academiei, Bucuresti and John & Sons, London, New York, Sydney and Toronto, 1976.

[FK] E. Freitag and R. Kiehl, Algebraische Eigenschaften der lokalen Ringe in den Spitzen der Hilbertschen Modulgruppen, Inventiones Math. 24(1974), 121-148.

[GR] R. C. Gunning and H. Rossi, Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J., 1965.

[MO] T. Oda, Lectures on Torus Embeddings and Applications

(Based on joint work with K. Miyake), Tata Inst. of Fund. Res., Bombay, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[O1] S. Ogata, Infinitesimal deformations of Tsuchihashi's cusp singularities, to appear in Tohoku Math. J.

[O2] S. Ogata, Infinitesimal deformations of generalized cusp singularities, preprint.

[Sa] I. Satake, Numerical invariants of arithmetic varieties of Q-rank one, preprint.

[S] M. Schlessinger, Rigidity of quotient singularities, Inventiones Math. 14(1971), 17-26.

[T1] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. 35(1983), 607-639.

[T2] H. Tsuchihashi, Deformation of three dimensional cusp singularities, preprint.

[W] J. M. Wahl, Equisingular deformations of normal surfase singularities I, Ann. of Math. 104(1976), 325-356.

[V] E. B. Vinberg, Theory of homogeneous convex cones, Trans. Moscow Math. Soc. 12(1967), 303-368.

[H] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, Enseign. Math. 19 (1973), 183-281.