

放物型複素鏡映群の分類について

九州大学 理学部

北川 正一 (Shoichi Kitagawa)

§ 0 .

ユークリッド空間に働く合同変換群の元 (\neq 恒等変換) で, 超平面を点ごとに固定する, 位数有限なものを鏡映(変換)という. 一般の多様体に対しても, 超平面を超曲面におきかえて, 鏡映を同様に定義できる. また, 鏡映で生成されるような群を鏡映群 (reflection group) と呼ぶ.

鏡映群の分類については, 以下のような歴史がある.

- 1934 (実) 有限鏡映群および結晶群 (Coxeter)
- 1954 有限複素鏡映群 (Shephard - Todd)
- 1978 放物型複素鏡映群 (二次元の場合) (Yoshida - Hattori)
- 1982 複素結晶鏡映群 (二次元の場合) (Tokunaga - Yoshida)
- 1982 複素結晶鏡映群 (Popov)
- 1983 放物型複素鏡映群 (point group が Coxeter group の時)
(Yoshida)

ここでは, 三次元以上の場合で point group が Coxeter group でないような放物型複素鏡映群について分類を行う.

§ 1 .

まず, m 次ユニタリ群 $U(m)$ の元に対し鏡映を定義する.

定義. $w \in U(m)$ が鏡映.

\Leftrightarrow 1) $w \neq$ 単位元かつ, 位数有限.

2) w は 1 を固有値に持ち, その重複度は $m-1$.

このとき, 1 と異なる唯一の固有値を $\mu(w)$, 対応する固有ベクトル (の一つ) を $r(w)$ で表す. $r(w)$ を w のルートと呼ぶ. \square

これは, “超平面を点ごとに固定する位数有限の元” ということを言い換えただけである.

E を複素ユークリッド空間とする. E 上の合同変換群を $M(E)$ と書くと, E の複素次元を m とするとき, $M(E) \cong U(m) \times \mathbb{C}^m$ (半直積) である. $x \in M(E)$ を $x = (w | \beta)$ ($w \in U(m)$, $\beta \in \mathbb{C}^m$) で表す.

定義. $x \in M(E)$, \neq 恒等変換, が位数有限であって, E 内の超平面を点ごとに固定するとき, x を鏡映という. \square

このとき,

$x = (w | \beta)$ が鏡映.

\Leftrightarrow w が鏡映,

& β が w のルート $r(w)$ に平行,

i. e. $\exists k \in \mathbb{C}$ s. t. $\beta = kr(w)$.

であることがわかる.

§ 2.

対象とする群は \mathbb{C}^n 内の超球 (ball) に働く群なのであるが, 表示を見やすくするため, Siegel domain の形で考える.

$V \cong \mathbb{C}^{m+1}$: $(m+1)$ -次元複素ベクトル空間とする. V 内の領域 D を

$$D := \{ (z, u_1, \dots, u_m) \in V ; 2\text{Im } z - \sum |u_j|^2 > 0 \}$$

$$\cong B^{m+1} = \{ (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} ; \sum |z_j|^2 < 1 \}$$

で定義する．自然な埋め込み：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{m+1} & \subset & P^{m+1}(\mathbb{C}) \\ \Psi & & \Psi \\ (z, u_1, \dots, u_m) & \rightarrow & (v_0, \dots, v_{m+1}), \\ z = v_0/v_{m+1}, u_j = v_j/v_{m+1} & (j = 1, \dots, m) & \text{により,} \end{array}$$

$$D = \{ v = (v_0, \dots, v_{m+1}) \in P^{m+1}(\mathbb{C}) ; \bar{v}H^t v > 0 \}$$

と考えられる．ここで， $H = \begin{bmatrix} & & i \\ & -E_m & \\ -i & & \end{bmatrix}$ ， E_m ： m 次単位行列．

従って， D の解析的自己同型群を $\text{Aut}(D)$ と書くとき，
 $\text{Aut}(D) \subset \text{PGL}(m+2, \mathbb{C})$ であって，

$$\text{Aut}(D) \cong \{ G \in \text{GL}(m+2, \mathbb{C}) ; {}^t \bar{G}HG = kH, \exists k > 0 \} / \mathbb{C}^*$$

ただし， $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ ．これから， $\text{Aut}(D)$ の元を $\text{GL}(m+2, \mathbb{C})$ の適当な元により表現できることがわかる．

D は，無限遠直線 $v_{m+1} = 0$ と境界 ∂D 上において一点で交わっている．i.e.

$$\bar{D} \cap \{ (v_0, \dots, v_{m+1}) \in P^{m+1}(\mathbb{C}) ; v_{m+1} = 0 \} = \{ P = (1, 0, \dots, 0) \}$$

定義をいくつか準備する．

定義． $g \in \text{Aut}(D)$ が $P \in \partial D$ を測地線の意味 (geodesic sense) で固定する．

$\Leftrightarrow \forall$ geodesic $l(s)$ s. t. $\lim_{s \rightarrow \infty} l(s) = P$ に対し,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d(l(s), g(l(s))) = 0$$

となる. ここで, $d(\cdot, \cdot)$ は $\text{Aut}(D)$ -invariant metric に関する距離関数を表す. \square

行列の形で書くと,

$g \in \text{Aut}(D)$ が $P = (1, 0, \dots, 0)$ を測地線の意味で固定する.

$$\Leftrightarrow g = \begin{bmatrix} 1 & i\bar{\beta}U & \gamma + \frac{i}{2}\bar{\beta}^t\beta \\ 0 & U & {}^t\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ここで, $U \in U(m)$, $\beta \in \mathbb{C}^m$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

以下, このような形の g を $g = [U, \beta, \gamma]$ と書き,

$$G := \{ g \in \text{Aut}(D) ; g = [U, \beta, \gamma], U \in U(m), \beta \in \mathbb{C}^m, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

とおく.

正数 N に対し, D の部分領域 $D(N)$ を

$$D(N) := \{ (z, u_1, \dots, u_m) \in V ; 2\text{Im } z - \sum |u_j|^2 > N \}$$

で定義する.

定義. $\Gamma \subset G$: discrete subgroup とする.

Γ は ($P = (1, 0, \dots, 0)$ のまわりで,) 局所的に体積有限.

\Leftrightarrow 十分大きな $N (> 0)$ に対し, 商空間 $D(N)/\Gamma$ の

($\text{Aut}(D)$ -不変な測度に関する)体積が有限になる. \square

§ 3.

分類を目標としている群は，局所的に体積有限な G の離散部分群で鏡映で生成されているものである．以下，これを放物型鏡映群と呼ぶことにする．まず， G の元に対して，鏡映を定義する必要がある． D は射影空間内の領域と考えられるから， D 内の超平面なるものを考えることができる．

定義. $x \in G$ が鏡映(reflection)．

$\Leftrightarrow x (\neq 1)$ は位数有限で， D 内の超平面を点ごとに固定する． \square

この条件は次のように書き換えられる．

$x = [w, \beta, \gamma] \in G$ が鏡映．

$\Leftrightarrow (w | \beta)$ が鏡映 (§ 1)，

$$\& \quad \gamma = \frac{i \bar{\beta}^t \beta}{2} \frac{\mu(w) + 1}{\mu(w) - 1} .$$

実は，分類される群のなかに現れる鏡映の位数は 2, 3, 4 または 6 に限られることが(結晶群の分類から)わかっている． w の位数と γ の関係をまとめると次のようになる．

w の位数	2	3	4	6
$\mu(w)$	-1	ω	i	$1 + \omega$
γ	0	$ \beta ^2/2\sqrt{3}$	$ \beta ^2/2$	$\sqrt{3} \beta ^2/2$

放物型鏡映群の構造を明らかにするために必要となる 結晶群 (crystallographic group) について述べる．

定義. $G_0 \subset M(E)$: 離散部分群とする．

G_0 が結晶群．

$\Leftrightarrow E/G_0$: compact. \square

放物型鏡映群と結晶群の関係については次の命題が重要.

$$\pi_*: \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & M(\mathbf{E}) \\ \cup & & \cup \\ [U, \beta, \gamma] & \rightarrow & (U | \beta) \end{array} \text{ と定義する.}$$

命題. $\Gamma \subset G$: 局所的に体積有限な G の離散部分群.

$\Rightarrow \pi_*(\Gamma)$: 結晶群で,

$$\ker(\pi_* | \Gamma) = (\Gamma \text{ の center } Z(\Gamma)) (\cong \mathbf{Z}).$$

$$(1 \rightarrow Z(\Gamma) \rightarrow \Gamma \rightarrow \pi_*(\Gamma) \rightarrow 1) \quad [1]$$

Γ の center $Z(\Gamma)$ は,

$$Z(\Gamma) = \{ [E, 0, \gamma] ; \gamma \in q(\Gamma)\mathbf{Z} \}$$

と書ける. ここで, E : 単位行列,

$$q(\Gamma) = \inf\{|\gamma|; [E, 0, \gamma] \in \Gamma, \gamma \neq 0\}.$$

$$q_0 := \inf\{(|2\text{Im } \overline{\beta}^t \beta'|; \beta, \beta' \in L) - \{0\}\} \text{ に対し,}$$

$$\exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } q(\Gamma) = q_0/n \text{ となる.}$$

また, Bieberbach の定理より,

$$L := \pi_*(\Gamma) \cap \{ (E | \beta) \in M(\mathbf{E}); \beta \in \mathbf{C}^m \}$$

とおくと, L は rank m の lattice になり, $\pi_*(\Gamma)/L$ は有限群となる. i. e.

$$1 \rightarrow L \rightarrow \pi_*(\Gamma) \rightarrow W \rightarrow 1, \quad \#W < \infty.$$

このとき, W を $\pi_*(\Gamma)$ (または Γ) の点群 (point group) という.

§ 4 .

Γ を局所的に体積有限な G の離散部分群とする . 拡大 :

$$1 \rightarrow Z(\Gamma) \rightarrow \Gamma \rightarrow \pi_*(\Gamma) \rightarrow 1$$

において, Γ が鏡映で生成されているならば, $\pi_*(\Gamma)$ も鏡映で生成されていなければならない . また, 結晶鏡映群についてはその分類が知られている . 従って, 放物型鏡映群を分類するためには, 各結晶鏡映群に対し, それを $\pi_*(\Gamma)$ とするような Γ を構成し, それが鏡映で生成されているかどうか調べればよい .

G の積は,

$$[w_1, \beta_1, \gamma_1][w_2, \beta_2, \gamma_2] = [w_1 w_2, \beta_1 + w_1^t \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2 - \text{Im} \beta_1 w_1^t \beta_2]$$

となっている . $[\cdot, \cdot, *]$ の $*$ の部分を central part と呼ぶ .

今, 簡単のため, 結晶群 $\pi_*(\Gamma)$ は point group と lattice の半直積とすると,

命題. 局所的に体積有限な G の離散部分群 Γ が鏡映で生成されている場合を考える . このとき,

Γ の鏡映はすべて位数 2 .

\Rightarrow central part は $(q_0/2)\mathbb{Z}$ に含まれる .

Γ が位数 3 または 6 の鏡映を含む .

\Rightarrow central part は $(q_0/6)\mathbb{Z}$ に含まれる .

Γ が位数 4 の鏡映を含む .

\Rightarrow central part は $(q_0/4)\mathbb{Z}$ に含まれる . \square

これにより、結晶群を決めると、それを $\pi_*(\Gamma)$ とするような放物型複素鏡映群 Γ の center の可能性は、それほど多くないことがわかる。

完全列： $1 \rightarrow Z(\Gamma) \rightarrow \Gamma \rightarrow \pi_*(\Gamma) \rightarrow 1$ に注目する。 Γ は section $s: \pi_*(\Gamma) \rightarrow \Gamma$, $\pi_* \circ s = \text{id}_{\pi_*(\Gamma)}$ により記述できる。

これは、 Γ の生成元について定めてやればよい。結晶群とそれに対する可能な center を選び、取り得る section の値総てに対し、それぞれの場合に Γ が鏡映で生成されているかどうか調べるという作業を、分類されている結晶群総てにわたって行うと（特別な群に対しては他にも注意しなければならない条件もあるが）、

定理. $\Gamma: P$ を測地線の意味で固定する、局所的に体積有限な離散群とする。鏡映で生成されている Γ を $(\text{Aut}(D)-)$ 共役を除いて分類すると表の結果を得る。

直ちに従うこととして、

系. $\forall K$: 結晶鏡映群に対し、

$\exists \Gamma_0$: 放物型鏡映群

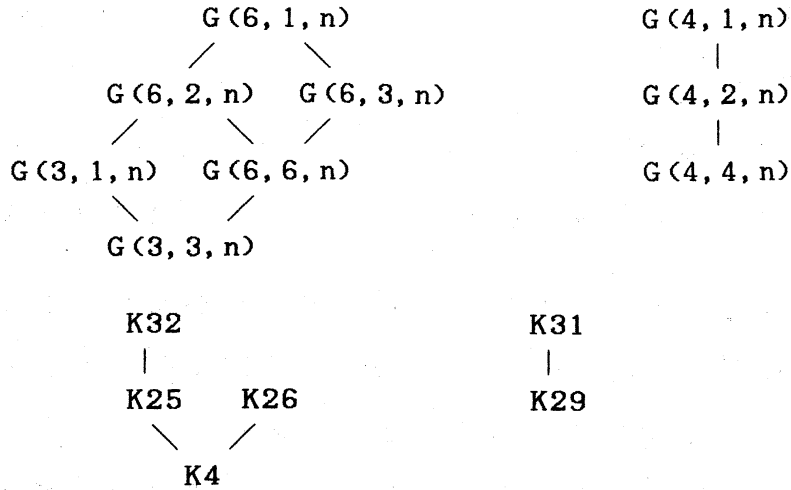
s. t. $\pi_*(\Gamma) = K$ なる $\forall \Gamma$: 放物型鏡映群は Γ_0 の部分群.

さらに、 $K = W \times L \Rightarrow \Gamma_0 = W \times L(\Gamma_0)$.

系. W, W' : Γ, Γ' の点群とする.

$W < W' \Rightarrow \exists g \in \text{Aut}(D)$ s. t. $g^{-1}\Gamma g < \Gamma'$.

注意. 有限複素鏡映群のあいだには次のような包含関係がある.



表について.

結晶群と放物型鏡映群の表.

Point Group は有限鏡映群であり, Roots 欄の各ベクトルをルートとするような鏡映により生成されている.

ルートに対する()内の数字は対応する鏡映の位数を表す. 何も書いてない場合は位数が2であることを示す. 例えば,

$$\beta_1 = e_1 \quad (3)$$

は, β_1 をルートとする鏡映の位数が3であることを表している.

e_j は \mathbb{C}^n の標準的基底を表す. i.e. $e_j = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)$.

q_0 については § 3 参照.

center 欄は center の central part (§ 4) を表示する.

r_j は, β_j をルートとする鏡映(unitary reflection) を表す.

Crystallographic reflection groups

(Point Group) \times (Lattice)		
Point Group	Lattice	Roots
(Dimension $n \geq 2$)		
G(3, 1, n)	$L_1 = (\mathbf{Z} + \omega \mathbf{Z}) \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1 + \sum_{j=2}^n (\mathbf{Z} + \omega \mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = e_1$ (G(3, 1, n) \rightarrow ③) (G(4, 1, n) \rightarrow ④) (G(6, 1, n) \rightarrow ⑥) $\beta_j = \frac{e_{j-1} - e_j}{\sqrt{2}}$ ($j = 2, \dots, n$)
	$L_2 = (\mathbf{Z} + \omega \mathbf{Z}) \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1 + \sum_{j=2}^n (\mathbf{Z} + \omega \mathbf{Z}) \frac{2\omega+1}{3} \beta_j$	
G(4, 1, n)	$L_1 = (\mathbf{Z} + i \mathbf{Z}) \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1 + \sum_{j=2}^n (\mathbf{Z} + i \mathbf{Z}) \beta_j$	
	$L_2 = (\mathbf{Z} + i \mathbf{Z}) \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1 + \sum_{j=2}^n (\mathbf{Z} + i \mathbf{Z}) \frac{1+i}{2} \beta_j$	
G(6, 1, n)	$L = (\mathbf{Z} + \omega \mathbf{Z}) \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1 + \sum_{j=2}^n (\mathbf{Z} + \omega \mathbf{Z}) \beta_j$	
(Dimension $n \geq 3$)		
G(3, 3, n)	$L = \sum_{j=1}^n (\mathbf{Z} + \omega \mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{\omega e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$
G(4, 4, n)	$L = \sum_{j=1}^n (\mathbf{Z} + i \mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{i e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$
G(6, 6, n)	$L = \sum_{j=1}^n (\mathbf{Z} + \omega \mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{(1+\omega) e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$
G(m, m, n) $m = 3, 4, 6$		$\beta_j = \frac{e_{j-1} - e_j}{\sqrt{2}}$ ($j = 2, \dots, n$)

(Point Group) \times (Lattice)		
Point Group	Lattice	Roots
(Dimension $n \geq 2$)		
G(4, 2, n-1)	$L_1 = \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{i e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$
	$L_2 = \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \beta_j + (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_n$	
G(4, 2, 2)	$L_3 = (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \beta_1 + (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z})(1+i) \beta_2$	$\beta_3 = -e_2$
G(6, 2, n-1)	$L_1 = \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{(1+\omega) e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$
G(6, 2, 2)	$L_2 = (\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z}) \beta_1 + (\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z})(2+\omega) \beta_2$	$\beta_3 = -e_2$ (③)
G(6, 3, n-1)	$L_1 = \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{(1+\omega) e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$
G(6, 3, 2)	$L_2 = (\mathbf{Z} + 2\omega\mathbf{Z}) \beta_1 + (2\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z}) \beta_2$	$\beta_3 = -e_2$
G(m, p, n-1)	$(m, p) = (4, 2), (6, 2), (6, 3).$	$\beta_j = \frac{e_{j-1} - e_j}{\sqrt{2}}$ ($j = 2, \dots, n-1$) $\beta_n = -e_{n-1}$ (G(6, 2, n-1) \rightarrow ③)

Point Group	Lattice	Roots
(Dimension = 2)		
K 4	$L = \sum_{j=1}^2 (Z + \omega Z) \beta_j$	$\beta_1 = e_1 \quad (3)$ $\beta_2 = \frac{1-\omega}{3} \sum_{j=1}^3 e_j \quad (3)$
K 5	$L = (Z + \omega Z) \beta_1 + (Z + \omega Z) \sqrt{2} \beta_2$	$\beta_1 = e_1 \quad (3)$ $\beta_2 = \frac{1-\omega}{3} (\sqrt{2} e_1 + e_2) \quad (3)$
K 8	$L = \sum_{j=1}^2 (Z + i Z) \beta_j$	$\beta_1 = e_1 \quad (4)$ $\beta_2 = \frac{1-i}{2} (e_1 - e_2) \quad (4)$
K 12	$L = \sum_{j=1}^2 (Z + i \sqrt{2} Z) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1+i}{2} e_2$ $\beta_2 = \frac{2 + (\sqrt{2}-2)i}{4} e_1$ $\quad + \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4} e_2$ $\beta_3 = \frac{1-i}{2} e_1 - \frac{i}{\sqrt{2}} e_2$
(Dimension = 3)		
K 24	$L = \sum_{j=1}^3 (Z + \eta Z) \beta_j$ $(\eta = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2})$	$\beta_1 = e_2$ $\beta_2 = \frac{1-\eta}{2} (e_2 + e_3)$ $\beta_3 = \frac{-e_1 - e_2 + \eta e_3}{2}$
K 25	$L = \sum_{j=1}^3 (Z + \omega Z) \beta_j$	$\beta_1 = e_3 \quad (3)$ $\beta_2 = \frac{1-\omega}{3} \sum_{j=1}^3 e_j \quad (3)$ $\beta_3 = -\omega e_2 \quad (3)$
K 26	$L_1 = \sum_{j=1}^2 (Z + \omega Z) \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_j + (Z + \omega Z) \beta_3$	$\beta_1 = \frac{2+\omega}{3} \sum_{j=1}^3 e_j \quad (3)$ $\beta_2 = e_2 \quad (3)$
	$L_2 = \sum_{j=1}^2 (Z + \omega Z) \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_j + (Z + \omega Z) \frac{2\omega+1}{3} \beta_3$	$\beta_3 = \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}}$

Point Group	Lattice	Roots
(Dimension = 4)		
K 29	$L = \sum_{j=1}^4 (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{e_2 - e_4}{\sqrt{2}}$ $\beta_2 = \frac{-i e_2 - e_3}{\sqrt{2}}$ $\beta_3 = \frac{-e_3 + e_4}{\sqrt{2}}$
K 31	$L = \sum_{j=1}^4 (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_4 = \frac{-1+i}{2\sqrt{2}} \sum_{j=1}^4 e_j$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $\beta_5 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e_4 \quad (\text{K 31})$
K 32	$L = \sum_{j=1}^4 (\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = e_3 \quad (\text{③})$ $\beta_2 = \frac{1-\omega}{3} \sum_{j=1}^3 e_j \quad (\text{③})$ $\beta_3 = -\omega e_2 \quad (\text{③})$ $\beta_4 = \frac{1+2\omega}{3} (e_1 - e_2 - e_4) \quad (\text{③})$
(Dimension = 5, 6)		
K 33	$L = \sum_{j=1}^5 (\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z}) \beta_j$	$\beta_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} (e_5 + e_6)$ $\beta_2 = \frac{\omega}{2\sqrt{2}} (e_1 - (1+2\omega)e_2 - \sum_{j=3}^6 e_j)$ $\beta_k = \frac{e_{k-2} - e_{k-1}}{\sqrt{2}} \quad (k = 3, 4, 5)$
K 34	$L = \sum_{j=1}^6 (\mathbf{Z} + \omega\mathbf{Z}) \beta_j$	<hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $\beta_6 = -\frac{1+\omega}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{j=1}^3 e_j + (1+2\omega)e_4 + e_5 - e_6 \right) \quad (\text{K 34})$

Point Group	Lattice	Generators	Group
$G(4, 2, n-1)$	$L_1 = \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \beta_j$	$(r_j 0)$ $(r_j \beta_j)$ $(r_j i\beta_j)$ $(j = 1, \dots, n-1)$ $(r_n \frac{\beta_n}{\sqrt{2}})$	$[G(4, 2, n-1), L_1] \cdot$
$K12$	$L = \sum_{j=1}^2 (\mathbf{Z} + i\sqrt{2}\mathbf{Z}) \beta_j$	$(r_1 0), (r_2 0)$ $(r_1 \beta_1)$ $(r_2 \beta_2)$ $(r_1 i\sqrt{2}\beta_1)$ $(r_2 i\sqrt{2}\beta_2)$ $(r_3 \frac{i}{\sqrt{2}} \beta_3)$	$[K12, L] \cdot$
$K31$	$L = \sum_{j=1}^4 (\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}) \beta_j$	$(r_j 0)$ $(r_j \beta_j)$ $(r_j i\beta_j)$ $(j = 1, \dots, 4)$ $(r_n \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta_n)$	$[K31, L] \cdot$

Parabolic Reflection Groups

Crystallographic Group	q_0	Center	Sections (Generators)
$G(3, 1, n) \times L_1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbb{Z}$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{1}{4\sqrt{3}}]$
		$\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbb{Z}$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{1}{4\sqrt{3}}]$
			$[r_1, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{3}} \beta_1, \frac{1}{4\sqrt{3}}]$
$G(3, 1, n) \times L_2$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbb{Z}$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{1}{4\sqrt{3}}]$
$G(4, 1, n) \times L_1$	1	$\frac{1}{4} \mathbb{Z}$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, 0]$
			$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, 0]$
		$\frac{1}{2} \mathbb{Z}$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{1}{4}]$
			$[r_1, 0, \frac{1}{4}]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{1}{4}]$
		\mathbb{Z}	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, 0]$
			$[r_1, 0, \frac{1}{4}]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{1}{4}]$

Crystallographic Group	q_0	Center	Sections (Generators)
$G(4, 1, n) \times L_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, 0]$
		$\frac{1}{2} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{1}{4}]$
$G(6, 1, n) \times L_2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, 0]$
		$\frac{\sqrt{3}}{4} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, 0]$
$G(m, 1, n) \times L$ ($m = 3, 4, 6$)			$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, x\beta_j, 0]$ $[r_j, x\xi\beta_j, 0]$ ($j = 2, \dots, n$) ($x = 1, \frac{2\omega+1}{3}$ or $\frac{1+i}{2}$) ($\xi = i$ or ω)
$G(3, 3, n) \times L$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$
$G(4, 4, n) \times L$	1	Z	$[r_j, \xi\beta_j, 0]$ ($j = 1, \dots, n$)
$G(6, 6, n) \times L$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} Z$	($\xi = i$ or ω)

Crystallographic Group	q_0	Center	Sections (Generators)
$G(4, 2, n-1) \times L_1$	1	$\frac{1}{2} Z$	$[r_n, 0, 0]$ $[r_n, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$ $[r_n, \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$
		Z	$[r_n, 0, 0]$ $[r_n, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta_n, \frac{1}{2}]$ $[r_n, \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \beta_n, \frac{1}{2}]$
			$[r_n, 0, \frac{1}{2}]$ $[r_n, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$ $[r_n, \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$
$G(4, 2, n-1) \times L_2$	1	$\frac{1}{2} Z$	$[r_n, 0, 0]$ $[r_n, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$ $[r_n, \frac{i}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$
		Z	$[r_n, 0, 0]$ $[r_n, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$ $[r_n, \frac{i}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$
			$[r_n, 0, \frac{1}{2}]$ $[r_n, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$ $[r_n, \frac{i}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$

Crystallographic Group	q_0	Center	Sections (Generators)
$G(6, 2, n-1) \times L_1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbb{Z}$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{1}{4\sqrt{3}}]$
		$\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbb{Z}$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_1, \frac{3}{4\sqrt{3}}]$
			$[r_1, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ $[r_1, \frac{1}{\sqrt{3}} \beta_1, \frac{1}{4\sqrt{3}}]$
$G(6, 3, n-1) \times L_1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \mathbb{Z}$	$[r_n, 0, 0]$ $[r_n, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$ $[r_n, \frac{\omega}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$
		$\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbb{Z}$	$[r_n, 0, 0]$ $[r_n, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_n, \frac{\sqrt{3}}{4}]$ $[r_n, \frac{\omega}{\sqrt{2}} \beta_n, \frac{\sqrt{3}}{4}]$
			$[r_n, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}]$ $[r_n, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$ $[r_n, \frac{\omega}{\sqrt{2}} \beta_n, 0]$
$G(m, p, n-1) \times L_1$ $(m, p) = (4, 2), (6, 2), (6, 3)$			$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, \zeta \beta_j, 0]$ $(j = 1, \dots, n-1)$ $(\zeta = i \text{ or } \omega)$

Crystallographic Group	q_0	Center	Sections (Generators)
$G(4, 2, 2) \times L_3$	2	Z	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \beta_1, 0]$ $[r_1, i \beta_1, 0]$ $[r_2, 0, 0]$ $[r_2, (1+i) \beta_2, 0]$ $[r_2, (-1+i) \beta_2, 0]$ $[r_3, 0, 0]$ $[r_3, \sqrt{2} \beta_3, 0]$ $[r_3, \sqrt{2} i \beta_3, 0]$
$G(6, 2, 2) \times L_2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \beta_1, 0]$ $[r_1, \omega \beta_1, 0]$ $[r_2, 0, 0]$ $[r_2, (2+\omega) \beta_2, 0]$ $[r_2, (-1+\omega) \beta_2, 0]$ $[r_3, 0, 0]$ $[r_3, \frac{2+\omega}{\sqrt{2}} \beta_3, \frac{\sqrt{3}}{4}]$
$G(6, 3, 2) \times L_2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \beta_1, 0]$ $[r_1, 2\omega \beta_1, 0]$ $[r_2, 0, 0]$ $[r_2, 2\beta_2, 0]$ $[r_2, \omega \beta_2, 0]$ $[r_3, 0, 0]$ $[r_3, \sqrt{2} \beta_3, 0]$ $[r_3, \sqrt{2} \omega \beta_3, 0]$

Crystallographic Group	q_0	Center	Sections (Generators)
$K 4 \times L$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \beta_1, \frac{1}{2\sqrt{3}}]$ $[r_2, 0, 0]$ $[r_2, \beta_2, \frac{1}{2\sqrt{3}}]$
$K 5 \times L$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \beta_1, \frac{1}{2\sqrt{3}}]$ $[r_2, 0, 0]$ $[r_2, \sqrt{2}\beta_2, 0]$
$K 8 \times L$	1	$\frac{1}{2} Z$	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \beta_1, 0]$ $[r_2, 0, 0]$ $[r_2, \beta_2, 0]$
		Z	$[r_1, 0, 0]$ $[r_1, \beta_1, \frac{1}{2}]$ $[r_2, 0, 0]$ $[r_2, \beta_2, \frac{1}{2}]$
$K 12 \times L$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, i\sqrt{2}\beta_j, 0]$ $(j = 1, 2, 3)$

Crystallographic Group	q_0	Center	Sections (Generators)
$K 2 4 \times L$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, \eta \beta_j, 0]$ $(j = 1, 2, 3)$
$K 2 5 \times L$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, \frac{1}{2\sqrt{3}}]$ $(j = 1, 2, 3)$
$K 2 6 \times L_1$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_j, \frac{1}{4\sqrt{3}}]$ $(j = 1, 2)$ $[r_3, 0, 0]$ $[r_3, \beta_3, 0]$ $[r_3, \omega \beta_3, 0]$
$K 2 6 \times L_2$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_j, \frac{1}{4\sqrt{3}}]$ $(j = 1, 2)$ $[r_3, 0, 0]$ $[r_3, \frac{2\omega+1}{3} \beta_3, 0]$ $[r_3, \frac{2+\omega}{3} \beta_3, 0]$

Crystallographic Group	q_0	Center	Sections (Generators)
$K 2 9 \times L$	1	Z	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, i \beta_j, 0]$ $(j = 1, \dots, 4)$
$K 3 1 \times L$	1	$\frac{1}{2} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, i \beta_j, 0]$ $(j = 1, \dots, 5)$
$K 3 2 \times L$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, \frac{1}{2\sqrt{3}}]$ $(j = 1, \dots, 4)$
$K 3 3 \times L$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, \omega \beta_j, 0]$ $(j = 1, \dots, 5)$
$K 3 4 \times L$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} Z$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, \omega \beta_j, 0]$ $(j = 1, \dots, 6)$

Crystallographic Group	q0	Center	Generators
$[G(4, 2, n-1), L_1] \cdot$ ($n \geq 3$)	1	\mathbb{Z}	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, i\beta_j, 0]$ ($j = 1, \dots, n-1$) $[r_n, \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_n, 0]$ $[r_n, \frac{i}{\sqrt{2}}\beta_n, 0]$ $[r_n, -\frac{i}{\sqrt{2}}\beta_n, 0]$
$[K 1 2, L] \cdot$	1	$\frac{1}{2} \mathbb{Z}$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, i\sqrt{2}\beta_j, 0]$ ($j = 1, 2$) $[r_3, \frac{i}{\sqrt{2}}\beta_3, 0]$ $[r_3, \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}}\beta_3, 0]$ $[r_3, \frac{3i}{\sqrt{2}}\beta_3, 0]$
$[K 3 1, L] \cdot$	1	$\frac{1}{2} \mathbb{Z}$	$[r_j, 0, 0]$ $[r_j, \beta_j, 0]$ $[r_j, i\sqrt{2}\beta_j, 0]$ ($j = 1, \dots, 4$) $[r_5, \frac{1+i}{2}\beta_5, 0]$ $[r_5, \frac{-1+i}{2}\beta_5, 0]$ $[r_5, \frac{1-i}{2}\beta_5, 0]$

References

- [1] N. Bourbaki, *Groups et Algèbres de Lie* ch. 4,5 et 6, Hermann Paris (1968).
- [2] A.M. Cohen, *Finite complex reflection groups*, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 9 (1976), 379-436.
- [3] H.S.M. Coxeter, *Discrete groups generated by reflections*, *Ann. Math.* 35 (1934), 588-621.
- [4] H.S.M. Coxeter, *Finite groups generated by unitary reflections*, *Abh. a.d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg*, 31 (1967), 125-135.
- [5] H.S.M. Coxeter, *Regular complex polytopes*, Cambridge Univ. Press (1974).
- [6] J. Kaneko, S. Tokunaga and M. Yoshida, *Complex crystallographic groups II*, *J. Math. Soc. Japan*, 34 (1982), 595-605.
- [7] I. I. Piatetskii-Shapiro, *Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains*, Gordon and Breach, New York (1969).
- [8] V.L. Popov, *Discrete complex reflection groups*, *comm. math. Ins. r. Utrecht*, 15 (1982).
- [9] G.C. Shephard, *Unitary groups generated by reflections*, *Canad. J. Math.* 5 (1953), 364-383.
- [10] G.C. Shephard and J.A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, *Canad. J. Math.* 6 (1954), 274-304.
- [11] S. Tokunaga and M. Yoshida, *Complex crystallographic groups I*, *J. Math. Soc. Japan*, 34 (1982), 581-593.

- [12] M. Yoshida, Discrete reflection groups in the parabolic subgroup of $SU(n,1)$ and generalized Cartan matrices of Euclidean type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 30 (1983), 25-52.
- [13] M. Yoshida, Local theory of Fuchsian systems with certain discrete monodromy groups I, Funkcial Ekvac, 21 (1978), 105-137.
- [14] M. Yoshida and S. Hattori, Local theory of Fuchsian systems with certain discrete monodromy groups III, Funkcial Ekvac, 22 (1979), 1-40.
- [15] J.A. Wolf, Spaces of Constant Curvature, MacGraw-Hill, New York (1967).