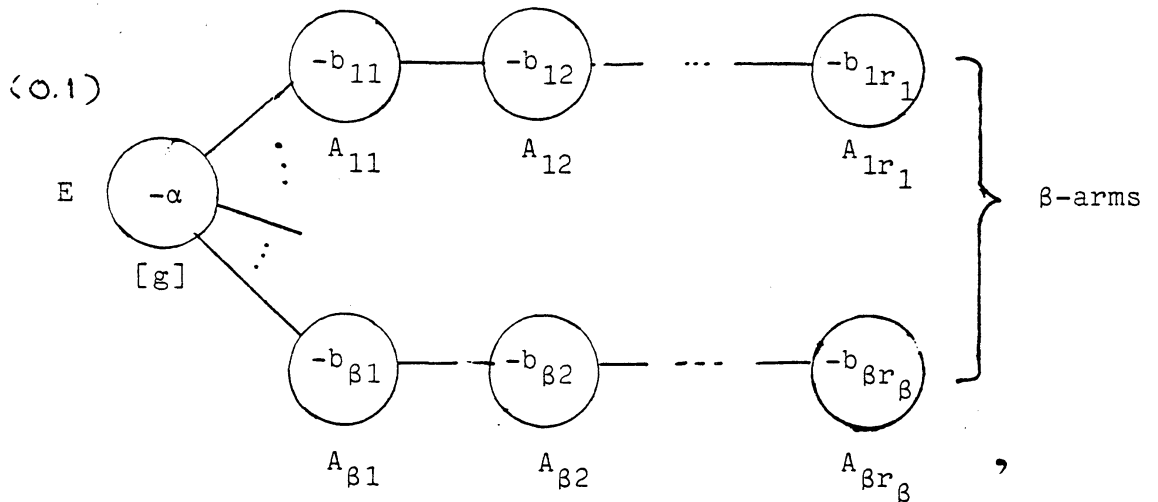


"Star-shaped" resolution をもつ 2次元
 正規 特異点 について

京大 数理解研 泊 昌孝
 (TOMARI MASATAKA)
 東海大 理 渡辺 敬一
 (WATANABE KEI-ICHI)

序

(W, w) が " \mathbb{C}^* -action をもつ" 2次元 normal singularity
 のとき, (W, w) の resolution の dual graph は下記のよう
 に, "star-shaped" である。



逆に, ある 2次元 normal singularity が "star-shaped"
 dual graph で表される resolution をもつたとする。このと
 き, この "graph" (中心の curve E , B と v の normal bundle の
 analytic な構造 B と v , $A_{11}, \dots, A_{\beta 1}$ と E との交点を指定した

精密な意味でのものを、以下 "graph" と云う事にする) に対して、2次元 normal graded ring R が定まる。(Pinkham [12], [17] 参照)。この R と元の特異点 (W, w) は何らかの関係をもつと予想される。また、 R のいろいろな性質は、かなり良くわかっている (例えば、 R がいつ Gorenstein になるか? は [17] でわかっている)。そこで我々は次のような問題を考えてみる。

問題 1. (W, w) は R の flat deformation として得られるか? また、得られない時は何が obstruction となっているか? (W, w) がどの位 "良い" 特異点であれば、 R の flat deformation になっていると保証できるか?

問題 2. "star-shaped" resolution をもつ 2次元 normal singularity を環論的に特徴づける。

問題 3. (W, w) が Gorenstein $\Leftrightarrow R$ が Gorenstein は成立するか? 又、逆はどうか? (W, w) が Gorenstein かどうかを (W, w) の "graph" だけで判定できるか?

これらの問題を解くために、 $\mathcal{O}_{W, w}$ 上の filtration を考える。即ち、 $\psi: \tilde{X} \rightarrow W$ を resolution (star-shaped dual graph をもつ)、 E を $\psi^{-1}(w)$ の "central curve" とするとき、 $F^k(\mathcal{O}_{W, w}) = \{ f \in \mathcal{O}_{W, w} \mid \psi^*(f) \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE) \} = \psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-kE))_w$

と定義するとき.

定理 1. $G = G(\mathcal{O}_{w,w}) = \bigoplus_{k \geq 0} F^k(\mathcal{O}_{w,w}) / F^{k+1}(\mathcal{O}_{w,w})$ は自然に R の subring と思え、 R/G は finite length となる。特に、 G の normalization が R であり、 $\dim_{\mathbb{C}} R/G = p_g(R) - p_g(\mathcal{O}_{w,w})$ となる。ただし、 $p_g(\mathcal{O}_{w,w}) = \dim R'_{1/2}(\mathcal{O}_{\tilde{X}})_w$ [16] とする。

特に、 $\mathcal{O}_{w,w}$ は deformation ((1.2) 参) と normalization を通じて R と結ばれる。そして、 $\mathcal{O}_{w,w}$ が R の p_g -constant flat deformation で得られる事は、 $p_g(\mathcal{O}_{w,w}) = p_g(R)$ となる事と同値である。

例えば、 $a(R) \leq 1$ となる R (又は "graph" Γ) については、常に $p_g(R) = p_g(\mathcal{O}_{w,w})$ が成立する事がわかる (1.13). ($a(R)$ は [6], [17] 参照)。

定理 2. ある 2次元 normal singularity $\mathcal{O} / k = \bar{k}, \text{ch}(k) = 0$ が "star-shaped resolution" をもつためには、 \mathcal{O} 上に filtration $\{F^k\}_{k \geq 0}$ で、 $G(\mathcal{O}) = \bigoplus_{k \geq 0} F^k / F^{k+1}$ が isolated singularity をもつ 2次元 graded domain となるものが存在する事が必要十分である。また、 \mathcal{O} が "star-shaped resolution" をもち、cyclic quotient singularity でないとき、この filtration $\{F^k\}$ は上記のものと同じである。

問3 について,

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X}, \psi(w)) & \xrightarrow{\tau} & (X, E) \\
 \psi \searrow & & \swarrow \phi \\
 & & (W, w)
 \end{array}$$

τ : β 本の枝の contraction
 (cf (1.1))
 $E = \phi^{-1}(w)$ の reduced
 structure を入れたもの.

我々は、次を得た(定理(2.3)).

定理 3. 次の条件は同値である。

(1) $\mathcal{O}_{W,w}$ は Gorenstein

(2) R が Gorenstein, かつ, $a = a(R)$ と置くと,

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-aE)) = R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-aE)) \longrightarrow H^1(X-E, \mathcal{O}_X(-aE)) \cong H_m^2(\mathcal{O}_{W,w})$$

($X-E \hookrightarrow X$ より生ずる canonical homomorphism) は単射である。

そして、実際、 $R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-aE)) \longrightarrow H_m^2(\mathcal{O}_{W,w})$ の単射性は本質的である。すなわち、 R が Gorenstein であつて、 $\mathcal{O}_{W,w}$ が Gorenstein でない例が存在する (例(1.15)(iii), 例(2.2)定理(3,9)参照)。§2.83 では、 $R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-RE)) \longrightarrow H_m^2(\mathcal{O}_W)$ の単射性が研究対象となる(定理(1.12)参照)。

(問(2.5))

$\mathcal{O}_{W,w}$ が Gorenstein ならば、 $G=R$ が成立するか? という問

に対してはまだ反例が見つかっていない。 $a(R) \leq 2$ のとき

(命題(2.4)), 及び $\rho_a(\mathcal{O}_{W,w}) = 1$ で $\mathcal{O}_{W,w}$ が Gorenstein/ $k = \bar{k}$, $\text{ch}(k)$

$=0$ のときは $G=R$ となる (定理(3.2))。

以下に於て 上記の結果の略証を与えたい。完全な証明は、目下論文を複製中なので、そちらに委ねたい。

§1. Notation, Giraud の inverse image, fundamental exact sequence.

Notation を以下のよう定める。

(1.1) k : 標数 0 の代数閉体

(A, \mathfrak{m}) : k 上 essentially of finite type の 2 次元 normal local domain

(W, w) : $W = \text{Spec}(A)$, $w = \{\mathfrak{m}\} \in W$.

$\psi: \tilde{X} \rightarrow W$: (W, w) の resolution, exceptional set $\psi^{-1}(w)$ の dual graph は 1 階 - \tilde{r} 目の図の通りとする。

$\tau: \tilde{X} \rightarrow X$: $\psi^{-1}(w)$ の \tilde{r} 枝の部分 (即ち, $A_{11}, \dots, A_{1\tilde{r}}, \dots, A_{\beta p}$) を contract したもの。 X は normal 2 次元 scheme で β 個の cyclic quotient singularity をもつ。 X は高々 rational singularity しかもたないのて、 $\phi: X \rightarrow W$ は projective である。 ([2])
簡単のため、 $\tau(E)$ も同じ E で表わす。

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X}, \psi^{-1}(w)) & \xrightarrow{\tau} & (X, E) \\
 \psi \searrow & & \swarrow \phi \\
 & & (W, w)
 \end{array}$$

$$F^k = F^k(A) = \{f \in A \mid \operatorname{div}_X(\psi^*(f)) \geq kE\} = \psi_*(\mathcal{O}_X(-kE)) \\ = \phi_*(\mathcal{O}_X(-kE)).$$

$$G = G(A) = \bigoplus_{k \geq 0} F^k / F^{k+1},$$

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} F^k(A) \cdot T^k \hookrightarrow A[T].$$

X は高々 *rational singularity* しかたないから, 適当な正整数 N をとると, $-NE$ は X の ample Cartier divisor になる.

従って, $X = \operatorname{Proj}(\mathcal{R})$ と思える. (\mathcal{R} は A 上有限生成で,

G の integral domain であるから, \mathcal{R} は normal である.)

$$\mathcal{O}_X(k) = \widetilde{\mathcal{R}(k)} = \mathcal{O}_X(-kE)$$

$$\operatorname{Proj}(G) \cong E, \quad \mathcal{O}_E(k) = \widetilde{G}(k)$$

(1.2)

$$\mathcal{R}' = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F^k(A) \cdot T^k = \mathcal{R}[T^{-1}] \quad (k < 0 \text{ のとき } F^k(A) = A),$$

$u = T^{-1}$ とおくと, $G = \mathcal{R}'/u\mathcal{R}'$. $c \neq 0 \in k$ に対し, $\mathcal{R}'/(u-c)\mathcal{R}' \cong A$ だから, A は G の flat deformation である. 問題は G を記述する事である. graded rings の一般論により (E.G.A. [7]

III, §2), $M = G_+ = \bigoplus_{k \geq 0} G_k$ とおくと,

$$0 \rightarrow G \rightarrow \bigoplus_{k \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(k)) \rightarrow H_M^1(G) \rightarrow 0 \quad (\text{exact}),$$

$$H_M^2(G) \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^1(E, \mathcal{O}_E(k)).$$

が言える. (ここで, morphism は必ず grading を保つてゐる.)

(1.3) E 上の divisor D を次のように定める.

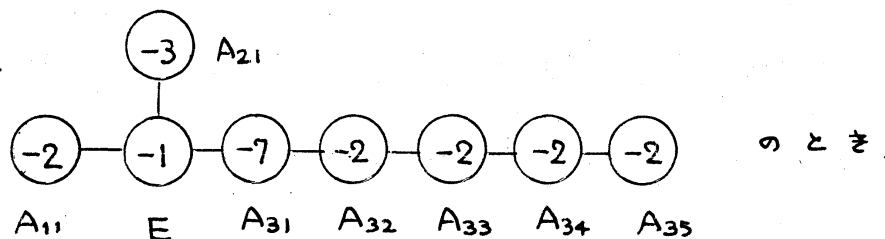
$$D = \mathcal{O} - \sum_{i=1}^p x_i P_i \in \text{Div}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

但し, $P_i = E \cap A_{i1}$, $x_i \in \mathbb{Q}^*$,

$$x_i^{-1} = [l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{ix_i}] = l_{i1} - \frac{1}{l_{i2} - \frac{1}{\dots - \frac{1}{l_{ix_i}}}}$$

(以下, $[b_1, \dots, b_s] = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_s}}}$ で連分数をあらわす事にする。)

(1.4) 例



$$D = \mathcal{O} - \frac{1}{2} P_1 - \frac{1}{3} P_2 - \frac{5}{31} P_3$$

(1.5) "graph" Γ に対して決まる E 上の divisor D

$D = D(\Gamma)$ とするとき,

$$R(\Gamma) = R(E, D) = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(kD)). \quad T^k \hookrightarrow k(E)[T]$$

但し, $H^0(E, \mathcal{O}_E(kD)) = \{f \in k(E) \mid \text{div}_E(f) + kD \geq 0\}$.

ここで,

$$[kD] = \sup \{ M \in \text{Div}(E) \mid M \leq kD \}$$

$$\{kD\} = \inf \{ M \in \text{Div}(E) \mid M \geq kD \}$$

とおくと, $H^0(E, \mathcal{O}_E(kD)) = H^0(E, \mathcal{O}_E([kD]))$,

$$\{kD\} = -[-kD] \quad \text{である.}$$

(1.6) $\tau: \tilde{X} \rightarrow X$ に注目する。 τ の exceptional set は

$B = \bigcup_{i,j} A_{ij}$ (我々は常に (0.1) のグラフを考えているものとする。)

$$\text{Div}(\tau) = \bigoplus_{A_{ij} \subset B} \mathbb{Z} \cdot A_{ij}, \quad \text{Div}(\tau, \mathbb{Q}) = \text{Div}(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

とおく。 $L, M \in \text{Div}(\tilde{X})$ 又は $\text{Div}(\tau, \mathbb{Q})$ に対して、

$$L \geq 0 \iff \forall i, j, A_{ij} \cdot L \leq 0.$$

$$L \geq M \iff L - M \geq 0$$

$$e_{\tau}(L) \in \text{Div}(\tau, \mathbb{Q}), \quad L \cdot A_{ij} = e_{\tau}(L) \cdot A_{ij} \quad (\forall A_{ij} \subset B).$$

(B の交叉行列は負定値だから、かかる $e_{\tau}(L)$ は一意に定まる。 また、 $L \in \text{Div}(\tau, \mathbb{Q})$ のとき、 $L \geq 0 \iff L \leq 0$.)

$F \in \text{Div}(\tau, \mathbb{Q})$ に対して、

$$[F]_G = \inf \{ H \in \text{Div}(\tau) \mid H \geq F \} \quad \text{とおく.}$$

(G は Giraud の頭文字のつもりである。)

$R^1 \tau_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ なのて、次が成立する。

Proposition (1.7) (Giraud の inverse image, [5], § 1)

$M \in \text{Div}(X)$ に対して、次の条件 (*) をみたす組 (\mathcal{L}, u) が ^{一意に} 存在

する。但し、 $\mathcal{L} \in \text{Pic}(\tilde{X})$, $u: \tau_*(\mathcal{L})|_{X-\tau(B)} \cong \mathcal{O}_X(M)|_{X-\tau(B)}$.

$$(*) \quad [e_{\tau}(L)]_G = 0 \quad (\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L), L \in \text{Div}(\tilde{X})).$$

このとき、 $L = M_1 - [e_{\tau}(M_1)]_G$ (M_1 は M の strict transform)

であり、

$$(i) \quad \tau_*(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_X(M), \quad R^1 \tau_*(\mathcal{L}) = 0$$

$$(ii) \mathcal{L} \cong \tau^*(\mathcal{O}_X(M))/(\text{torsion})$$

が成立する。この \mathcal{L} (又は L) を M の "Giraud の逆像" と呼ぶ。

(1.8) Mumford, 酒井は ([13] 参照) $M_1 - e_\tau(M_1)$ を M の逆像としてゐる。 $Z = [M_1 - e_\tau(M_1)] = M_1 - \{e_\tau(M_1)\}$ とおくと, $L \subseteq Z$ であり, Z から L の "computation sequence" $\{Z^{(i)}\}_{i=0}^s$ を使って L を求める事ができる。即ち, $Z^{(0)} = Z$, $Z \cdot A < 0$ なる irred. curve $A \subset B$ が存在するとき, $Z^{(1)} = Z - A$, \dots , $Z^{(i-1)} \cdot A^{(i-1)} < 0$ のとき $Z^{(i)} = Z^{(i-1)} - A^{(i-1)}$, \dots この操作が $Z^{(s)}$ でとまるとき, $L = Z^{(s)}$ である。

Lemma (1.9). 上の記号を使う事にす。各 $i=1, \dots, \beta$ に対し, Z と L の A_{ij}, A_{ix} の係数は一致する。

この証明は省略するが, かなり面倒である。これより, 次が云える。

Cor. (1.10). L_{-k} を $-kE \in \text{Div}(X)$ の Giraud の逆像とするとき, L_{-k} の A_{ij} の係数は

$$-\left\{ \frac{k}{[b_{i1}, \dots, b_{ix}]} \right\} \quad \text{で与えられる } (i=1, \dots, \beta).$$

$$(\text{証明}) \quad e_\tau(E) = - \sum_{i=1}^{\beta} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{1}{\prod_{k=1}^k [b_{ik}, b_{ik+1}, \dots, b_{ix}]} \cdot A_{ij} \right)$$

であり, (1.9) より, L_{-k} の A_{ij} の係数は $-kE - \{e_\tau(-kE)\}$

の係数と一致する。

Lemma. (1.11). P を (0.1) で与えられる "graph",

$D = D(P) \in \text{Div}(E, \mathbb{Q})$ とするとき, (1.1) の記号の下に,

$$\mathcal{O}_X(-kE) / \mathcal{O}_X(-(k+1)E) \cong \mathcal{O}_E([kD]).$$

(証明) D の定義と (1.10) より, $\mathcal{O}_E([kD]) \cong \mathcal{O}_X(L_{-k}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_E$

である。exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(L_{-k} - E) \rightarrow \mathcal{O}_X(L_{-k}) \rightarrow \mathcal{O}_E([kD]) \rightarrow 0$$

の τ の direct image をとる。 $\tau_*(\mathcal{O}_X(L_{-k})) \cong \mathcal{O}_X(-kE)$ は

(1.7) で注意した。 $L_{-k} - E \geq L_{-k-1}$ であり, $\tau_*(\mathcal{O}_X(L_{-k} - E))$ は

reflexive であるから, $\tau_*(\mathcal{O}_X(L_{-k} - E)) = \mathcal{O}_X(-(k+1)E)$ となる。従って,

$$R^1 \tau_*(\mathcal{O}_X(L_{-k} - E)) = 0 \text{ を示せば}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-(k+1)E) \rightarrow \mathcal{O}_X(-kE) \rightarrow \mathcal{O}_E([kD]) \rightarrow 0$$

が得られる。 $Z_0 = \sum_{i,j} A_{ij} E$ は τ の excep. set の fundamental

cycle, $W_k = (L_{-k} - E) - L_{-k-1}$ とすると, $W_k \leq Z_0$, $\mathcal{O}_X(L_{-k} - E)$

と W_k の各 ined. comp. の交わり ≥ -1 が示せ, $R^1 \tau_*(\mathcal{O}_X(L_{-k-1}))$

$$= 0 \text{ と合わせて, } R^1 \tau_*(\mathcal{O}_X(L_{-k} - E)) = 0 \text{ を得る。}$$

定理. (1.12). (1.1), (1.5) の仮定の下に, graded modules

の exact sequence

$$0 \rightarrow G(A) \rightarrow R = R(E, D) \rightarrow U \rightarrow 0 \quad (1.12.1)$$

が canonical に作れ, ことに, $\dim_k U = p_g(R) - p_g(A)$ である

り、更に、次の条件は同値

(1) $G(A)$ は normal (EP 5, $U=0$).

(2) $R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) \rightarrow R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-kE))$ がすべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して injective

(2') $R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-kE)) \rightarrow H^1(X-E, \mathcal{O}_X(-kE)) \cong H_m^2(A)$ がすべての $k \in \mathbb{Z}$ に対して injective.

系 (1.13). $a(R(E, D)) \leq 1$, EP 5, $H^1(E, \mathcal{O}_E(kD)) = 0$ ($k \geq 2$) のとき, $G(A) \cong \mathbb{R}$ である. 従って更に, R が Gorenstein (resp. complete intersection, hypersurface) のとき A もそうなる.

(証明) $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-(k+1)E) \rightarrow \mathcal{O}_X(-kE) \rightarrow \mathcal{O}_E(kD) \rightarrow 0$ の ϕ_* をとると,

$$U = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \ker [R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-(k+1)E)) \rightarrow R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-kE))]$$

とおく. (1.12.1) を得る. $-NE$ が ample Cartier divisor となる $N > 0$ が存在するので, $k \gg 0$ なら $R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-kE)) = 0$.

ゆえに, $p_g(A) := \dim R^1\phi_* (\mathcal{O}_X) = \dim R^1\phi_* (\mathcal{O}_X) \leq \sum_{k \geq 0} \dim H^1(\mathcal{O}_E(kD))$,

等号成立 $\Leftrightarrow U = 0$ は容易にわかる. また, $k=0$ のとき, $H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_E) \cong \mathbb{R}$ は常に surjective であるから,

$$R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-E)) \rightarrow R^1\phi_* (\mathcal{O}_X)$$

は常に injective. $a(R) \leq 1$ のとき, $R^1\phi_* (\mathcal{O}_X(-kE)) = 0$ ($k \geq 2$)

だから, $U=0$ となる.

注 (1.14). $\varepsilon = \min\{\varepsilon > 0 \mid R_\varepsilon \neq 0\}$ とおくとき,
 $\varepsilon \geq a(R)$ ならば $U=0$ となるのも, 同様の議論よりあきらかである.

さて, 次に序で述べた定理 2 を証明しよう. A が "star-shaped" resolution をもつとき, (1.12) により, G の素 ideal $\mathfrak{p} \neq M = G_+$ をとると, $G_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$, R は normal だから $G_{\mathfrak{p}}$ は regular, 従って G は isolated singularity をもつ.

逆に, G が isolated singularity をもつとき, $\text{Proj}(G)$ は 1 次元 normal より regular である. $f \in F^m(A)$, $f \notin F^{m+1}(A)$ をとると, [4], (2.6) の方法により, $E \cap D_+(fT^m)$ 上の点に於て, $X = \text{Proj}(R) \cap D_+(fT^m)$ は, $[R_{(fT^m)}]_0 \cong [R/(fT^m-1)]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ から, regular scheme $\text{Spec}(R/(fT^m-1))$ の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -action による quotient であり, この $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -action は E を保つから, 局所的に, $P \in E \cap D_+(f)$ に於て, $\hat{\mathcal{O}}_{X,P} \cong k[[u,v]]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$, $\zeta \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の作用は, (ζ を 1 の m 乗根として) $(u,v) \mapsto (\zeta u, \zeta^m v)$ の形で得られる. ここで, E は P に於て, $u=0$ で定義されるから, $\text{Spec}(A)$ の resolution (X の resolution) は "star-shaped" である. 後半も "central curve" が一意の場合 $\underbrace{G(A) \text{ が isol. sing. である}}_{\text{filtration } \varepsilon}$ ($\forall m \gg 0, G_m \neq 0$ とすれば) 一意である.

131. (1.15). (i) $\Gamma = \left[\begin{array}{c} E \\ \textcircled{-1} - \textcircled{-2} \\ [1] \quad A. \end{array} \right]$, $D(\Gamma) = P - \frac{1}{2}Q$,
 E は elliptic curve とする。このとき, $a(R) \leq 1$ より,

$P = Q$ なら, A は Gorenstein, $p_g(A) = 2$,

$P \neq Q$ なら, $p_g(A) = 1$ (§2の結果より, A は non-

Gorenstein)

(ii) $\Gamma = \left[\begin{array}{c} E \\ \textcircled{-1} - \textcircled{-2} - \textcircled{-2} \\ [1] \quad A_1 \quad A_2 \end{array} \right]$, $D(\Gamma) = P - \frac{2}{3}Q$, E は elliptic
curve とする。このとき,

(a) $P = Q$ なら, R は Gorenstein, $a(R) = 2$, $p_g(R) = 3$.

(b) $P \neq Q$, $2P \sim 2Q$ なら, R は Gorenstein, $a(R) = 2$, $p_g(R) = 2$.

(c) $2P \not\sim 2Q$ のとき $a(R) = 1$, $p_g(R) = 1$

(c) のときは $U = 0$ だが, (a), (b) のとき A が常に Gorenstein
かどうか, わからない。ただし, もし A が Gorenstein なら,
 $P_a(P) = 1$ なのて, $U = 0$ とはならない。(3.2) 参照).

(iii) "graph" Γ の fundamental cycle $\in \mathbb{Z}$ とする。[9].

(4.1) により, もし $\chi(\mathbb{Z}) = 0$ なら, "generically" \mathbb{Z} , $p_g(\mathbb{Z})$

$= 1$ である。 $\Gamma \in (1.4)$ のグラフ, $E \cong \mathbb{P}^1$, $D = D(\Gamma)$,

$R = R(E, D)$ とすると, $R \cong \mathbb{k}[x, y, z]/(x^3 + y^3 + z^2)$

より, $a(R) = 25$, $p_g(R) = 5$. 中之 \mathbb{Z} , "generically" \mathbb{Z} ,

$\dim U = 4$ という事にはならない。(3.9) 参照).

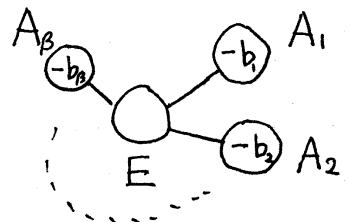
更に, 例(2.1), 例(2.2). 定理(3.2), 定理(3.9) も参照.

§ 2. Gorenstein 性について

この節でも, A は常に (0.1) の "graph" を resolution とし
ても π 2 次 normal local ring とする。簡単のため,

$$D = D(\pi) \in \text{Div}(E, \mathbb{Q}), \quad R = R(E, D) \quad \text{とおく。}$$

まず, §1 の応用として, "graph" だけで A の Gorenstein 性が
判定が可能なものをあげて見よう。(1.15) も参照)

例 (2.1)  E の normal bundle が $-(K_E + P_1 + \dots + P_\beta)$

で与えられるとき (但し, $P_a(E) = 1$ のとき $\beta > 0$, また $P_a(E) = 0$ のときは $\beta - 2 > \sum_{i=1}^{\beta} \frac{1}{b_i}$ を仮定する), [17] (2.9) より

R は Gorenstein, $a(R) = 1$ なので, (1.13) により $G = R$. 従って
 A も Gorenstein となる。

ところが, $a(R) \geq 2$ の場合には, 一般には, 次のように
"graph" だけからは A の Gorenstein 性が判定できない事が起る。

例 (2.2) (日高文夫氏との議論による。[8], [20] 参)。

$$\Gamma = \begin{matrix} \textcircled{-1} \\ [2] \end{matrix} E, \quad E: \text{non-singular alg. curve of genus 2.} \quad \text{そして } E \text{ の} \\ \text{normal bundle は } [-P], \quad P \in E \text{ は a hyper-elliptic} \\ a(R) = 2. \quad \text{Weierstrass point と仮定するものとする。}$$

この "graph" を用いた特異点には, 次の2つの場合がある。

Case (i) $\sqcup = 0 \Rightarrow p_g = 4$ で multiplicity = 2 の超曲面となる (特に Gorenstein)。 $R = R(E, D)$ がその例。

Case (ii) $\sqcup \neq 0 \Rightarrow p_g = 3$ で multiplicity = 4, emb. dim = 5, Cohen-Macaulay type = 3 (特に non-Gorenstein) となる。例は, negative line bundle $[-p] \rightarrow E$ の zero section の近傍を, $H^1(E, \mathcal{O}_E(2p)) (\cong \mathbb{C})$ の non-zero 元 により変形し, blowing-down をして得られる。詳しくは [20] などを見参照して下さい。(3.11) 参。

いずれにしても, R の Gorenstein 性の判定は [17] (2.9) で簡単にできるので, "A が Gorenstein" と " R が Gorenstein" の関係が明確になる事が望まれる。次が成立する。

定理 (2.3). 次の条件は同値である。

(1) A は Gorenstein

(2) R が Gorenstein, かつ $a = a(R)$ とおくとき,

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-aE)) = R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-aE)) \rightarrow H^1(X-E, \mathcal{O}_X(-aE)) \cong H^2_u(A)$$

($X-E \hookrightarrow X$ より生ずる canonical homomorphism) は単射である。($H^1(E, \mathcal{O}_E(a)) \neq 0$ より, $H^1(X, \mathcal{O}_X(-aE)) = H^1(X, \mathcal{O}_X(a)) \neq 0$)

(証明) (1) \Rightarrow (2) A が Gorenstein のとき, \mathcal{O}_X の canonical module は [18], §2., Proposition により, $\mathcal{O}_X(m) = \mathcal{O}_X(-mE)$

と書け, $K_R \cong R(m-1)$ あり, R は Gorenstein, $m = a+1$ である. また, A は Gorenstein, $a(R) = a$ とおくとき,

$\phi: X \rightarrow W$ に関する duality theorem,

$$R\mathrm{Hom}_W(R\phi_*(\mathcal{F}), \omega_W) \cong R\phi_*(R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \omega_X))$$

で, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$ とすると, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(a+1)$, $\omega_W = \mathcal{O}_W$ あり,

$R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X(n), \omega_X) \cong \mathcal{O}_X(a+1-n)$ から, spectral sequence

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_A^p(R^{-q}\phi_*(\mathcal{O}_X(n)), A) \Rightarrow R^{p+q}\phi_*(\mathcal{O}_X(a+1-n))$$

を得, これより, exact sequence

$$0 \rightarrow F^{a+1-n}(A) \rightarrow A \rightarrow [R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(n))]^\vee \rightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(a+1-n)) \rightarrow (A/F^{a+1-n}(A))^\vee \rightarrow 0$$

を得る. (ここで, $(\)^\vee = \mathrm{Hom}_A(\ , I)$, I は A_m の injective envelope).

$0 \leq n \leq a+1$ とし, $n=0, a+1$ の時の ϵ_n と並べて書き,

$R^1\phi_*\omega_X = 0$ (Grauert-Riemenschneider V. Th. より出

る) に注意すると,

(2.3.1). $\mathrm{Ker}(R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(n)) \rightarrow R^1\phi_*\mathcal{O}_X)$ と $\mathrm{Ker}(R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(a+1-n)) \rightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X))$ は互いに dual である.

を得る. (1.13) で見たように, $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(1)) \rightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X)$ は常に injection であるから, $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(a)) \rightarrow R^1\phi_*(\mathcal{O}_X)$ は injection.

$H_E^1(\mathcal{O}_X) \cong [R^1\phi_*(\omega_X)]^\vee = 0$ あり, $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X-E, \mathcal{O}_X) \cong H_m^2(A)$ は injective. 中 2.12, $R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(-aE)) \rightarrow H_m^2(A)$ は単射である.

(2) \Rightarrow (1) $\tilde{\Psi}: \tilde{C} \rightarrow \mathrm{Spec}(R)$ を R の resolution とする.

\tilde{X} と \tilde{C} の exceptional divisor は見かけ上全く同じなので, (1.10) の $-kE$ の Giraud の inverse image を \tilde{X} 上のものも \tilde{C} 上のものと共に L_{-k} と表わす. R は Gorenstein と仮定したから, $K_{\tilde{C}}$ は exceptional divisor で書けるが, $K_{\tilde{C}} = L_{-a-1}$ である事が容易にわかる. (各 A_{ij} , E との numerical data で $K_{\tilde{C}}$ は決まるから.) 従って, \tilde{X} 上の L_{-a-1} も $K_{\tilde{X}}$ と numerical に同値である. 本当に, $K_{\tilde{X}} = L_{-a-1}$ が示されれば, A は Gorenstein となる. $\tilde{B} = E \cup \bigcup_{i,j} A_{ij} \subset \tilde{X}$ とおくと, $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a})) \cong R^1\phi_*(\mathcal{O}_X(a))$ より, 次の exact sequence が成り立つ.

$$0 \rightarrow H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a})) \rightarrow H_m^2(A) \cong H^1(\tilde{X} - \tilde{B}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a})) \rightarrow H_{\mathbb{R}}^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a})).$$

この exact sequence の dual ($\text{Hom}_A(\ , I)$) をとると,

$$0 \leftarrow [H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L_{-a}))]' \leftarrow \hat{K}_A \leftarrow I(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} - L_{-a})) \leftarrow 0$$

を得る. ([10], (2d: Appendix) 参照). \tilde{X} 上の meromorphic 2-form β を, $\tilde{X} - \tilde{B}$ 上 holomorphic な, $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}} - L_{-a}) = \Omega_{\tilde{X}}^2(-L_{-a})$ の image に属するものを取ると,

$$\text{div}(\beta) = B_1(\beta) + B_2(\beta),$$

$\text{Supp}(B_1(\beta)) \subset \tilde{B}$, $B_2(\beta) \geq 0$, $\text{Supp}(B_2(\beta))$ は \tilde{B} の外となる.

仮定により, $B_1(\beta) \neq L_{-a}$ である; $\text{div}(\beta)$ と L_{-a-1} は \tilde{B} 上 numerically equivalent であるから, $L_{-a-1} - B_1(\beta)$ の E, A_{ij} との交わり ≥ 0 . ゆえに, $B_1(\beta) - L_{-a-1} \geq 0$. 且つ $B_1(\beta) > L_{-a-1}$

とすると, $B_1(\beta) \geq L_{-a-1} + Z_0$ (Z_0 は \tilde{B} の fundamental cycle).
(2.3.2).

$L_{-a} \geq L_{-a-1} \geq L_{-a} + L_{-1}$ かつ $Z_0 \geq -L_{-1}$ が成立する
ので

$$B_1(\beta) \geq L_{-a-1} + Z_0 \geq L_{-a-1} - L_{-1} \geq L_{-a} \quad \text{これは仮定に矛盾}$$

する。ゆえに $B_1(\beta) = L_{-a-1}$, $\text{div}(\beta)$ と L_{-a-1} は

numerically equivalent だから, $B_2(\beta) = 0$, $\text{div}(\beta) = L_{-a-1}$

ゆえに, $K_X = L_{-a-1}$, A は Gorenstein である. ((2.1) の証明終)

(注) ((2.3.2) についで) 前半の不等号は, $M, N \in \text{Div}(\tau, \mathcal{Q})$

に対して, 一般に, $[M]_G + [N]_G \geq [M+N]_G$ だが, これより

得られる。また, $L_{-1} = -E - [e_\tau(-E)]_G$, $Z_0 \geq 0$ より,

$$Z_0 - E \geq [e_\tau(-E)]_G, \quad \text{即ち, } Z_0 \geq -L_{-1}.$$

“ A が Gorenstein” のとき (1.13) の仮定を弱められる。即ち,

命題 (2.4). A が Gorenstein $a(R) \leq 2\varepsilon(R)$ のとき,

$G(A) = R$ である。但し, $\varepsilon(R) = \min \{ n > 0 \mid R_n \neq 0 \}$.

証明は, duality (2.3.1) に注意すれば, (1.13) と同じ

である。

また, 定理 (2.3) 及び命題 (2.4) は, 例 (2.2) の graph について,

Gorenstein なる特異点が Case (i) の場合に属する事を (Case (ii) の不変量の解析 [20][8] をしないで) 示している。

さて、次に命題(2.4)で扱えない場合について論じなければならぬ。つまり、“ A がGorensteinであって Ω がnon-zero”となる場合の考察をするべきだが、残念ながら、筆者達はそのような例を見出せなかった。そこで、

問題(2.5) 我々の状況で、 A がGorensteinならば、 $\Omega = 0$ となるか？

を問う。定理1により、これは

問題(2.5)' “Star-shaped” resolution をもつ Gorenstein singularity は、常に R^* -action をもつものの p_g -constant flat deformation で得られるか？

という、少し虫の良い問と同等である（同じ“graph”を持つ Gorenstein singularity が、geometric genus p_g の意味で unique であって、かつ、皆 flat deformation でつながるか？）というのは、強すぎるような気がするが……）。また、環論的には、定理2を通じて、

問題(2.5)'' (A, \mathfrak{m}) を 2次元 $\overset{\text{normal}}{\text{Gorenstein local algebra}} / R$ であり、 $\{F^k\}_{k \geq 0}$ を A の filtration であって $\bigoplus_{k \geq 0} F^k / F^{k+1}$ が isolated singularity のみを持つ integral domain であるとする。この時、 $\bigoplus_{k \geq 0} F^k / F^{k+1}$ は normal (i.e., Cohen-Macaulay, 特にこの場合 Gorenstein) になるか？

とも述べられる。

以下、上の間に対するひとつのアプローチ(定理(3.2))を、
「 R の構造が良くわかっている場合」の我々の議論の応用例
として紹介する。

§3. “Star-shaped” resolution を持つ (Wagreichの意味での)
楕円型特異点について

この節でも、 A は常に(0.1)の“graph”を resolution として
もつ 2次元 normal local ring とし、§1, §2 と同様の記号を用いる。

A (または Γ) の “arithmetic genus” P_a は

$$P_a(\Gamma) = \sup_Y P_a(Y) = \sup_Y \{1 - \chi(\mathcal{O}_Y)\}$$

で定義される [16]。ここで Y は A の resolution の exceptional
set を support とする (又は Γ の) non-zero effective divisor 全体
を動くものとする。この時、(k^* -action を持つ特異点) R
 $= R(E, D)$ について次が成立する [15] §3。

$$(3.1) \quad \sum_{\ell=0}^{(d+1)\varepsilon-1} h^1(\mathcal{O}_E(\ell D)) \leq P_a(\Gamma), \quad \text{ただし}$$

d は zero 以上の整数を動き、 $\varepsilon = \varepsilon(R) = \min\{\beta > 0 \mid R_\beta \neq 0\}$ 。

この制約を用いて、次を示そう。

定理 (3.2) A が Gorenstein かつ $P_a(\Gamma) = 1 / R = \bar{R}$,
 $ch(R) = 0$ のとき $G = R$ (i.e., $\mathbb{U} = 0$) である。

例えば, A の resolution のグラフ Γ が (1.4) で与えられているとき, もし A が Gorenstein ならば

$$G(A) = R = k[x, y, z] / (x^2 + y^3 + z^3)$$

となり, A は degree 2 の hypersurface である事がわかる。
(系(3.10)及び, 先に続く記述も参照)

また, 任意の自然数 $\beta (\geq 1)$ について $a(\Gamma) = \beta, p_a(\Gamma) = 1$ となる graph Γ が存在するので, 定理(3.2)は命題(2.4)とは別の系列の特異点について述べていることになる。なお, $p_a(\Gamma) = 1$ を満たす特異点は Ph. Wiegand によって楕円型特異点と呼ばれている (弱楕円型特異点と呼ばれる事もある [21]) [16]。

定理(3.2)の証明には, 次の3つの準備が必要である。

Duality (2.3.1)

$R = \bigoplus_{\ell \geq 0} H^0(\mathcal{O}_E(\ell \cdot D))$ の構造の解析 (3.1), (3.3), (3.4)

cohomology 群についての簡単な操作 (3.5), (3.6), (3.7)

(3.3) $R_\eta = H^0(E, \mathcal{O}_E(\eta D)) \neq 0$ となるような正の整数 η と R_η に属する non-zero 元 x を任意にとる。標準的な sheaf の inclusion

$x \cdot \mathcal{O}_E(\ell \cdot D) \hookrightarrow \mathcal{O}_E((\ell + \eta) \cdot D)$ により可換図式:

$$\begin{array}{ccc} H^1(E, x \cdot \mathcal{O}_E(\ell \cdot D)) & \longrightarrow & H^1(E, \mathcal{O}_E((\ell + \eta) \cdot D)) \longrightarrow 0 \\ \uparrow & \curvearrowright & \nearrow \text{ } x \text{ との積} \\ x \otimes H^1(E, \mathcal{O}_E(\ell \cdot D)) & & \end{array}$$

を、任意の整数 l について得る。特に、元 χ の積による

$$(3.3.1) \quad \chi : H^1(E, \mathcal{O}_E(lD)) \longrightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E((l+\eta)D))$$

は常に上射になるわけである。

(3.4) $R_\varepsilon(\Gamma) = 1$ を仮定する。すると $\bigoplus_{l \geq 0} H^1(E, \mathcal{O}_E(lD)) \neq 0$ である [1], [2], [16]。また中山の補題により、 $\bigoplus_{l \geq 0} H^1(\mathcal{O}_E(lD)) / \mathcal{M}_\Gamma \bigoplus_{l \geq 0} H^1(\mathcal{O}_E(lD)) = \bigoplus_{l=0}^{\varepsilon-1} H^1(\mathcal{O}_E(lD))$ [15] は non-zero となり、(3.1) により、 $\bigoplus_{l=0}^{\varepsilon-1} H^1(\mathcal{O}_E(lD)) \cong \mathcal{R}$ である事がわかる。 $H^1(\mathcal{O}_E(\sigma D)) \cong \mathcal{R}$ となる整数 σ が $\{0, 1, \dots, \varepsilon-1\}$ の中にある。 R_ε に属する non-zero 元 χ の積写像

$$\chi^\alpha : H^1(\mathcal{O}_E(lD)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_E((l+\alpha\varepsilon)D)), \quad \alpha \geq 1$$

は上射(3.3.1)だから、次の関係を得る：

$$(3.4.1) \quad \dim_{\mathcal{C}} H^1(\mathcal{O}_E(lD)) = 0 \quad \text{if} \quad l \not\equiv \sigma \pmod{\varepsilon}, \quad l \geq 0.$$

$$\dim_{\mathcal{C}} H^1(\mathcal{O}_E(lD)) \leq 1 \quad \text{if} \quad l \equiv \sigma \pmod{\varepsilon}, \quad l \geq 0.$$

特に $a(R(E, D)) = \max \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid H^1(\mathcal{O}_E(\alpha D)) \neq 0 \}$ は、 $a(R) \equiv \sigma \pmod{\varepsilon}$ であり、 $H^1(\mathcal{O}_E(a(R)D)) \cong \mathcal{R}$ となる。非負の整数 v をとって $a(R) = \sigma + v\varepsilon$ と書こう。任意の整数 u , $0 \leq u \leq v$ について次の可換図式ができる：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} \cong H^1(\mathcal{O}_E(\sigma D)) & \xrightarrow{\chi^v \text{ の積}} & H^1(\mathcal{O}_E(a(R)D)) \cong \mathcal{R} \\ & \searrow \chi^u \text{ の積} & \nearrow \chi^{v-u} \text{ の積} \\ & & H^1(\mathcal{O}_E((\sigma+u\varepsilon)D)) \end{array}$$

(3.3.1) より、これらはすべて同型写像となり、

$$(3.4.2) \quad H^i(\mathcal{O}_E((r+u \cdot \varepsilon)D)) \cong k \quad \text{for } u \text{ s.t. } 0 \leq u \leq \nu.$$

である。また、以上で、 $P_2(\mathcal{F}) = 1$ の時

$$(3.4.3) \quad P_2(R(E, D)) = \nu + 1 = \frac{a(R(E, D)) - \sigma}{\varepsilon} + 1$$

である事もわかった。

(3.5) 定理 (2.3) の条件 (2) と \mathbb{L} の消滅を見くろくと、

特異点 A の Gorenstein 性から $G(A) = \bigoplus_{l \geq 0} F^l / F^{l+1}$ の normality を考察しようとするならば、(または、 $G(A)$ の non-normality から A の non-Gorenstein 性を考察しようとするならば)、ある 1 箇所の gap $\mathbb{L}_l = \text{Ker} \{ R^i \phi_l(\mathcal{O}_X(-(l+1)E)) \longrightarrow R^i \phi_l(\mathcal{O}_X(-lE)) \}$ から、なるべく $R^i \phi_l(\mathcal{O}_X(-a(R)E)) \rightarrow \dots$ “近い場所” に $R^i \phi_l \mathcal{O}_X$ への non-trivial kernel を構成する方法を見出さなければならぬ。

non-zero 元 $\Phi \in \mathbb{L}_l$ があったとして、まず次のようにして

$R^i \phi_l = H^0(\mathcal{O}_E(l \cdot D))$ に属する non-zero 元 $y \in \mathbb{L}_l$ とする:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{O}_E(l \cdot D)) & \xrightarrow{\delta} & R^i \phi_l(\mathcal{O}_X(-(l+1)E)) & \longrightarrow & R^i \phi_l(\mathcal{O}_X(-lE)) \\ \downarrow y & & \downarrow \delta(y) = \Phi & & \downarrow 0 \end{array}$$

補題 (3.6) Φ に対して、自然数 p s.t. $l+1 \leq p \leq a(R)$

と $R^i \phi_p(\mathcal{O}_X(-pE))$ に属する元 Φ_p があり、対応

$$\begin{array}{ccc} \eta : & R^i \phi_p(\mathcal{O}_X(-pE)) & \longrightarrow & R^i \phi_l(\mathcal{O}_X(-(l+1)E)) \\ \xi_p : & R^i \phi_p(\mathcal{O}_X(-pE)) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_E(pE)) \end{array}$$

によって, $\eta(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}$ かつ $\xi_p(\mathbb{F}_p) \neq 0$ となる。

自明であることから, 証明は省略する。

更に

補題 (3.7). 上の状況で, 自然数 t を h と τ 固定する。

仮定 $t \cdot \xi^{t-1} \xi_p(\mathbb{F}_p) \in H^1(\mathcal{O}_E((t-1)l + p) \cdot D)$ は non-zero.

結論 $R\mathcal{H}^*(\mathcal{O}_X(-(t-1)lE - pE))$ に属する non-zero π \mathbb{F}^t が存在して, 対応 $\omega: R\mathcal{H}^*(\mathcal{O}_X(-(t-1)lE - pE)) \rightarrow R\mathcal{H}^*(\mathcal{O}_X(-l\tau E))$ により, $\omega(\mathbb{F}^t) = 0$ となる。

(3.7) の証明 Čech-cohomology の記法で, 具体的に \mathbb{F}^t を構成する。coherent sheaves による X の Leray cover $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を h と τ により, $\mathcal{Y} = \{y_i\}_{i \in I} \in \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_E(lD))$ などと, あらわす。

zero-cochain $\tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{y}_i\}_{i \in I} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-lE))$ を, 完全列

$$\begin{array}{ccccc} H^0(U_i, \mathcal{O}_X(-lE)) & \longrightarrow & H^0(U_i, \mathcal{O}_E(lD)) & \longrightarrow & H^1(U_i, \quad) = 0 \\ \downarrow \tilde{y}_i & \longrightarrow & \downarrow y_i & \longrightarrow & \downarrow 0 \end{array}$$

を求め, $\delta \tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{y}_j - \tilde{y}_i\} = \mathbb{F}$ in $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-(l+1)E))$ と
この対応があるが, $\eta(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}$ (3.6) によって \mathbb{F} なることから,

$\tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{y}_i\}$ とし,

$$(3.7.1) \quad \tilde{y}_j - \tilde{y}_i \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-pE)) \quad \forall i, j \in I$$

となるように $\tilde{\mathcal{Y}}$ を τ 直す事ができる。

さて, zero-cochain $\tilde{\mathcal{Y}}^t \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-tlE))$ を

$\tilde{y}^t = \{\tilde{y}_i^t\}$ により定める。そして one-cocycle $\{\tilde{y}_j^t - \tilde{y}_i^t\} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ に注目しよう。

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j^t - \tilde{y}_i^t &= \{(\tilde{y}_j - \tilde{y}_i) + \tilde{y}_i\}^t - \tilde{y}_i^t \\ &= \sum_{s=1}^t \binom{t}{s} \tilde{y}_i^{t-s} (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^s \quad \text{on } U_i \cap U_j \end{aligned}$$

そして, $\tilde{y}_i^{t-s} (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^s \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-t-s)E - sPE)$ である (3.7.1)。更に $l < p$ であるから, 次の関係が成立する:

$$\begin{aligned} (3.7.2) \quad \tilde{y}_i^{t-1} (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i) &\in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-(t-1)E - PE)) \\ \tilde{y}_i^{t-s} (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^s &\in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-(t-s)E - sPE - E)) \\ &\text{for } s=2, 3, \dots, t. \end{aligned}$$

かくして, $\{\tilde{y}_j^t - \tilde{y}_i^t\} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-(t-1)E - PE))$ と見なせる。これによって定まる $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-(t-1)E - PE)) \cong R^1\mathcal{H}^0(\mathcal{O}_X(-(t-1)E - PE))$ の元を \mathbb{E}^t と書く。定め方により $\omega(\mathbb{E}^t) = 0$ は明らかである。また (3.7.2) により, $\check{\xi}_{(t-1)E+PE}(\mathbb{E}^t) = \{t \cdot \tilde{y}_i^{t-1} (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)\} = t \cdot \tilde{y}_i^{t-1} \check{\xi}_p(\mathbb{E}_p)$, where $\check{\xi}_{(t-1)E+PE}: R^1\mathcal{H}^0(\mathcal{O}_X(-(t-1)E - PE)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-(t-1)E + PD))$, であり, これは仮定より zero でない。
Q.E.D.

(3.8) 定理 (3.2) の証明

$L_l = 0$ ($l \geq 0$) を l につ

いての帰納法で証明する。まず $L_0 = 0$ である事は系(1.13)の証明で述べた。 $L_l = 0$ for $l \leq d_0 - 1$ (d_0 は 1 以上のある整数) が証明されたと仮定する。この仮定は, 明らかに, 条件

$$(3.8.1) \quad R^1\mathcal{H}^0(\mathcal{O}_X(-lE)) \longrightarrow R^1\mathcal{H}^0\mathcal{O}_X \quad \text{is injective for } l \leq d_0.$$

と同値である。更に duality (2.3.1) により, 条件

$$(3.8.2) \quad R^l \psi_* (\mathcal{O}_X(-(a(R)+1-l)E)) \rightarrow R^l \psi_* \mathcal{O}_X \text{ is injective for } l \leq d_0.$$

とも同値である。これより, 特に次の完全列が従う:

$$(3.8.3) \quad 0 \rightarrow R^l \psi_* (-(a(R)+1-d_0)E) \rightarrow R^l \psi_* (-(a(R)-d_0)E) \rightarrow H^l(\mathcal{O}_E((a(R)-d_0)D)) \rightarrow 0$$

Case 1 $H^l(\mathcal{O}_E((a(R)-d_0)D)) = 0$ の時 (3.8.2) と (3.8.3)

より, $R^l \psi_* (\mathcal{O}_X(-(a(R)-d_0)E)) \rightarrow R^l \psi_* (\mathcal{O}_X)$ は単射である。

duality (2.3.1) より $R^l \psi_* (\mathcal{O}_X(-(d_0+1)E)) \rightarrow R^l \psi_* \mathcal{O}_X$ も単射となり $L_{d_0} = 0$ が従う。

Case 2 $H^l(\mathcal{O}_E((a(R)-d_0)D)) \neq 0$ の時 $L_{d_0} \neq 0$ を更

に仮定して矛盾を導こう。*まず (3.4) より, $a(R) - d_0 \equiv \sigma \pmod{\varepsilon}$ かつ $a(R) \equiv \sigma \pmod{\varepsilon}$ だから

$$(3.8.4) \quad d_0 \equiv 0 \pmod{\varepsilon}$$

である。non-zero 元 $\psi \in L_{d_0}$ について, 完全列

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{O}_E(d_0 D)) & \longrightarrow & R^l \psi_* (\mathcal{O}_X(-(d_0+1)E)) & \longrightarrow & R^l \psi_* (\mathcal{O}_X(-d_0 E)) \\ \downarrow \psi & \longmapsto & \downarrow \psi & \longmapsto & \downarrow 0 \end{array}$$

で, non-zero 元 $\psi \in R_{d_0} = H^0(\mathcal{O}_E(d_0 D))$ を定める。補題 (3.6)

で存在が保証された ψ に対する自然数 p を調べよう。

$H^l(\mathcal{O}_E(pD)) \neq 0$ とする条件 (3.6) と (3.4) より

$$(3.8.5) \quad p \equiv \sigma \pmod{\varepsilon}$$

である。今、 $R \not\cong (O_x(-pE)) \rightarrow R \not\cong O_x$ は単射でないを仮定しているから、帰納法の仮定 (3.8.2) より、 $p \leq a(R) - d_0$ である。ゆえに、自然数 t を選んで $a(R) - d_0 < p + td_0 \leq a(R)$ とする事ができる。また (3.8.4), (3.8.5) より、 $p + td_0 \equiv \sigma \pmod{\varepsilon}$ でもあるから、 $H^1(O_E((p+td_0)D)) \cong k$ となる (3.4)。ゆえに surjection (3.3.1)

$$y^t : k \cong H^1(O_E(pD)) \xrightarrow{\times y^t} H^1(O_E((p+td_0)D)) \cong k$$

は同型写像である。これで、 $H^1(O_E((p+td_0)D))$ の元 $(t+1)y^t \in \mathbb{F}_p$ は non-zero である事がわかった。補題 (3.7) により、 $R \not\cong (O_x(-(p+td_0)E)) \rightarrow R \not\cong (O_x(-(t+1)d_0E))$ は non-trivial kernel を持つ。 $R \not\cong (O_x(-(p+td_0)E)) \rightarrow R \not\cong (O_x)$ は単射ではない。しかし、これは帰納法の仮定 (3.8.2) に反する。

Q.E.D.

以下、楕円型特異点の一般的な知識を仮定して、説明抜きで、結果を述べる ([9], [14], [21] など参照)。

定理 (3.9) $R = R(E, D)$ が $P_a(\Gamma) = 1$ なる graph Γ を持ち、 $\psi : \tilde{X} \rightarrow W = \text{Spec}(R)$ を minimal good resolution, ε として \tilde{X} 上の effective divisor の集合 $\{\mathbb{Z}_{B_i} : i=1, \dots, \ell\}$ を \tilde{X} 上の elliptic sequence とする。ここで、 Γ の central curve E が \mathbb{P}^1 と同型であると仮定する。すると

- (i) $p_g(\text{Spec}(R(E, D))) = \text{the length of the elliptic sequence}$ である。
 (ii) 上記 graph を持つ特異点は, Lauferの意味で“generic”(Ch. IV [9] 参照) には, $\dim L = p_g(\text{Spec}(R(E, D))) - 1$ である。それは, $p_g(\text{Spec}(R(E, D))) \geq 2$ の時, “generic”には, non-Gorenstein 特異点となる (定理 (3.2) より, また Theorem (4.3) [9] 参照)。

系 (3.10). 定理 (3.9) の仮定の下で (i.e., $E \cong \mathbb{P}^2$ で),

(i) $R(E, D)$ が Gorenstein になる事と, graph Γ が numerical Gorenstein になる事は同値である。そして, その時, $R(E, D)$ は maximally elliptic singularity である。

(ii) graph Γ を resolution に持つ特異点 A が, Gorenstein になる事と, maximally elliptic singularity である事は同値である。

例えば, 上の状況では, A が Gorenstein になる事は, A の重複度 $= \max\{2, -\mathbb{Z}_0^2\}$ (ただし \mathbb{Z}_0 は Γ の fundamental cycle) となる事が [14] の結果とあわせて示される (定理 (3.2) の直後の例参照)。

注意 (3.11) 上記 (3.9)^(*) 及び (2.2) のように “analytic” に構成した local ring は, Artin の定理 (Publ. IHES 36. Theorem (3.8)) により, analytic に同型な (従って同じ不変量をもつ) essentially (*). blowing-down により構成する^(*) といふ意が, “generic” にはある, see Laufer [9]).

of finite type の A に置き換えて, 我々の枠組みで議論している。

§ おしまいに,

実際の講演では, 渡辺は filtered ring の一般論の後に, 定理 1, 定理 2 を述べ, 殆ど $L \neq 0$ となる初等的例 (2.2) を詳述した後 Gorenstein 性に解れた。講演時の feeling を再現する為, [19] [20] を参考文献と挙げておきます。

References.

- [1] M. Artin, Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math. 84 (1962), 485-496.
- [2] _____, On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1966), 129-136.
- [3] M. Demazure, Anneaux gradues normaux, preprint, Ecole Polytechnique, (1978).
- [4] H. Flenner, Rationale quasi-homogene Singularitäten, Arch. Math. 36 (1981), 35-44.
- [5] J. Giraud, Improvement of Grauert-Riemenschneider's Theorem for a normal surface, Ann. Inst. Fourier, 32 (1982), 13-23.
- [6] S. Goto, K.-i. Watanabe, On graded rings, I. J. Math. Soc. Japan, 30

(1978), 179-213.

[7] A. Grothendieck, J. Dieudonne, Elements de Geometrie Algebrique, II, III, Publ. I.H.E.S., 8, 11.

[8] F. Hidaka, A projective contractability criteria and its applicatios, in preparation.

[9] H.B. Laufer, On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. 99 (1977), 1257-1295.

[10] J. Lipman, Desingularization of two-dimensional schemes, Ann. of Math. 107 (1978), 151-207.

[11] P. Orlik, Ph. Wagreich, Isolated singularities of algebraic surfaces with \mathbb{C}^* -action, Ann. of Math. 93 (1970), 205-228.

[12] H. Pinkham, Normal surface singularities with \mathbb{C}^* -action, Math. Ann. 227 (1977), 183-193.

[13] F. Sakai, Weil divisors on normal surfaces, Duke Math. J. 51 (1984), 877-887.

[14] M. Tomari, A p_g -formula and elliptic singularities, Publ. R.I.M.S., 21 (1985), 297-354.

[15] _____, Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ for normal two-dimensional singularities, to appear in Adv. Studies in Pure Math. 8 (1986), Proc. Japan-U.S. seminar 1984, Tsukuba-Kyoto.

[16] Ph. Wagreich, Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math., 92 (1970), 419-454.

- [17] K.-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, Nagoya Math. J. 83 (1981), 203-211.
- [18] _____, Normal filtration について, オ7回可換環論シンポジウム (1985) 報告集, 205-214.
- [19] _____, Filtered Rings と Filtered Blowing-up について オ3回可換環論シンポジウム (1981) 報告集 37-48.
- [20] M. Tomari, 2次元次数環 $\bigoplus_{m \geq 0} \frac{\mathbb{Q}^m}{\mathbb{Q}^{m+1}}$ の Cohen-Macaulay 性について (M. Morales などの他の方々の仕事による) オ6回可換環論シンポジウム (1984) 報告集 317-327 (補遺が, オ7回報告集 p137 にある)。
- [21] Stephen. S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., 257 (1980) 269-329.