

指数分布形モデル状態方程式の位相分布形モデル状態方程式
への自動変換法

N T T 電気通信研究所 林 善士 (Zenji Hayashi)

N T T 電気通信研究所 能条 哲 (Satoshi Nojo)

1. まえがき

システムのトラヒック評価あるいは信頼性評価には、状態方程式による解析方法が実用上、多く用いられている。状態方程式による解析方法は指数分布形モデルに限らず、位相分布形モデルに対しても適用できる。

実際のシステム特性をモデル化する時、状態方程式を作成するのが容易な指数分布形モデルでは不十分で、位相分布形モデルとして扱うことが必要な場合が少なくない。従って、位相分布形モデルの状態方程式による解析方法は重要な課題である。しかしながら、位相分布形モデルの状態方程式は一般的に複雑で、状態方程式を作成するのに時間を要する。

筆者らは、作成の容易な指数分布形モデル状態方程式から位相分布形モデル状態方程式への変換が規則的に出来ることに着目し、自動変換アルゴリズムを検討した。

2 章では、指数分布形モデルでの状態遷移図の意味を考え、3 章では位相分布形モデルへ変換する場合の基本的な考

え方について述べる。4～6章では自動変換アルゴリズムと具体例について述べる。

状態遷移図はトラフィック理論においては呼の状態（呼の到着、サービス中等）、信頼性では機器の状態（故障の発生、修理中等）を表わす。ここでは、説明を統一化するために、呼の状態を表すものとして説明する。

2. 指数分布形モデルでの状態遷移図の意味

まず、最初に指数分布形モデルの状態遷移図の意味について考える。

図2.1の場合を考える。ここで、 $\alpha_1 \sim \alpha_9$ は状態、 μ_1, μ_2 は指数分布の平均の逆数で平均到着率、平均サービス率等を表す。 $m_{12} \sim m_{29}, n_{13} \sim n_{27}$ は μ_1, μ_2 の係数で定数である。この時、図2.1は次の様に解釈することができる。

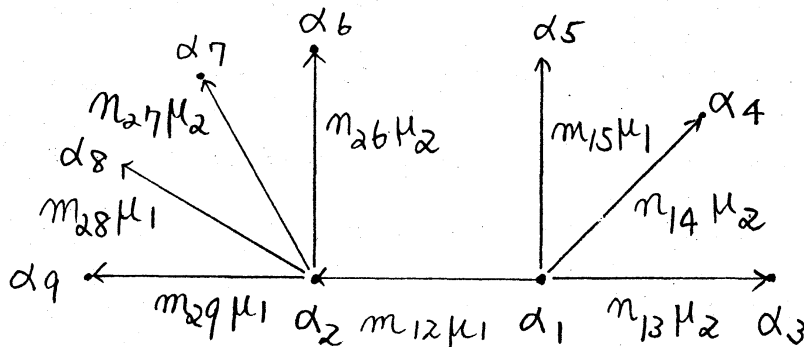


図2.1 指数分布形モデルにおける状態遷移図の例

① 状態 α_1 には平均 $1/\mu_1$ の指数分布で遷移する呼の数が $(m_{12} + m_{15})$ 個あり、平均 $1/\mu_2$ の指数分布で遷移する呼の数が $(n_{13} + n_{14})$ 個ある。

同様に、状態 α_2 では平均 $1/\mu_1$ の指数分布で遷移する呼の数が $(m_{28} + m_{29})$ 個あり、平均 $1/\mu_2$ の指数分布で遷移する呼の数が $(n_{26} + n_{27})$ 個ある。

② 状態 α_1 から状態 α_2 、 α_5 に対しては各々遷移率 $m_{12}\mu_1$ 、 $m_{15}\mu_1$ で遷移している。このことは、①で述べた $(m_{12} + m_{15})$ 個の呼のうち、1つが平均 $1/\mu_1$ の指数分布を終了して状態 α_2 または α_5 になることを意味している。状態 α_2 に遷移するか、状態 α_5 に遷移するかの確率はそれぞれ $m_{12}/(m_{12} + m_{15})$ 、 $m_{15}/(m_{12} + m_{15})$ である。

③ 状態 α_1 で平均 $1/\mu_1$ の指数分布をもつ $(m_{12} + m_{15})$ 個の呼のうち②で遷移しなかった $(m_{12} + m_{15}) - 1$ 個は状態 α_2 、 α_5 にそのまま遷移する。状態 α_2 では、①で述べたように、平均 $1/\mu_1$ の指数分布で遷移する呼は $(m_{28} + m_{29})$ 個ある。従って、状態 α_1 から状態 α_2 へ遷移したことによって、平均 $1/\mu_1$ の指数分布で遷移する呼が、 $(m_{28} + m_{29}) - ((m_{12} + m_{15}) - 1)$ 個だけ（注参照）増加したことになる。

④ 状態 α_1 からは $(m_{12} + m_{15})$ 個の呼のうち1つが遷移して状態 α_2 になるが、状態 α_1 で平均 $1/\mu_2$ の指数分布で遷移する $(n_{13} + n_{14})$ 個の呼には何ら変化がない。状態 α_2 では平均 $1/\mu_2$ の指数分布で遷移する呼が $(n_{26} + n_{27})$ 個あるので、結局、状態 α_1 から状態 α_2 へ遷移したことによって $(n_{26} + n_{27}) - (n_{13} + n_{14})$ 個だけ増加したことになる。

(注) サービス時間を例にとれば、正であれば呼が待ち行列からサーバに呼が入ったことを意味し、0であれば入らなかったことを意味する。

3. 位相分布に変換する場合の考え方

2章では指数分布形モデル状態遷移図の意味について述べた。ここでは、これをもとに位相分布形モデルへ変換する場合の考え方について述べる。

平均 $1/\mu_1$ の指数分布を位相数 k の位相分布に変換する場合について述べるが、2つ以上の指数分布を変換する場合には、分布を1つずつ以下の考え方に従って逐次変換すればよい。

図 2.1 を用いて説明する。

① 指数分布形モデルの状態 α_1 では $(m_{12} + m_{15})$ 個の呼のうち1つが平均 $1/\mu_1$ の指数分布を終了し、状態 α_1 から

状態 α_2 または α_5 に遷移するが、位相分布形モデルでは位相分布の最後の位相（注参照）にある呼のうち1つが位相分布を終了して遷移する。

② 指数分布形モデルでは状態 α_1 から状態 α_2 、 α_5 等のように2つ以上の状態に分岐して遷移している。このとき、位相分布形モデルでも①で述べた最後の位相にある呼が分岐して遷移するが、その確率は指数分布形モデルと同じである。

③ 指数分布形モデルでは、状態 α_1 から状態 α_2 への遷移によって新たに、 $(m_{28} + m_{29}) - ((m_{12} + m_{15}) - 1)$ 個だけ平均 $1/\mu_1$ の指数分布で遷移する呼が増加するが、位相分布形モデルではこれらの呼は最初の位相（注参照）に入る。

$(m_{12} + m_{15}) - 1$ 個の呼に関しては状態の変化がないので、位相分布形モデルでは同じ位相に遷移する。

④ 平均 $1/\mu_2$ の指数分布で遷移する呼は、平均 $1/\mu_1$ の指数分布が位相分布となっても、何ら変化はない。

（注）例えば、5章で述べるような位相数 k のアーラン分布では、位相 k および位相 1 がそれぞれ最初の位相および最後の位相となる。

4. 位相分布形モデルでの状態空間

指数分布形モデル状態方程式を位相分布形モデル状態方程式に変換した時の位相分布形モデルの状態数について説明す

る。

ある指数分布形モデルに対し、サービス時間分布のみを指数分布（平均サービス率 μ ）から位相数 k の位相分布に変えた位相分布形モデルを考えるが、到着間隔分布等、他の分布にとっても全く同じである。

以下では、 α を上記指数分布形モデルの任意の状態とする。また、 $C(\alpha, \mu)$ を状態 α から遷移する遷移率の内、 μ を含む遷移率の係数の総和とする。これは、状態 α において平均サービス率 μ でサービス中の呼の総数となる。

$C(\alpha, \mu)$ 個がサービス中の時、位相分布形モデルでは次式を満たす、すべての組 (x_k, \dots, x_1) を状態としてとりうる。ここで、 x_i は位相 i でサービス中の呼数である。

$$x_1 + \dots + x_k = C(\alpha, \mu) \quad (1)$$

$$x_i \quad (i = 1, \dots, k) \text{ は非負整数}$$

このとき、位相分布形モデルにおける状態を以下のように記すものとする（注1参照）。

$$(\alpha, [x_k, \dots, x_1] \mu) \quad (2)$$

更に、平均 $1/\lambda$ の指数分布を位相数 k' の位相分布に変換した時の状態を

$$\begin{aligned}
 & (\alpha, [x_k, \dots, x_1]_{\mu}, \\
 & \qquad \qquad \qquad [y_{k'}, \dots, y_1]_{\lambda}) \quad (3) \\
 & y_{k'} + \dots + y_1 = C(\alpha, \lambda) \\
 & y_i \quad (i = 1, \dots, k') \text{ は非負整数}
 \end{aligned}$$

のように記すこととする。

式(1)を満たす状態の総数を $K(\alpha, \mu)$ とする。

$K(\alpha, \mu)$ は位相分布の位相数 k を用いて、次式で与えられ(注2参照)、指数分布形モデルでの1状態 α が位相分布形モデルに変換されることによって、 $K(\alpha, \mu)$ の状態に展開されることを意味する。

$$K(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} C(\alpha, \mu) + k - 1 \\ C(\alpha, \mu) \end{pmatrix} \quad (4)$$

(注1) 式(1)では理解を容易にするため、 k 次元として表現したが、実際の数値計算では1次元化した番号をとっている。 k 次元として状態をとると、 $\{C(\alpha, \mu)\}^k$ の状態数が必要となるが、このようにすれば $K(\alpha, \mu)$ だけですむため、メモリが節約できる。

(注2) k 個のものを、重複を許して $C(\alpha, \mu)$ 個選ぶ組み合わせの数である。式(4)については文献[(1)]を参照のこと。

5. 自動変換アルゴリズム

5.1 変換しようとする分布が1つの時

平均サービス率 μ の指数分布を位相数 k の位相分布に変えるものとする。

自動変換アルゴリズムは以下の通りである。

- ① 指数分布形モデルにおける任意の2状態に着目する。これを α_1 、 α_2 とする。2状態 α_1 、 α_2 に対し、それぞれ $C(\alpha_i, \mu)$ ($i=1,2$) を求める。
- ② 4章に述べた様に、状態 α_1 を次の $K(\alpha_1, \mu)$ 個の状態に展開する。

$$(\alpha_1, [x_{1k}, \dots, x_{11}]_{\mu}) \quad (5)$$

ただし $x_{1k} + \dots + x_{11} = C(\alpha_1, \mu)$
 x_{1i} ($i = 1, \dots, k$) は非負整数

同様に、状態 α_2 に対しても次の $K(\alpha_2, \mu)$ 個の状態に展開する。

$$(\alpha_2, [x_{2k}, \dots, x_{21}]_{\mu}) \quad (6)$$

ただし $x_{2k} + \dots + x_{21} = C(\alpha_2, \mu)$
 x_{2i} ($i = 1, \dots, k$) は非負整数

- ③ 2 状態間の遷移率が μ を含む時は、以下により②で展開した状態間の遷移率を定める。指数分布形モデルでの状態 α_1 、 α_2 では各々 $C(\alpha_1, \mu)$ 、 $C(\alpha_2, \mu)$ 個の呼がサービス中である。状態 α_1 での $C(\alpha_1, \mu)$ 個のうちの 1 つの呼がサービスを終了して、状態 α_2 に遷移している。このため、状態 α_2 では

$$C(\alpha_2, \mu) - (C(\alpha_1, \mu) - 1) \quad (7)$$

個の呼が新たに、サービスを開始したことになる。これに基づいて②で作成した状態の間の遷移率を 3 章で述べた遷移規則により定める。

- ④ 2 状態間の遷移率が μ を含まない時は、以下により②で展開した状態間の遷移率を定める。指数分布形モデルでの状態 α_1 、 α_2 では各々 $C(\alpha_1, \mu)$ 、 $C(\alpha_2, \mu)$ 個の呼がサービス中である。状態 α_1 から状態 α_2 への遷移によって

$$C(\alpha_1, \mu) - C(\alpha_2, \mu) \quad (8)$$

個の呼が新たに、サービスを開始したことになる。これに基づいて②で作成した状態の間の遷移率を 3 章で述べた遷移

規則により定める。

⑤すべての状態の組をつくすまで①～④を繰り返す。

5.2 変換しようとする分布が複数の時

まず最初に、1つの分布を5.1項の手順に従って、位相分布に変換する。次に、得られた位相分布形モデルをもとに、上述した同様の手順を用いて、再度自動変換すればよい。

6. 自動変換の具体例

位相分布として位相数 k のアーラン分布を例にとり、説明する(図6.1参照)。

アーラン分布は次の様に考えることができる。呼はまず最初に位相 k に入って、位相 $(k-1)$, \dots , 1 へと次々に移る。各位相で経過する時間は平均 $1/(k\mu)$ の指数分布に従う。この時、位相 k に入って、位相 1 から出るまでの時間はアーラン分布 E_k となる [(2)]。

以下では、サービス率 μ の指数分布を位相数 2 のアーラン分布に変える場合について説明する。

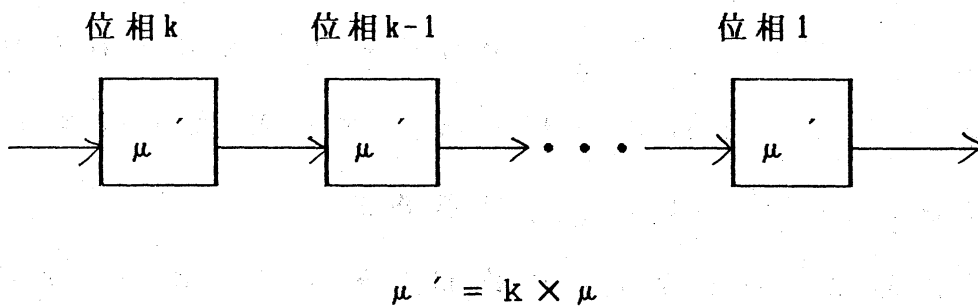


図6.1 位相数 k のアーラン分布

6.1 変換しようとする分布が1つの時

図6.2(a)に示す状態遷移図を考える。

- ① $C(\alpha_1, \mu) = 2$, $C(\alpha_2, \mu) = 2$ であるから、
 $K(\alpha_1, \mu) = 3$, $K(\alpha_2, \mu) = 3$ を得る。
- ② ①から、位相変換後の状態はそれぞれ、次の3状態に展開される。

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_i, [2, 0]_{\mu}) \\
 & (\alpha_i, [1, 1]_{\mu}) \\
 & (\alpha_i, [0, 2]_{\mu}) \\
 & (i = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{9}$$

- ③ 状態 α_1 , α_2 間の遷移率は $1 \times \mu$ であるので、次に5章の③を実行する。

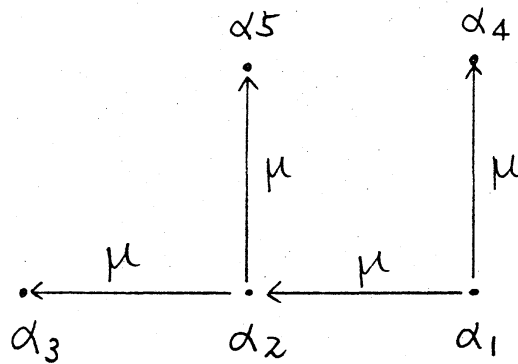
i) $(\alpha_1, [2, 0]_{\mu})$ では位相2で2呼がサービス中であるので、遷移率 $2\mu'$ で $(\alpha_1, [1, 1]_{\mu})$ に遷移する(ただし、 $\mu' = 2\mu$)。

ii) $(\alpha_1, [1, 1]_{\mu})$ では位相1, 2にそれぞれ1つずつある。位相2でサービス中の呼は遷移率 μ' で $(\alpha_1, [0, 2]_{\mu})$ に遷移する。

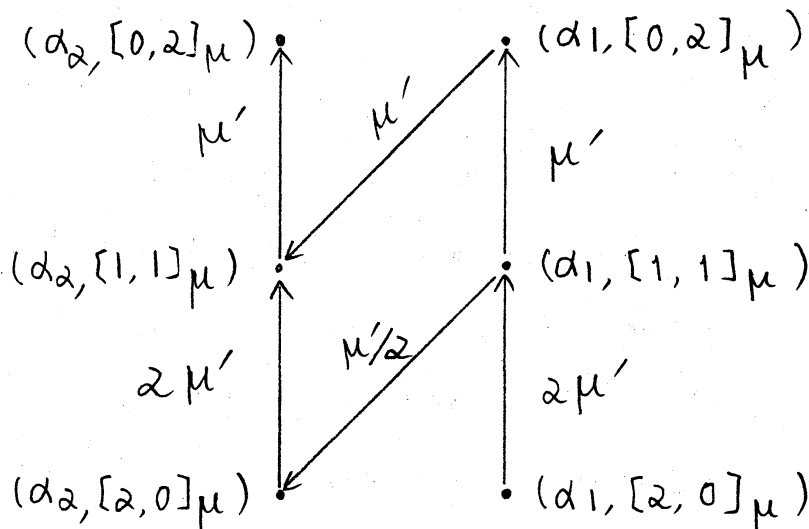
位相1にある呼がこの位相を終了すると、3章の②で述べたように、それぞれ確率 $1/2$ で分岐して遷移する。

状態 α_1 から α_2 に遷移することによって、式(7) から $2 - (2 - 1) = 1$ 個の呼が新たにサービスを開始する。それらは、必ず、位相 2 に入るのので、 $(\alpha_2, [2, 0]_\mu)$ に遷移する。その時の $(\alpha_1, [1, 1]_\mu)$ からの遷移率の合計は μ' であるが、 $(\alpha_2, [2, 0]_\mu)$ に遷移する確率は前述したように、 $1/2$ であるので結局、遷移率は $\mu' / 2$ となる。

以下、同様にして図 6.2(b) の状態遷移図を得る。



(a)



(b)

図 6.2 アーラン分布への変換例 1

次に、図 6.3(a) に示す遷移図を考える。

- ① $C(\alpha_1, \mu) = 1$, $C(\alpha_2, \mu) = 2$ であるから、
 $K(\alpha_1, \mu) = 2$, $K(\alpha_2, \mu) = 3$ を得る。
 ② ① から、状態 α_1 は次の 2 状態に展開される。

$$\begin{aligned} & (\alpha_1, [1, 0]_{\mu}) \\ & (\alpha_1, [0, 1]_{\mu}) \end{aligned} \quad (10)$$

また、状態 α_2 は次の 3 状態に展開される。

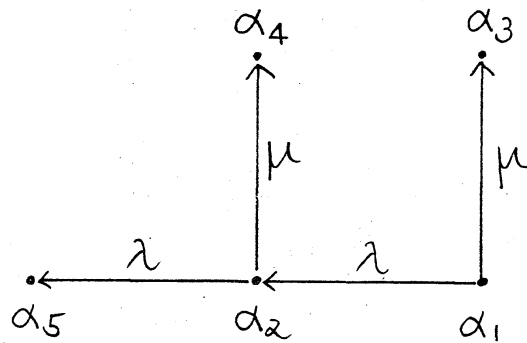
$$\begin{aligned} & (\alpha_2, [2, 0]_{\mu}) \\ & (\alpha_2, [1, 1]_{\mu}) \\ & (\alpha_2, [0, 2]_{\mu}) \end{aligned} \quad (11)$$

- ③ 状態 α_1 , α_2 の遷移率は λ であるから、5 章の ④ を実行する。

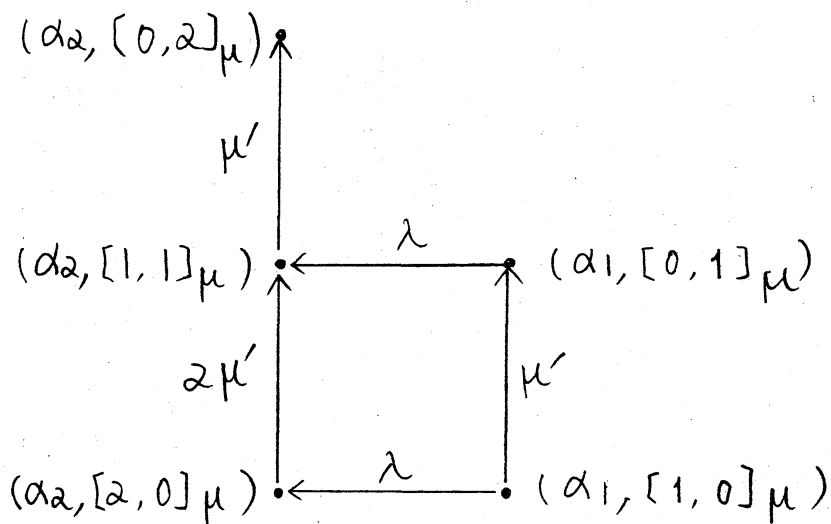
i) $(\alpha_1, [1, 0]_{\mu})$ と $(\alpha_1, [0, 1]_{\mu})$ との間の遷移率は図 6.2(b) の場合と同様である。

ii) 状態 α_1 から α_2 へ遷移することによって、式 (8) から、 $2-1=1$ 個の呼が新たにサービスを開始する。従って、 $(\alpha_1, [1, 0]_{\mu})$ は $(\alpha_2, [2, 0]_{\mu})$ に遷移し、その間の遷移率は λ となる。

同様にして、図 6.3(b) を得る。



(a)

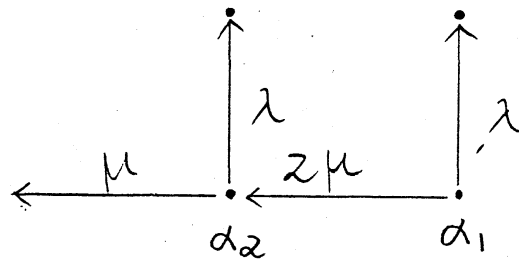


(b)

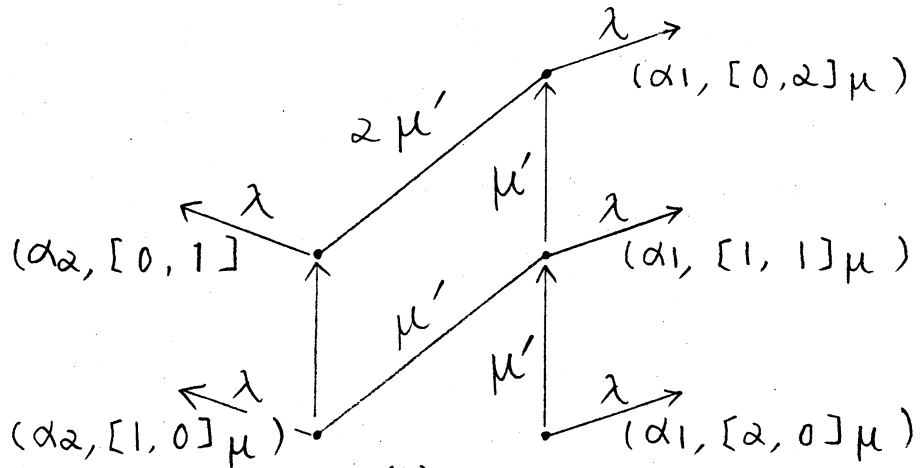
図6.3 アーラン分布への変換例2

6.2 変換しようとする分布が複数の時

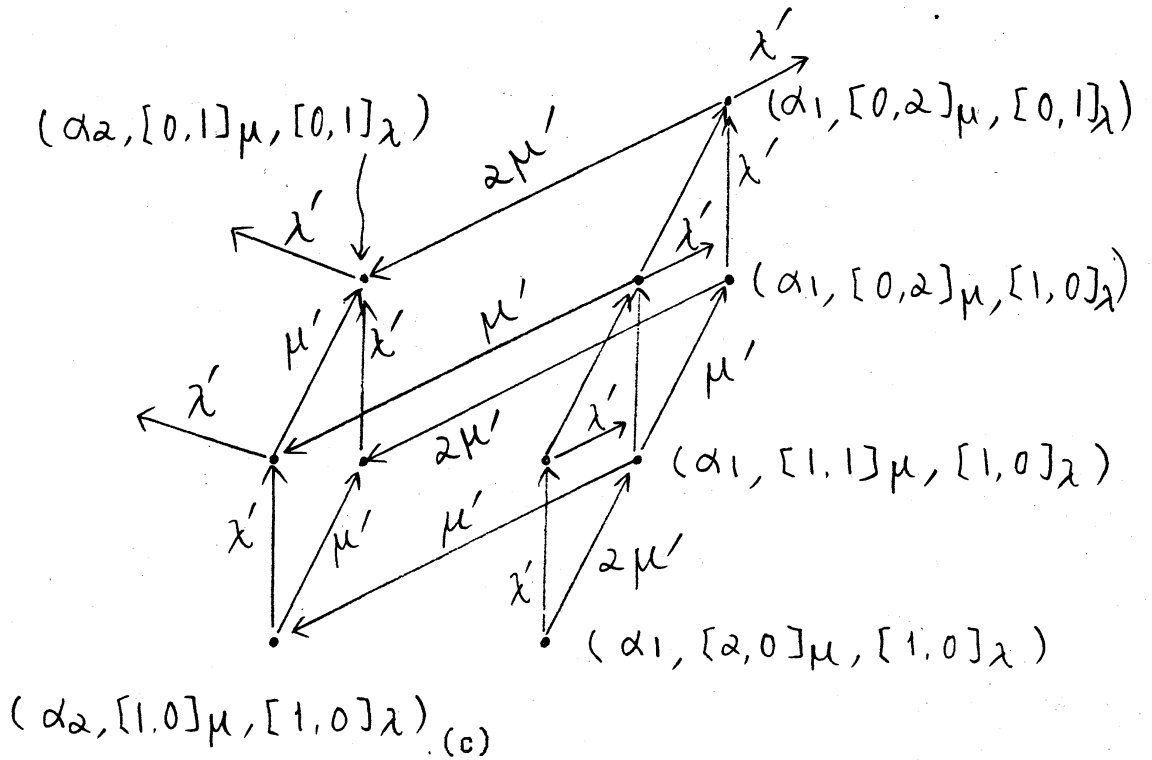
図6.4 に示す状態遷移図について考える。(b) は5.1 項のアルゴリズムに従って μ について位相分布形モデルに変換したものである。(c) は5.1 項のアルゴリズムを再度使って、 λ に関しても位相分布形モデルに変換したものである。



(a)



(b)



(c)

図6.4 アーラン分布への変換例3

7. むすび

本稿では、指数分布形モデル状態方程式の位相分布形モデル状態方程式への自動変換法について述べた。

今後、位相分布形モデル状態方程式の規則性を考慮した効率的な数値計算法の検討が必要である。

文献

- (1) W.Feller: "An introduction to probability theory and its applications", John Wiley & Sons(1957).
- (2) 藤木、雁部: "通信トラヒック理論", 丸善(1980).