数理解析研究所講究録
第 595 巻 1986 年 59-73

トーリック因子の不変量

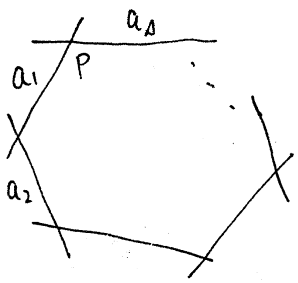
東北大学理学部　石田正典

§1. 曲面上のトーリック因子.

一般の次元のトーリック因子の定義を与えるには少し準備を必要とするので，この節ではまず説明し易い2次元の場合について述べる。

ここで2次元というのは因子の入っている多様体の次元であって，したがって因子自体の次元は1次元である。

さて2次元の場合，トーリック因子とはコンパクトとは限らない非特異複素曲面に含まれる連結かつコンパクトな通常2重点のみを持つ曲線 D であって，既約成分が2つ以上



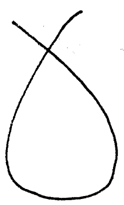


図1.　　図2.

で非特異有理曲線の輪になっているか（図1）又は既約成分が1つでそれが1つの2重点を持つ有理曲線であるか（図2）のいずれかを言う。

図1の場合 D の既約成分を $C_1,\cdots,C_s$ とし $C_i\cdot C_{i+1}=1$, $i=1,\cdots,s$（但し $C_{s+1}=C_1$）とする。この場合、この曲線から得られる交点数に関するこれ以上の情報は各成分の自己交点数 $a_1=C_1^2,\cdots,a_s=C_s^2$ のみである。したがって D に関する不変量を定義するとすれば，整数の列 $(a_1,\cdots,a_s)$ から定まる値を考えることになる。

さて、この曲面を C_1 と C_s の交点 P で blow-up して D にその例外曲線を加えた曲線を D' とすると D' もトーリック因子であり，その各既約因子の自己交点数は（図3）のようになる。

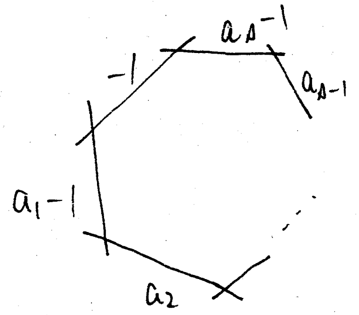


図3.

この D から D' への変換をトーリック因子の"<u>双有理型変換</u>"と考え，D の不変量としてこの双有理型変換で変化しなりものを考えたい。

さて良く知られているように，もし上の D に対し自己交点数 $a_1, \cdots, a_s$ がすべて -2 以下で少なくとも1つが -3 以下であれば D は解析的特異点として1点につぶすことが出来る。得られた特異点はヒルベルト・モジュラー曲面に現われるカスプ特異点と同じものである。

数年前，中村郁氏はこのカスプ特異点にいくつかの不変量を定義して，ある方法で決められた2つのカスプ特異点の組に対してそれらの不変量の間に双対性が成り立つことを示した。それらの不変量は非特異化が極小であること，つまり条件 $a_1, \cdots, a_s \leqq -2$ のもとに数列 $(a_1, \cdots, a_s)$ から作られるある式で定義されるが，その条件を無視して一般のトーリック因子に対して同じ式で不変量を定義した場合，一般には双有理型変換で不変とはならず，不変になるのは <u>degree</u> と呼ばれる不変量 $12 + 3s + (a_1 + \cdots + a_s)$ のみである。これの不変性は図1と図3を見比べれば明らかであろう。

さて §3 で述べるトーリック因子の双有理型不変量である Ehlers-佐武 の χ_∞ と尾形の $\zeta(0)$ は2次元の場合上の D に対して

$$\chi_\infty = -\zeta(0) = \{3s + (a_1 + \cdots + a_s)\}/12$$

である。つまりこれらの不変量は中村氏の degree と本質的に同じである。但しこれらは明らかに整数値とは限らない。

また D がカスプ特異点の例外因子で D^* をそれに双対なカスプ特異点の非特異化の例外因子とすると双対性により $\chi_\infty(D)+\chi_\infty(D^*)=0$ となる。

§2. トーリック多様体.

トーリック多様体はトーラス埋め込みとも呼ばれ、次のように定義される代数多様体のことである。

r を負でない整数とし $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ の乗法群とするとき、$T=(\mathbb{C}^*)^r$ を代数群と見たものを r 次元の代数的トーラスと言う。r 次元のコンパクト正規代数多様体 Z が T の効果的な代数的作用を持つ時 Z をトーリック多様体と言う。また、この時 Z は T と同型な T-軌道を含むので、T が Z に含まれると考えて T-埋め込みとも言う。

Z を T-埋め込みとすると、Z の T-軌道は有限個であり、T 以外は r より低い次元の代数的トーラスと同型である。また各軌道の Z での閉包はその次元のトーリック多様体となっている。

トーリック多様体のイメージとしては、r 次元の凸多面体の各面の内部をその面の次元と同じ複素次元の代数的トーラスで置き換えたものを想像すると良い。特にその凸多面体

の内部がトーラス T となるわけである。もう少し正確に言えば，Z を r 次元の射影的トーリック多様体とし，その上に1つ"非常に豊富な"代数的直線束を考えると，それに対して r 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に含まれる $\mathbb{Z}^r$ の点を頂点とする r 次元の凸多面体 $\square$ が定まり商空間 $Z/(U(1))^r$ が $\square$ と微分同相となる。ここで $U(1)=\{z\in\mathbb{C}^*\ ;\ |z|=1\}$ であり，$(U(1))^r$ の Z への作用は T の部分群としてのものである。この同相写像により Z の各 T-軌道は $\square$ のある面の内部の上に写される。

例. 射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*\cup\{0,\infty\}$ は1次元のトーリック多様体であるが

$$(z_0 : z_1)\longmapsto\left(\frac{|z_0|}{|z_0|+|z_1|},\ \frac{|z_1|}{|z_0|+|z_1|}\right)$$

により線分に対応する。

一般の $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$ は $T=\{(z_0:\cdots:z_r)\ ;\ z_i\neq 0,\ \forall i\}\subset\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$ とすると T-埋め込みになっている。写像 $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{R}^{r+1}$ を

$$(z_0:\cdots:z_r)\longmapsto\left(\frac{|z_0|}{|z_0|+\cdots+|z_r|},\cdots,\frac{|z_r|}{|z_0|+\cdots+z_r}\right)$$

で定めると像は r 次元単体で $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$ の各 T-軌道がその単体のある面に対応している。

トーリック多様体はユークリッド空間の多角錐体による分割に対応することが知られている。ここでは話を簡単にするため非特異なトーリック多様体の場合を説明する。

NをTの基本群$\pi_1(T)$とする。Nは$\mathbb{Z}^r$と同型である。したがって$N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$は$r$次元のユークリッド空間となる。$N_{\mathbb{R}}$の空でない部分集合$\sigma$が$N_{\mathbb{R}}$の非特異錐であるとは，$N$の基底$\{n_1, \cdots, n_r\}$と整数$0 \leqq s \leqq r$が存在して$\sigma = \{a_1 n_1 + \cdots + a_s n_s\ ;\ a_i \geqq 0,\ i = 1, \cdots, s\}$となることをいう。このとき$s$は$\sigma$の次元である。また$\{n_1, \cdots, n_s\}$を$\sigma$の基本生成系と呼ぶことにする。$\{n_1, \cdots, n_s\}$の部分集合を基本生成系とする非特異錐$\tau$を$\sigma$の面といい$\tau < \sigma$と書く。$N_{\mathbb{R}}$の非特異錐の集合$\Delta \neq \phi$が"(1) $\sigma \in \Delta$であればσの各面もΔに含まれる。(2) $\sigma, \tau \in \Delta$であれば共通部分$\sigma \cap \tau$はσ及びτの面である。"の2条件を満たす時Δを$N_{\mathbb{R}}$の扇(おうぎ)といい，さらにΔが有限集合で$\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = N_{\mathbb{R}}$となっている時$\Delta$を完全扇という。このとき$N_{\mathbb{R}}$の各扇$\Delta$に対し$T$-埋め込み$Z(\Delta)$を構成することが出来て次の定理が成立する。

定理 (Demazure)　$N_{\mathbb{R}}$の完全扇とコンパクト非特異T-埋め込みは、対応$\Delta \longmapsto Z(\Delta)$により1対1に対応する。

$N_{\mathbb{R}}$ の完全扇 Δ に対し $N_{\mathbb{R}}$ の原点を中心とする超球面 S^{r-1} を考え $\Delta|_{S^{r-1}}=\{\sigma\cap S^{r-1}\,;\,\sigma\in\Delta\}$ とおくと，これは S^{r-1} の単体分割となっている。前述のように $Z(\Delta)$ が射影的であれば，それにある凸多面体が対応するが，この表面に自然に入る多面体分割とこの S^{r-1} の単体分割は互いに双対分割になっている。言い換えれば s 次元の Δ の錐には $(r-s)$ 次元の $Z(\Delta)$ の T-軌道が対応しており $\sigma,\tau\in\Delta$ に対し $\tau<\sigma$ となる必要十分条件は対応する軌道 $\mathrm{orb}(\sigma)$ が $\mathrm{orb}(\tau)$ の閉包に含まれることである。$\mathrm{orb}(\sigma)$ の $Z(\Delta)$ での閉包を $V(\sigma)$ と書くことにする。$V(\sigma)$ は $(r-s)$ 次元のトーリック多様体である。特に $\gamma\in\Delta$ が1次元の時，$D(\gamma)$ は $Z(\Delta)$ の既約因子である。また $\Delta(1)=\{\gamma\in\Delta\,;\,\dim\gamma=1\}$ に対し

$$Z(\Delta)\setminus T=\bigcup_{\gamma\in\Delta(1)}D(\gamma)$$

となる。これを $D(\Delta)$ と書くことにする。

§3. トーリック因子.

さて，いよいよトーリック因子の定義をのべる。名前は佐武氏に依るが，ここでは少し定義を変えてある。

定義. X をコンパクトとは限らない r 次元複素多様体

で D を X の因子，即ちコンパクトかつ D のすべての点で余次元 1 の解析部分空間となっているとする。もし D の各既約成分 D_i に対しその開近傍 X_i，トーリック多様体 $Z(\Delta)$，1 次元錐 $\gamma \in \Delta$，$V(\gamma)$ の $Z(\Delta)$ での近傍（古典的位相による）U 及び局所同型写像 $\varphi : U \to X$ が存在し $\varphi(V(\gamma)) = D_i$，$\varphi^{-1}(D) = D(\Delta) \cap U$ を満たす時 (X, D) 又は単に D を <u>トーリック因子</u> と呼ぶ。便宜上 $r = \dim X$ をこのトーリック因子の次元と呼ぶ。

<u>例</u>. トーリック因子の例として次のようなものがある。

(1) $Z(\Delta)$ をトーリック多様体とするとき，$D(\Delta) \subset Z(\Delta)$ はトーリック因子である。

(2) $\{X_t\}$ をアーベル多様体の 1 変数族で $t = 0$ において最も退化した安定準アーベル多様体となるものとすると，X_0 はトーリック因子となる。但し，この場合族は全体では特異点を持ち得るので定義を特異点を持つ場合に拡張しなければならないが，全体空間をトーリック的に非特異化して得られた族 $\{X'_t\}$ を考えれば X'_0 が上に定義した意味でトーリック因子となる。

(3) ある種のカスプ特異点の"トーリック的な"非特異化を行なった時の例外因子がトーリック因子となる。その特

異点を特殊なものから一般化したものの順に並べると次のようになる

(i) 一般次元のヒルベルト・モジュラーカスプ特異点(Hirzebruch, Ehlers).

(ii) ある種の$\mathbb{Q}$-階数1の数論的多様体のカスプ特異点(佐武).

(iii) 土橋(Tsuchihashi)カスプ特異点.

(4) $A=(a_{ij})\in SL_r(\mathbb{Z})$, $a_{ij}>0$ $\forall i,j$ なる行列 A から $\pi_1(X)=\mathbb{Z}$ なるコンパクト複素多様体を構成することが出来る。この X に対し自然に定まる反標準因子がトーリック因子となっている。$r=2$ の場合 X は双曲型井上曲面であり、反標準因子は互いに双対な2つのヒルベルト・モジュラー曲面のカスプ特異点の例外因子の交わりなる和である。3次元の X の例について加藤昌英氏の研究がある。

同じ次元の2つのトーリック因子 (V,D), (V',D') の<u>正則写像</u> $f:(V',D')\to(V,D)$ を複素多様体の固有正則写像 $f:V'\to V$ で $f^{-1}(D)=D'$ かつ f の $V'\setminus D'$ への制限が不分岐被覆となっていることとする。特に $V'\setminus D'\simeq V\setminus D$ 同型の時 f を<u>双有理型</u>ということにする。但しトーリック因子の近傍である V 又は V' は自由に小さい近傍に取り換

えて良いものとする。トーリック多様体の場合は、それに球面の単体分割が対応したが、トーリック因子の場合は正規交叉しか持たないので双対グラスを持つがそれは位相多様体の単体分割になっている。そして双有理型の正則写像はこの位相多様体の単体分割の細分を引き起こす。

2つのトーリック因子 (V_1, D_1) 及び (V_2, D_2) に対し、トーリック因子 $(\tilde{V}, \tilde{D})$ と双有理正則写像 $f_1 : (\tilde{V}, \tilde{D}) \to (V_1, D_1)$, $f_2 : (\tilde{V}, \tilde{D}) \longrightarrow (V_2, D_2)$ が存在する時、(V_1, D_1) と (V_2, D_2) は双有理型同値と定義する。

トーリック因子の双有理型不変量として次の2つの面白そうな量がある。

(1) Ehlers-佐武の χ_∞

(2) 尾形の $\zeta(0)$

<u>Ehlers-佐武の χ_∞</u> (V, D) を r 次元のトーリック因子で V がコンパクトである時 $\chi_\infty = T(c_1, \cdots, c_r) - T(\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_r)$ で定義する。ここで T は Todd 多項式で $c_1, \cdots, c_r$ は V のチャーン類、$\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_r$ は V の D に関する対数的チャーン類である。$D = \cup D_i$ を既約分解とし $\hat{c}_i = [D_i] \in H^2(V, \mathbb{Z})$ を因子 D_i のコホモロジー類とするとき、次の χ_∞ の交点数による表示がある。

定理（Ehlers, 佐武）

$$\chi_\infty = \left[\prod_i \frac{\delta_i}{1-e^{-\delta_i}}\right]_r \in H^{2r}(V, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$$

この式は D の近傍だけでも意味を持つので，V がコンパクトでない時はこれをトーリック因子の χ_∞ と定義する。トーリック多様体 $(\Sigma(\Delta), D(\Delta))$ に対してはリーマン・ロッホの一般式より $\chi_\infty = 1$ となるが，これを用いることによりこの定義で χ_∞ が双有理型不変であることが示せる。

尖形の $\zeta(0)$　トーリック因子の例の所で挙げた土橋カスプ特異点は $N_{\mathbb{R}}$ の凸開錐体 C と C を不変にするある部分群 $\Gamma \subset GL(N)$ の組で C は直線を含まず $N_{\mathbb{R}}$ の扇 Σ が存在して条件

(1) $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = C \cup \{0\}$,

(2) Σ は Γ-不変，つまり $\forall g \in \Gamma$ に対し $\{g\sigma ; \sigma \in \Sigma\} = \Sigma$,

(3) Γ の $\Sigma \setminus \{0\}$ への作用は自由で，$(\Sigma \setminus \{0\})/\Gamma$ は有限，但し 0 は錐 $\{0\}$,

を満たす時に定義される。その作り方はここでは述べないが，それに対するゼータ関数 $Z(C, \Gamma; s)$ が次のように定

義される。

C^* を $N_{\mathbb{R}}$ の双対実ベクトル空間 $N_{\mathbb{R}}^*$ に定義された C の双対錐とした時 C の特性関数 $\phi_C : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が

$$\phi_C(x) = \int_C \exp(-\langle x, x^* \rangle)\, dx^*$$

で定義される。ϕ_C は C の境界で無限大に近づき，内部の無限遠で 0 に近づく C^∞ 級の関数である。そこでゼータ関数はこの特性関数を用いて

$$Z(C, \Gamma; s) = \sum_{x \in (N \cap C)/\Gamma} \phi_C(x)^s$$

と定義される。これは複素変数 s が $\mathrm{Re}\, s > 1$ である範囲で広義一様収束し全複素平面に有理型関数として拡張される。

この土橋カスプ特異点のゼータ関数の零値（$\zeta(0)$ と略記）について次の公式がある。

<u>定理</u>.（尾形）

$$\zeta(0) = Z(C, \Gamma; 0) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \int_\sigma \left[\prod_{x \in \mathrm{gen}\,\sigma} \frac{\partial_x}{1 - e^{-\partial_x}} \right]_{\dim \sigma} \exp(-\phi_C(t)^{-2})\, dt_\sigma$$

但し Σ は $(\tilde{\Sigma} \setminus \{0\})/\Gamma$ の代表系で $\mathrm{gen}\,\sigma$ は非特異錐 σ の基本生成系，∂_x は x 方向への微分作用素で，積分は各 σ に対し原点と $\mathrm{gen}\,\sigma$ で生成される平行体の体積を 1 として行な

われる。$[\quad]_\alpha$ は微分作用素の巾級数の α 次斉次部分を表わす。

さて一般のトーリック因子に対しても，それに対応する扇の概念を拡張したT-複体（このTは代数的トーラスのことではない）というものを考えることによりゼータ関数を定義しその零値を考えることができる。この場合は特性関数のようなものは存在しないのでゼータ関数自体には自然な定義は無く一意的ではないが $\zeta(0)$ は決められた条件を満たすように作れば，その作り方に依らない一定の値となる。

2次元の場合は§1で述べたように χ_∞ も $\zeta(0)$ も既約因子の自己交点数で簡単に表わされる。また奇数次元の場合は次の結果がある。

定理.（佐武，尾形）$r = \dim V$ が奇数の時

$$\chi_\infty = -\zeta(0) = \frac{1}{2}\left(|\text{双対グラフ}| \text{ のオイラー数}\right)$$

が成り立つ。

この定理により，この2つの不変量が興味深いのは偶数次元の場合ということになる。奇数次元の場合に比べてその扱いははるかに困難になって来る。まだ根拠不足であるが，

次の予想がある。

<u>予想</u>　　$\chi_\infty = -\zeta(0)$.

ヒルベルト・モジュラーカスプ特異点の場合これはヒルツェブルフの予想の1つとして知られているが、この場合もまだ未解決のようである。

また χ_∞ が有理数であることは、その交点数による表現から明らかであるが、$\zeta(0)$ も任意のトーリック因子に対して有理数であることが証明できる。

$\zeta(0)$ の一意性と有理性の証明には非特異完全扇に関する次の等式を用いる。

Δ を $N_{\mathbb{R}}$ の完全扇とするとき次の等式が成り立つ。

$$\sum_{\sigma\in\Delta}\prod_{x\in \mathrm{gen}\,\sigma}\frac{1}{e^x-1} = 0$$

但しここで $N_{\mathbb{R}}$ の元を双対空間 $N_{\mathbb{R}}^*$ の線型関数と見ている。

$r=1$ の場合，$N_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$ で，$\Delta=\{\mathbb{R}_0, -\mathbb{R}_0, \{0\}\}$ 但し $\mathbb{R}_0=\{c\in\mathbb{R}\,;\, c\geqq 0\}$ であるから，この等式は

$$(e^x-1)^{-1} + (e^{-x}-1)^{-1} + 1 = 0$$

という簡単な式を表わす。$x(e^x-1)^{-1}$ の展開式 $\sum B_k x^k/k!$ の係数 B_k はベルヌイ数として知られている。上の式は k が3以上の奇数の時 $B_k=0$ であることを示すために用いられる式である。$r>1$ の場合も Δ に対する等式はベルヌイ数の間の関係式と考えられる。これを T-複体の議論とうまく組み合わせることにより $\zeta(0)$ の一意性と有理性を示すことができる。

文献

M. Demazure, Sous-groups algébrique de rang maximum du group de Cremona, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 3 (1970), 507-588.

F. Ehlers, Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten, Math. Ann. 218 (1975), 127-156.

M. Ishida, T-complexes and Ogata's zeta zero values, preprint.

I. Nakamura, Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities.I, Math. Ann. 252 (1980), 221-235.

S. Ogata, Special values of zeta functions associated to cusp singularities, Tohoku Math. J. 37 (1985), 367-384.

I. Satake, On numerical invariants of arithmetic varieties of Q-rank one, Automorphic forms of several variables, Taniguchi Symp, Katata, 1983, Progress in Math. 46, Birkhäuser, 1984, 353-369.