

超指数保留時間版等価ランダム法

NTT電気通信研究所 町原文明(Fumiaki Machihara)

臼井幸弘(Yukihiro Usui)

1. まえがき

現在、電話網の回線数算出には、保留時間分布を指数と仮定した等価ランダム法 [1] が用いられている。この場合、溢れ呼量の平均と分散が非常に簡単な式で表される故、回線数算出上極めて都合がよい。しかしながら、測定データ分析の結果、保留時間分布は、指数分布より大きな変動係数をもつ2次の超指数分布と同定されており [2,5,13]、この指数保留時間という仮定は強すぎる。従来行われてきた指数保留時間型の等価ランダム法による回線数算出の正当性を保証するには、超指数保留時間の影響を定量化しなければならない。本文ではこれを解決すべく、超指数保留時間をもつ即時系 $M/H_2/S/S$ からの溢れ呼が無限回線群に加わる場合 ($M/H_2/S/S \rightarrow \cdot /H_2/\infty$) の無限回線群上の系内呼数の平均、分散及び分散係数を導出する。

非指数保留時間モデルの解析例として、Burke による単位分布保留時間モデル $M/D/S/S \rightarrow \cdot /D/\infty$ がある [4]。Burke は、超指数保留時間型の等価ランダム法による回線算出数と単位保留時間型の回線算出数が実用上同じになることを示している。彼はこの結論により保留時間分布の回線算出数へのロバストネスを主張しているが、無条件には肯定できない。というのは、彼は指数分布より変動係数が小さい場合におけるロバストネスを主張しているに過ぎず、実際に問題となっている変動係数が大きい場合については何の言及もしていないからである。

本文では、まず、2次の超指数分布を保留時間として持つ $M/H_2/S/S$ からの溢れ呼

生起間隔を解析する。より一般的なモデルであるM/G/S/Sからの溢れ呼生起間隔分布は、Hellman [3]により解析されたが、その結果は無限区間の積分を含み、実用的とは言い難い。M/H₂/S/Sは、保留時間分布が平均の異なる2種のポアソン呼が到着するモデルと等価である。この場合、全話中の状態は、サーバを保留する2種の呼の組み合わせにより(S+1)種類ある。溢れ呼の生起過程はこれらの状態に従属し、再生とはならない。そこで溢れ呼過程をマルコフ再生過程[18]として特性づけ、セミマルコフ核[18]のラプラス・スティルチェス変換を導出する。この結果を用いて溢れ呼の生起間隔の平均(これはM/M/S/Sのそれに等しい)と変動係数を定量化し、保留時間の変動係数の増加に伴い、溢れ呼の生起間隔の変動係数が増加することを示す。次に、このセミマルコフ核を持つ溢れ呼が超指数無限回線群に加わった場合の系内呼数の平均と分散を解析する。そして、保留時間の変動係数の増加に伴い、溢れ呼の生起間隔の変動が増加するにもかかわらず、この分散が減少するという注目すべき結果を導く。

2. M/H₂/S/Sの溢れ呼生起過程

以下の待ち行列モデルを考える。

(1) 到着間隔は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う。

(2) 保留時間は $1-k_1 \exp(-\mu_1 t) - k_2 \exp(-\mu_2 t)$

(平均 $1/\mu$ の超指数分布)に従う。特に、平均滞在時間が $1/\mu_k$ である位相を位相 k と呼ぶ。

(3) サーバ数 S 、待ち席数 0 とする。

t 時点における位相 k にある呼の数を $\eta_k(t)$ とすると、 $\{\eta_1(t), \eta_2(t): t \geq 0\}$ はマルコフ過程となる。特に、 $\eta_1(t) + \eta_2(t) = n$ をみたす状態集合をレベル n と呼ぶ[6]。レベル n の状態は、 $(n,0), (n-1,1), \dots, (0,n)$ ($(i, n-i)$ は位相1、位相2にある呼数がそれぞれ $i, n-i$ である状態を表す。)である。この状態に $1, 2, \dots, n+1$ と番号をつけると、 $\{\eta_1(t), \eta_2(t): t \geq 0\}$ の生成作用素 Q は以下となる。

$$(1) Q = \begin{matrix} \text{レベル} & 0 & 1 & 2 & \dots & S \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ S-1 \\ S \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} A_{00} & A_{01} & & & & \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & & & \circ \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ \circ & & & & & A_{S-1,S} \\ & & & & & A_{S,S-1} & A_{S,S} \end{array} \right] \end{matrix}$$

ここに、

$$A_{00} = -\lambda, \quad A_{01} = \lambda(k_1, k_2)$$

$$A_{nn} = \begin{pmatrix} -(n\mu_1 + \lambda) & & & & \circ \\ -((n-1)\mu_1 + \mu_2 + \lambda) & & & & \\ & \circ & & & \\ & & -((n-i)\mu_1 + i\mu_2 + \lambda) & & \\ & & & & -(n\mu_2 + \lambda) \end{pmatrix}$$

$$A_{n,n+1} = \lambda \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & & & \circ \\ & k_1 & k_2 & & \\ & & & \ddots & \\ \circ & & & & k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$A_{n,n-1} = \begin{pmatrix} n\mu_1 & & & & & & \circ \\ \mu_2 & (n-1)\mu_1 & & & & & \\ & 2\mu_2 & (n-2)\mu_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & i\mu_2 & (n-i)\mu_1 & \\ \circ & & & & & & \\ & & & & & (n-1)\mu_2 & \mu_1 \\ & & & & & & n\mu_2 \end{pmatrix}$$

溢れ呼生起過程解析のため、レベル n からレベル $n+1$ への初通過時間密度行列を以下のように定義する。系が t 時点でレベル n にあることを、 $Y(t) = n$ と書く。

$$G_n(t) = (g_{ij}^{(n)}(t)) : i, j = 0, 1, \dots, n ; n = 0, 1, \dots, S$$

ここに、

$$g_{ij}^{(n)}(t) dt = \Pr \{ t < \tau_n < t + dt, Y(\tau_n) = n, Y(\tau_n + 0) = n+1, \eta_2(\tau_n - 0) = j \\ | Y(0) = n, \eta_2(0) = i \} \\ n = 0, 1, \dots, S$$

ここに、 τ_n はレベル n からレベル $n+1$ への初通過時間で、

$$\tau_n = \inf_t \{ Y(t) = n+1 | Y(0) = n \}$$

と定義される。

特に $n = S$ のとき、 $Y(\tau_n + 0) = S+1$ は溢れ呼の生起と解釈する。

$g_{ij}^{(n)}(t)$ のラプラス変換を $\tilde{g}_{ij}^{(n)}(s)$ とし、

$$\tilde{G}_n(s) = (\tilde{g}_{ij}^{(n)}(s))$$

と定義すると、以下の定理が成立する。

定理 2.1

以下の漸化式が成立する。

$$(2) \quad \begin{aligned} \tilde{G}_0(s) &= \lambda / (s + \lambda) \\ \tilde{G}_n(s) &= \tilde{X}_n^{-1}(s) \lambda \tilde{Q}_n(s) \\ & \quad n = 1, 2, \dots, S \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n(s) &= (sI_{(n+1)} + A_{nn})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+n\mu_1+\lambda} & & & & \\ & \frac{1}{s+(n-1)\mu_1+\mu_2+\lambda} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{s+(n-i)\mu_1+i\mu_2+\lambda} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{s+n\mu_2+\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\tilde{X}_n(s) = I_{(n+1)} - \lambda^{-1} Q_n(s) A_{n,n-1} \tilde{G}_{n-1}(s) A_{n-1,n}$$

$I(m)$ は次数 m の単位行列。

(証明)

文献[7-10]と同様の手法により証明する。

$\tilde{G}_0(s)$ は明らか。 $n \geq 1$ について考察する。レベル n から $n+1$ への初通過の起こり方を2つの場合に分ける。

場合1) 0時点以後、系内の呼の退去の前に呼が生起し、レベル $n+1$ への初通過が起こる場合。

この場合の初通過時間確率密度行列のラプラス変換は、 $\lambda \tilde{Q}_n(s)$ となる。

場合2) 0時点以後、系に呼が到着する前に系内の呼が退去し、一旦レベル $n-1$ に到達した後、レベル $n+1$ への初通過が起こる場合 (図1参照)。

レベル $n+1$ をタブー状態[11]とした、レベル n からレベル $n-1$ への初通過時間密度行列のラプラス変換は、

$$\tilde{Q}_n(s) A_{n,n-1}$$

となる。

レベル $n-1$ からレベル n への初通過時間密度行列のラプラス変換は $\tilde{G}_{n-1}(s)$ となる。

レベル $n-1$ からレベル n への初通過が起きた直後の、レベル $n-1$ の状態からレベル n の状態への推移行列は $\lambda^{-1} A_{n-1,n}$ となる。

また、レベル n からレベル $n+1$ への初通過時間密度行列のラプラス変換は $\tilde{G}_n(s)$ 。

従って、場合2の初通過時間密度行列のラプラス変換は

$$\tilde{Q}_n(s) A_{n,n-1} \tilde{G}_{n-1}(s) (\lambda^{-1} A_{n-1,n}) \tilde{G}_n(s)$$

と表される。

全確率の法則より

$$\tilde{G}_n(s) = \lambda \tilde{Q}_n(s) + \lambda^{-1} \tilde{Q}_n(s) A_{n,n-1} \tilde{G}_{n-1}(s) A_{n-1,n} \tilde{G}_n(s)$$

が成立し、定理が証明される。

上記定理より、以下の漸化式が成立する。

$$(3) \quad \begin{aligned} G_0'(s) &= \lambda \tilde{Q}_0'(s) \\ G_n'(s) &= (\tilde{X}_n^{-1}(s))' \tilde{Q}_n(s) + \tilde{X}_n^{-1}(s) \tilde{Q}_n'(s) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} G_0''(s) &= \lambda \tilde{Q}_0''(s) \\ G_n''(s) &= (\tilde{X}_n^{-1}(s))'' \tilde{Q}_n(s) + 2(\tilde{X}_n^{-1}(s))' \tilde{Q}_n'(s) + \tilde{X}_n^{-1}(s) \tilde{Q}_n''(s) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} (\tilde{X}_n^{-1}(s))' &= -\tilde{X}_n^{-1}(s) \tilde{X}_n'(s) \tilde{X}_n^{-1}(s) \\ (\tilde{X}_n^{-1}(s))'' &= -(\tilde{X}_n^{-1}(s))' \tilde{X}_n'(s) \tilde{X}_n^{-1}(s) - \tilde{X}_n^{-1}(s) \tilde{X}_n''(s) \tilde{X}_n^{-1}(s) \\ &\quad - \tilde{X}_n^{-1}(s) \tilde{X}_n'(s) (\tilde{X}_n^{-1}(s))' \end{aligned}$$

$$\tilde{Q}_n'(s) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(s+n\mu_1+\lambda)^2} & & & \bigcirc \\ & \frac{-1}{(s+(n-1)\mu_1+\mu_2+\lambda)^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{-1}{(s+(n-i)\mu_1+i\mu_2+\lambda)^2} & \\ \bigcirc & & & & \frac{-1}{(s+n\mu_2+\lambda)^2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Q}_n''(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(s+n\mu_1+\lambda)^3} & & & \bigcirc \\ & \frac{2}{(s+(n-1)\mu_1+\mu_2+\lambda)^3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2}{(s+(n-i)\mu_1+i\mu_2+\lambda)^3} & \\ \bigcirc & & & & \frac{2}{(s+n\mu_2+\lambda)^3} \end{pmatrix}$$

今、式(2) で求められた $\tilde{G}_S(s)$ が溢れ呼の生起間隔密度行列のラプラス変換になっていることに注意しよう。これは、Descloux [12] と同様の議論により導かれる。即ち、ポアソン到着過程の無記憶性により、溢れ呼の生起時点の状態と全サーバ保留状態を同一視できる。このことは、溢れ呼の生起間隔と全サーバ保留の状態から次の溢れ呼が生起するまでの時間が、同じ分布とみなせることを示している。従って、溢れ呼の生起過程は、生起間隔分布のラプラス・スティルチェス変換が $\tilde{G}_S(s)$ であるオーダ $S+1$ のセミマルコフ核をもつマルコフ再生過程として特性づけられ、以下の定理が成立する。

定理 2.2

溢れ呼の生起間隔の平均 α と変動係数 C_v は以下となる。

$$(5) \quad \alpha = -p \tilde{G}_S'(0) e^c$$

$$(6) \quad C_v = \sqrt{p \tilde{G}_S''(0) e^c - \alpha^2} / \alpha$$

ここに、 p は

$$(7) \quad p \tilde{G}_S(0) = p, \quad p e^c = 1$$

をみたす平衡ベクトル、 e^c はすべての要素が1のオーダー $S+1$ の縦ベクトル。

(証明)

p を、溢れ呼が生起したという条件のもとでの定常状態確率ベクトルとして定義する。0時点で溢れ呼が生起したとすると、次の溢れ呼が $(t, t+dt)$ で生起する確率が $G_S(t)dt$ となる。従って、溢れ呼の生起時点の連鎖をとると、

$$p = p \int_0^{\infty} G_S(t) dt$$

が成立し、式(7)を得る。式(7)の第2式は正規化条件を表す。

式(5),(6)は平均と変動係数の定義より自明である。

p は、到着過程のポアソン性を使うと定理2.2と独立に、以下のように求まる。つまり、ポアソン性より呼の生起時点と任意時点における定常状態確率は等しい。今考えている系のレベル n の定常状態確率ベクトル q_n は、各状態確率が積形式をもつ [13]ことに注意すると、

$$q_n = c \left(\frac{(k_1 \lambda / \mu_1)^n}{n!}, \dots, \frac{(k_1 \lambda / \mu_1)^{n-i}}{(n-i)!} \cdot \frac{(k_2 \lambda / \mu_2)^i}{i!}, \dots, \frac{(k_2 \lambda / \mu_2)^n}{n!} \right)$$

となる。ここに c は正規化定数。

定理 2.2 で定義されたベクトル p は、溢れ呼が生起したという条件の下での系の定常状態確率ベクトルであるから、 q を正規化することにより以下となる。

$$(8) \quad p = \left(\binom{S}{0} \left(\frac{k_1 \mu}{\mu_1} \right)^S, \dots, \binom{S}{i} \left(\frac{k_1 \mu}{\mu_1} \right)^{S-i} \left(\frac{k_2 \mu}{\mu_2} \right)^i, \dots, \binom{S}{S} \left(\frac{k_2 \mu}{\mu_2} \right)^S \right)$$

3. 溢れ呼量特性

回線群からの溢れ呼を特性づけるものとして、通常、分散係数が用いられる。分散係数は、この溢れ呼が仮想無限回線群に加わったとした時の系内呼数の分散と平均の比として定義される。前節で求めた溢れ呼が保留時間分布 $1 - k_1 \exp(-\mu_1 t) - k_2 \cdot$

$\exp(-\mu_2 t)$ を持つ無限回線群に加わる場合の系内呼数の平均、分散及び分散係数は、式(8)の p 及び式(2)の $\tilde{G}_S(s)$ をマルコフ再生入力、超指数保留時間無限サーバモデル $MR/H_m/\infty$ の理論[14]に適用することにより以下と表すことができる。

定理 3.1

$$(9) \quad m = \frac{\lambda}{\mu} E_b, \quad v = 2b - m^2 + m, \quad z = v/m$$

ここに、 E_b は一次回線群の呼損率でアーランB式

$$(10) \quad E_b = \frac{1}{S!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^S / \sum_{i=0}^S \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i$$

$$(11) \quad b = \left(1 + \frac{2\mu_1}{k_1} \frac{k_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) b_1 + \left(1 + \frac{2\mu_2}{k_2} \frac{k_1}{\mu_1 + \mu_2} \right) b_2$$

$$(12) \quad b_i = \lambda E_b k_i^2 p \tilde{G}_S(\mu_i) (I - \tilde{G}_S(\mu_i))^{-1} e^c / 2\mu_i$$

式(11)は、無限溢れ回線上の系内呼数分布の2項積率を表し、極めて重要である。bは、ラプラス・スティルチェス変換形 $\tilde{G}_S(s)$ の μ_1, μ_2 における値のみで表されており、前節で求めた溢れ呼生起間隔の変動係数の場合に要した1次・2次微分の値(式(5)、(6))は不要である。式(12)の b_i は、位相iにいる呼の呼数分布の2項積率を表す。これは位相iに入る溢れ呼の生起間隔分布のラプラス・スティルチェス変換が、 $k_i(I - (1 - k_i)\tilde{G}_S(s))^{-1}\tilde{G}_S(s)$ となることを考えると、Franken[17]のMR/M/∞の理論より求まる。式(11)は、この理論で求まったものを、 $1 + 2\mu_1 k_2 / k_1(\mu_1 + \mu_2)$ と $1 + 2\mu_2 k_1 / k_2(\mu_1 + \mu_2)$ で重みづけて加えることにより求まることを示している。 $\mu = \mu_1 = \mu_2$ とすると、 $b_i = k_i b$, $b_1/k_1 + b_2/k_2 = b$ が成立し、Cooper[15]の結果と一致することがわかる。

4. 数値例と考察

図2、3に生起呼量 $a = \lambda / \mu$ 、回線数を固定した場合の、保留時間の変動係数 C_s と溢れ呼の生起間隔の変動係数 C_v の関係を示す。但し、保留時間分布は対称形の2次の超指数分布とし、平均と変動係数を与え、2つのパラメータを決定した。図より、変動係数が増加するに従い、溢れ呼の生起間隔のそれも増加することがわかる。

図4、5に、保留時間の変動係数 C_s と無限回線群上の系内呼数の分散係数の数値例を示す。保留時間の変動の増加に伴い、分散係数が減少している。従って、従来の指数保留時間型の等価ランダム法は危険側の回線数算出になるのではないかという心配は不要である。むしろ、能率よい電話網を実現するため、算出回線数の削減を考えてもよい。ただし、現局のデータ解析によれば、保留時間の変動係数は1.5~2.0程度であるので、従来の設計法をそのまま踏襲してよいだろう。

Eckberg [16]は、保留時間分布をパラメータとした分散係数を定義し、平均保留時間を0、あるいは無限大に近づけたときの分散係数の挙動を調べている。その結果、

入力の変動がポアソン呼より大きい場合、系内呼数の変動は保留時間の変動の増加と共に緩和されるであろうという予想を行っている。図4、5は、このEckbergの予想を裏づけるものである。溢れ呼の生起間隔の変動は保留時間の変動の増加に伴い増加するにもかかわらず、無限溢れ回線群における変動が逆になるということは、無限回線上の保留時間分布の影響が極めて大きいことを示している。保留時間の変動は、溢れ呼の生起間隔の変動迄も吸収していることは注目に値する。この特性は即時系特有のものである。きまぐれな到着をする客にはきまぐれなサーバをつけた方がよいということが言える。

5. むすび

保留時間が超指数分布に従う即時式 $M/H_2/S/S$ からの溢れ呼量特性を解析した。本研究の発端は、現局データ分析の結果、保留時間分布の指数性が棄却され、保留時間分布は指数分布より変動の大きい超指数分布と同定されたことにより、現在の回線設計法の見直しが要求されたところにある。 $M/H_2/S/S$ からの溢れ呼生起過程は再生とはならない。これをマルコフ再生過程とみなし、セミマルコフ核のラプラス・スティルチェス変換を導出した。さらに、この溢れ呼を入力とし持つ無限超指数回線モデル $MR/H_2/\infty$ の系内呼数の平均、分散及び分散係数の公式を導き、溢れ呼量特性を定量化した。この結果、以下のことがわかった。

” 保留時間の変動係数が増加するに従い溢れ呼量の分散係数は減少する。従って、従来の指数保留時間型等価ランダム法は回線数を多めに算出し、安全側の設計を与える。但し、保留時間の変動係数は高々2程度であるという現局データ解析による結論を考えると、回線数算出における保留時間のロバストネスは十分正当化できる。”

謝辞

日頃より御指導いただく当研究所 橋田温特別研究室長、川島幸之助トラヒック研究室長、松田潤主幹研究員に深謝する。

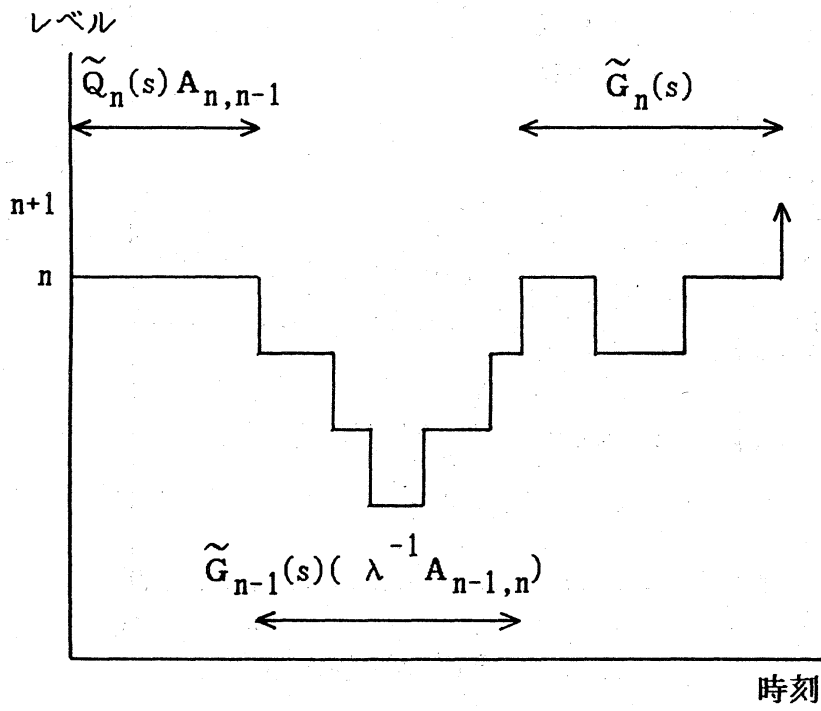


図1. レベル n から n+1 への初通過

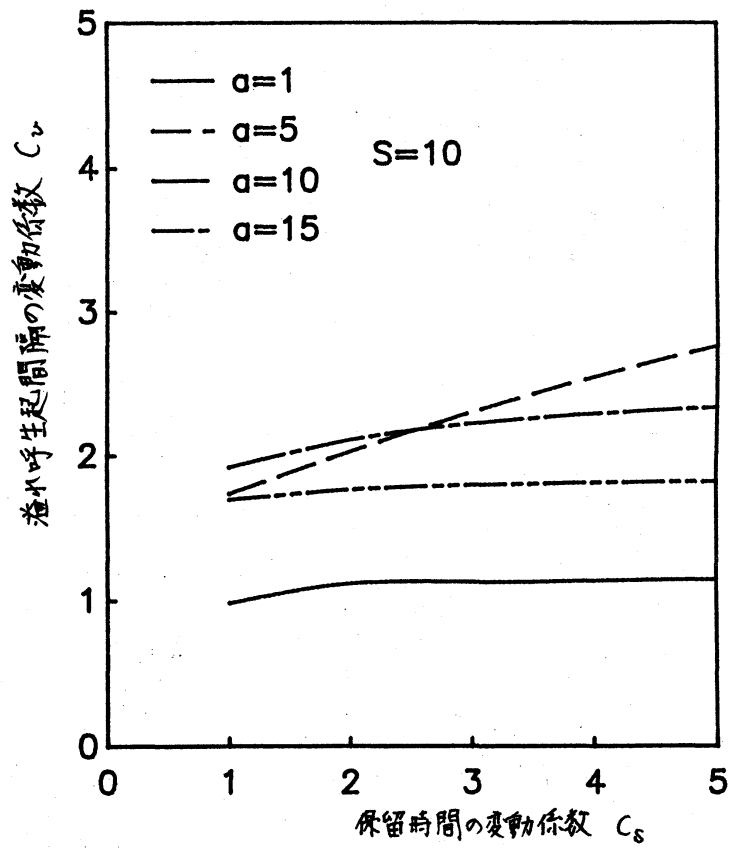


図2. 溢れ呼生起間隔の変動係数

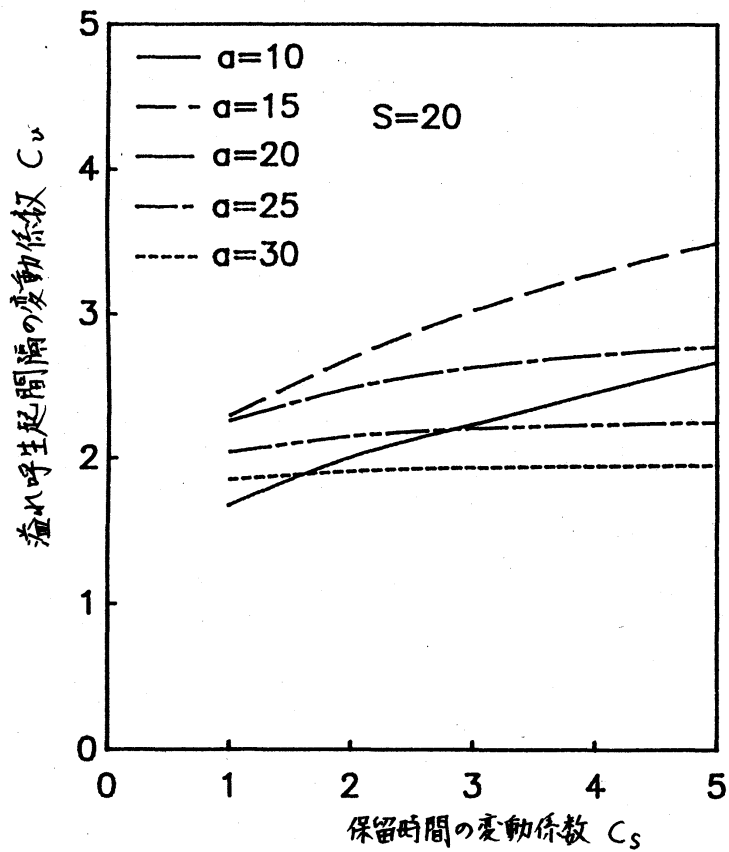


図3. 溢れ呼生起間隔の変動係数

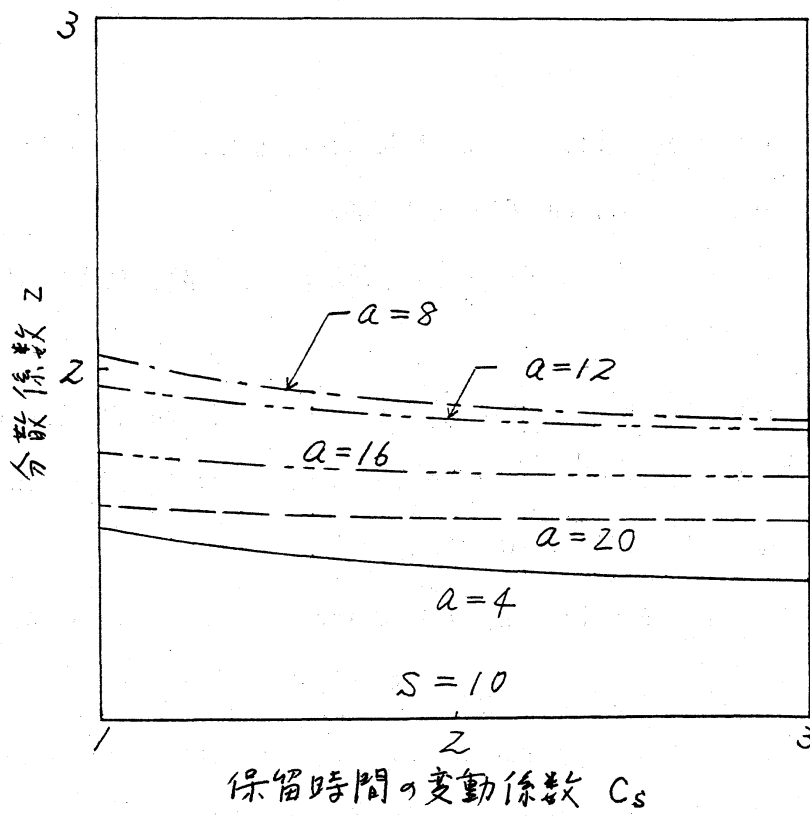


図4. 溢れ呼量の分散係数

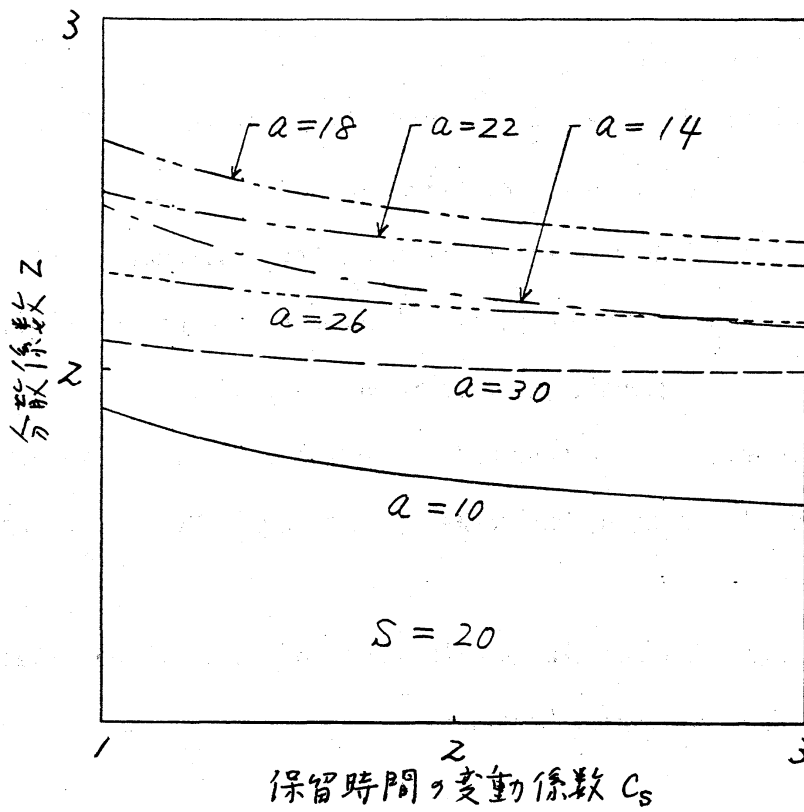


図5. 溢れ呼量の分散係数

参考文献

- [1] R. I. Wilkinson, "Theories for toll traffic engineering in the USA," Bell Syst. Tech. J., 35, pp.421-514 (1956).
- [2] 竹森、白井：トラヒックデータ分析と網設計への反映、信学技報、SE84-55 (1984).
- [3] O. Hellman, "Trunking problem," Oper. Res., 12, pp.276-280 (1964).
- [4] P. J. Burke, "The overflow distribution for constant holding time," Bell Syst. Tech. J., 50, pp.3195-3210 (1971).
- [5] V. B. Iversen, "Analyses of real traffic processes based on computerized measurements," Ericsson Tech., 29, pp.3-64 (1973).
- [6] M. F. Neuts, "Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models," Baltimore, The Johns Hopkins Univ. Press (1981).
- [7] 町原：GI/M/S/Kの溢れ呼生起過程、昭和56年度信学会情報・システム部門全国大会、447 (1981).
- [8] F. Machihara, "On the overflow processes from the $PH_1+PH_2/M/S/K$ queue," in Proc. 10th ITC, Montreal (1983).
- [9] J. Keilson, U. Sumita and M. Zachman, "Row-continuous finite Markov chains, structure and algorithm," Technical Report no.8115, Graduate School of Management, Univ. of Rochester (1981).
- [10] D. P. Gaver, P. A. Jacobs and G. Latouche, "Finite birth-and-death models in randomly changing environment," Adv. Appl. Prob., 16, pp.715-731 (1984).
- [11] K. L. Chung, "Markov chains with stationary transition probabilities," Second Ed., Springer, Berlin (1967).

- [12] A. Descloux, "On overflow processes of trunk groups with Poisson inputs and exponential service times," *Bell Syst. Tech. J.*, 42, pp.383-397 (1963).
- [13] 藤木、雁部：通信トラヒック理論、丸善(1980)。
- [14] 町原：マルコフ再生入力超指数サービス無限サーバモデルについて、OR学会春季研究発表会アブストラクト集(1986)。
- [15] R. B. Cooper, "Introduction of Queueing Theory," Macmillan, New York (1972)。
- [16] A. E. Eckberg, "Generalized peakedness of teletraffic processes," in *Proc. 10th ITC, Montreal* (1983).
- [17] V. P. Franken, "Erlangsche Formeln fuer semimarkovschen Eingang," *Elec. Infor. Kyb.*, 4, pp.197-204 (1968).
- [18] E. Çinlar, "Introduction to Stochastic Processes," Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey(1975).