数理解析研究所講究録
第599巻 1986年 11-23

ある種の巾級数値の代数的独立性の必要十分条件

奈良女子大学 西岡久美子 (Kumiko Nishioka)

以下で、Kは有限次代数体とし、その整数環を$\mathcal{O}_K$で表わす。

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{e_k}, \quad a_k \in K^{\times}, \quad 0 \leqq e_k < e_{k+1}$$

とし、$f(z)$の収束半径をRとする。

$$A_k = \max\{1, \overline{|a_0|}, \overline{|a_1|}, \cdots, \overline{|a_k|}\}$$

$$M_k = \min\{d \in \mathbb{N} \mid da_0, da_1, \cdots, da_k \in \mathcal{O}_K\}$$

と定義する。ここで、代数的数aに対して$\overline{|a|}$はaの共役の絶対値の最大値を表わす。$f(z)$は

(1) $$\lim_{k\to\infty} (e_k + \log M_k + \log A_k)/e_{k+1} = 0$$

をみたすとする。Cijsouw and Tijdeman [2] より、代数的数 α $(0<|\alpha|<R)$ に対して $f(\alpha)$ は超越数になることがわかるが、更に、Bundschuh and Wylegala [1] より、代数的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ $(0<|\alpha_i|<R)$ の絶対値が相異なれば、$f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ は代数的独立になることがわかる。ここで

は代数的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ $(0<|\alpha_i|<R)$ に対して $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ が代数的独立になるための必要十分条件を与える。

<u>定義。</u> $e_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $e_k \nearrow$ とする。代数的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ が $\{e_k\}$-dependent とは、ある数 γ と1の巾根 ζ_i $(1 \leqq i \leqq s)$ 及び少くとも1つは0でない数 $d_1, \cdots, d_s$ が存在して、

$$\alpha_i = \zeta_i \gamma \quad (1 \leqq i \leqq s)$$

$$\sum_{i=1}^{s} d_i \zeta_i^{e_k} = 0 \quad (k \text{は十分大きな任意の自然数})$$

が成り立つことをいう。

<u>定理1.</u> 代数的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, $0<|\alpha_i|<R$ $(1 \leqq i \leqq n)$ に対して、次の(i), (ii), (iii)は同値である。

(i) $f^{(l)}(\alpha_i)$ $(1 \leqq i \leqq n,\ 0 \leqq l)$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的従属。

（ここで $f^{(l)}(z)$ は $f(z)$ の l 次導関数）

(ii) $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ のある空でない部分集合が $\{e_k\}$-dependent.

(iii) $1, f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上線形従属。

<u>例1.</u> $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0<|\alpha_i|<1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とする。

$$f^{(l)}(\alpha_i) \ (1 \leqq i \leqq n,\ 0 \leqq l) \text{ が代数的独立}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_i/\alpha_j \neq 1 \text{ の巾根} \ (1 \leqq i < j \leqq n)$$

これはMasserの予想を肯定的に解決している。

例2. $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!+k}$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0<|\alpha_i|<1$ $(1\leq i\leq n)$ とする。

$f^{(\ell)}(\alpha_i)$ $(1\leqq i\leqq n,\ 0\leqq \ell)$ が代数的独立

$\Leftrightarrow$ $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(1\leqq i<j\leqq n)$

定理1の証明。(ii) ⇒ (iii), (iii) ⇒ (i) は明らかである。(i) ⇒ (ii) を証明する。$f^{(\ell)}(\alpha_i)$ $(1\leqq i\leqq n,\ 0\leqq \ell\leqq L)$ が代数的従属で $n-1$ 個の α_i に対しては $f^{(\ell)}(\alpha_i)$ は代数的独立であると仮定してよい。$K\ni\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ として一般性を失わない。$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の index を適当につけかえて次をみたすようにできる。

$$|\alpha_{11}|=\cdots=|\alpha_{1s_1}|=|\alpha_{21}|=\cdots=|\alpha_{2s_2}|=\cdots$$
$$=|\alpha_{t1}|=\cdots=|\alpha_{ts_t}|>|\alpha_{t+1,1}|\geqq\cdots\geqq|\alpha_{t+1,s_{t+1}}|,$$
$$s_1+s_2+\cdots+s_{t+1}=n$$

α_{ig}/α_{i1} $(1\leq i\leq t,\ 1\leqq g\leqq s_i)$ は1の巾根。

α_{i1}/α_{j1} $(1\leqq i<j\leqq t)$ は1の巾根でない。

$\mathbb{C}^{n(L+1)}$ の元 U, U_m を次によって定義する。

$$U=\left(\alpha_{ig}^{\ell} f^{(\ell)}(\alpha_{ig})\right)_{1\leqq i\leqq t+1,\ 1\leqq g\leqq s_i,\ 0\leqq \ell\leqq L},$$

$$U_m=\left(\sum_{k=0}^{m-1} P_\ell(e_k)\,a_k\,\alpha_{ig}^{e_k}\right)_{1\leqq i\leqq t+1,\ 1\leqq g\leqq s_i,\ 0\leqq\ell\leqq L}.$$

ここで $P_0(X)=1$, $P_\ell(X)=X(X-1)\cdots(X-\ell+1)$ である。この時 $\lim_{m\to\infty} U_m=U$ である。$F(U)=0$ をみたす0でない多項式

$F \in \mathbb{Z}[\{y_{iq}^{(l)}\}_{1 \leqq i \leqq t+1,\ 1 \leqq q \leqq s_i,\ 0 \leqq l \leqq L}]$ が存在する。Fはこのようなもののうち、total degree が最小であるとしておく。仮定より、任意の i, q $(1 \leqq i \leqq t+1,\ 1 \leqq q \leqq s_i)$ に対して、$0 \leqq l \leqq L$ なる l で $\partial F/\partial y_{iq}^{(l)} \neq 0$ をみたすものが存在する。$\partial F/\partial y_{iq}^{(l)}$ の total degree は F の total degree より小さいから、$\partial F/\partial y_{iq}^{(l)}(U) \neq 0$ である。テーラー展開することにより、

$$
\begin{aligned}
-F(U_m) &= F(U) - F(U_m) \\
&= \sum_{|J| \geqq 1} J!^{-1} \partial^{|J|} F/\partial y^J (U_m) \cdot (U - U_m)^J
\end{aligned}
$$

を得る。$J = (j_{iq}^{(l)})_{1 \leqq i \leqq t+1,\ 1 \leqq q \leqq s_i,\ 0 \leqq l \leqq L}$, $j_{iq}^{(l)} \geqq 0$ で $J!$, $\partial^{|J|}F/\partial y^J$, $(U-U_m)^J$ は通常の記号である。この時、次をみたす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad -F(U_m) &= \sum_{i=1}^{t} \sum_{l=0}^{L} \sum_{q=1}^{s_i} \partial F/\partial y_{iq}^{(l)}(U_m) P_l(e_m) a_m \alpha_{iq}^{e_m} \\
&\quad + O(e_m^L |a_m| |\alpha_{t+1,1}|^{e_m}) + O(e_m^L |a_m| |\alpha_{11}|^{e_m} \theta^{e_m}) \\
&= O(\theta^{e_m})
\end{aligned}
$$

一方 total degree $F = g$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の共通分母を d とすると、

$$
\begin{aligned}
&(M_{m-1} d^{e_{m-1}})^g F(U_m) \in O_K \\
&\overline{|F(U_m)|} = O((A_{m-1} C_1^{e_{m-1}})^g).
\end{aligned}
$$

(以下で、$C_1, C_2, \cdots$ は正定数を表わす。) 無限に多くの m に対して、$F(U_m) \neq 0$ と仮定すると、 fundamental inequality より

$$e_m \log\theta + c_2 \geqq \log|F(U_m)| \geqq -c_3(e_{m-1} + \log M_{m-1} + \log A_{m-1})$$

が無限に多くの m について成り立つが(1)より $\log\theta \geqq 0$ となり矛盾である. 従って m が十分大きければ $F(U_m)=0$ でなければならない。故に

(3) $$\sum_{i=1}^{t}\sum_{l=0}^{L} P_l(e_m)\sum_{g=1}^{s_i} \partial F/\partial y_{ig}^{(l)}(U_m)\,\alpha_{ig}^{e_m} = O(A^{e_m})$$

を得る。ここで A は $\max(|\alpha_{t+1,1}|, |\alpha_{11}|\theta) < A < |\alpha_{11}|$ をみたす数である。

i, l $(1\leqq i\leqq t,\ 0\leqq l\leqq L)$ に対して. $\{\partial F/\partial y_{ig}^{(l)}\}_{1\leqq g\leqq s_i}$ の部分集合で $\overline{\mathbb{Q}}$ 上線形独立な最大個数のものを $\{\partial F/\partial y_{ig}^{(l)}\}_{g\in Q_i^{(l)}}$ とする。

(4) $$\begin{cases} Q_i^{(l)} = \phi \Rightarrow \displaystyle\sum_{g=1}^{s_i} \partial F/\partial y_{ig}^{(l)}(U_m)\,\alpha_{ig}^{e_m} = 0 \\ Q_i^{(l)} \neq \phi \Rightarrow \displaystyle\sum_{g=1}^{s_i} \partial F/\partial y_{ig}^{(l)}(U_m)\,\alpha_{ig}^{e_m} \end{cases}$$

$$= \sum_{g\in Q_i^{(l)}} \partial F/\partial y_{ig}^{(l)}(U_m)\sum_{p=1}^{s_i} d_{igp}^{(l)}\,\alpha_{ip}^{e_m}$$

ここで $(d_{ig1}^{(l)}, \cdots, d_{igs_i}^{(l)}) \neq (0, \cdots, 0)$

を得る。任意の i に対して. $Q_i^{(l)} \neq \phi$ となる l $(0\leqq l\leqq L)$ が存在する.

$$\alpha_{ig} = \zeta_{ig}\gamma_i \qquad (1\leqq g\leqq s_i)$$

$$\zeta_{ig}^{N} = 1 \qquad (1\leqq i\leqq t,\ 1\leqq g\leqq s_i)$$

とする。$1\leqq i\leqq t$, $0\leqq l\leqq L$, $g\in Q_i^{(l)}$ なる (i, l, g) を1つとる。$\sum_{p=1}^{s_i} d_{igp}^{(l)}\zeta_{ip}^{e_k} = 0$ が十分大きな任意の自然数 k につい

て成り立つことを背理法で証明する。これは(ii)を導く。結論を否定すると次のような整数 a $(0 \leqq a < N)$ が存在する。$e_m \equiv a \pmod N$ なる m が無限に多く存在し，

$$\sum_{p=1}^{s_i} d_{iqp}^{(\ell)} \zeta_{ip}^{a} \neq 0.$$

任意の i, ℓ, q $(1 \leqq i \leqq t,\ 0 \leqq \ell \leqq L,\ q \in Q_i^{(\ell)})$ に対し，

$$D_{iq}^{(\ell)} = \sum_{p=1}^{s_i} d_{iqp}^{(\ell)} \zeta_{ip}^{a}$$

と定義し，

$$B = \{ (i, \ell, q) \mid D_{iq}^{(\ell)} \neq 0 \}$$

とおく。a のとり方より，$B \neq \phi$ である。D を $D_{iq}^{(\ell)}$ $((i, \ell, q) \in B)$ の共通分母とし，$(i, \ell, q) \in B$ に対し，

$$E_{iq}^{(\ell)}(m) = D M_{m-1}^{q}\ P_\ell(e_m)\ \partial F/\partial y_{iq}^{(\ell)}(U_m)\ D_{iq}^{(\ell)}$$

とおく。$\lim_{m\to\infty} U_m = U$ よりある正定数 M があって，$m > M$ なら，任意の $(i, \ell, q) \in B$ に対して，$E_{iq}^{(\ell)}(m) \neq 0$ である。(1), (3), (4) より，$e_m \equiv a \pmod N$ なる m に対して

(5) $$\sum_{(i, \ell, q) \in B} E_{iq}^{(\ell)}(m) \gamma_i^{e_m} = O(A^{e_m} \cdot M_{m-1}^{q})$$

また

(6) $$h(E_{iq}^{(\ell)}(m)) \leqq c_4^{\log e_m + e_{m-1} + \log M_{m-1} + \log A_{m-1}}$$

$h(\cdot)$ の説明は以下でする。(5) の形の和に Evertse [3] の定理 1 を適用するので，ここで Evertse の定理を述べておく。K 上の prime とは K 上の non-trivial な付値の同値類のことである。

$$S_K = \{\text{primes on } K\}$$
$$S_\infty = \{\text{infinite primes on } K\} \subset S_K$$

とする。$v \in S_K$, $v|_{\mathbb{Q}} = p$ のとき, $\| \ \|_v$ として, 次をみたすものをとる。

$$\|\alpha\|_v = |\alpha|_p^{[K_v : \mathbb{Q}_p]} \quad \text{for all } \alpha \in \mathbb{Q}.$$

この時, 積公式

$$\prod_{v \in S_K} \|\alpha\|_v = 1 \quad \text{for all } \alpha \in K^\times$$

が成り立つ。$X = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in P^n(K)$ に対して,

$$H_K(X) = H(X) = \prod_{v \in S_K} \max(\|x_0\|_v, \|x_1\|_v, \cdots, \|x_n\|_v)$$

と定義する。$\alpha \in K$ に対して,

$$h_K(\alpha) = h(\alpha) = H(1 : \alpha)$$

と定義する時, 次の形の fundamental inequality が成り立つ。$\alpha \in K^\times$ に対して,

$$-\log h(\alpha) \leqq \sum_{v \in S} \log \|\alpha\|_v \leqq \log h(\alpha)$$

ここで, S は S_K の任意の部分集合である。

S は S_∞ を含む S_K の有限部分集合とする。c は正の, d は負でない定数とする。$X \in P^n(K)$ が次の (i), (ii) をみたす時 (c, d, S)-admissible であるという。

(i) x_k は S-integer である。(すなわち $\|x_k\|_v \leqq 1$ if $v \notin S$)

(ii) $\displaystyle\prod_{v \in S} \prod_{k=0}^{n} \|x_k\|_v \leqq cH(X)^d$.

次の定理は Evertse [3] による：$c>0$, $0\leq d<1$, $n>0$ とせよ。この時、

$$x_0+x_1+\cdots+x_n=0$$

をみたし、$\{0,1,\cdots,n\}$ の任意の空でない真部分集合 $\{i_0,\cdots,i_s\}$ に対しては、

$$x_{i_0}+\cdots+x_{i_s}\neq 0$$

となるような (c,d,S)-admissible point は有限個しかない。

ここでは S として S_∞ を含み、$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の素因子をすべて含む S_K の有限部分集合をとる。$E_{iq}^{(l)}(m)\gamma_i^{e_m}$ は S-integer となる。

<u>命題1.</u> $(i_j,l_j,q_j)\in B$ $(j=1,2)$ $i_1\neq i_2$ とせよ。$m_1>m_2>M$ で m_1 が十分大きければ、

$$\left(E^{(l_1)}_{i_1q_1}(m_1)\gamma_{i_1}^{e_{m_1}} : E^{(l_2)}_{i_2q_2}(m_1)\gamma_{i_2}^{e_{m_1}}\right)$$
$$\neq\left(E^{(l_1)}_{i_1q_1}(m_2)\gamma_{i_1}^{e_{m_2}} : E^{(l_2)}_{i_2q_2}(m_2)\gamma_{i_2}^{e_{m_2}}\right)$$

<u>証明.</u> "=" が無限に多くの m_1 について成り立つとすると、

$$(\gamma_{i_1}/\gamma_{i_2})^{e_{m_1}-e_{m_2}}=E^{(l_2)}_{i_2q_2}(m_1)E^{(l_1)}_{i_1q_1}(m_2)E^{(l_1)}_{i_1q_1}(m_1)^{-1}E^{(l_2)}_{i_2q_2}(m_2)^{-1}$$

ここで右辺の height $\leq C_4^{4(\log e_{m_1}+e_{m_1-1}+\log M_{m_1-1}+\log A_{m_1-1})}$.

$\gamma_{i_1}/\gamma_{i_2}$ は1の巾根でないから、$h(\gamma_{i_1}/\gamma_{i_2})>1$ である。従って、$m_1\to\infty$ の時矛盾。

命題2. B_0はBの空でない部分集合とする. mが十分大きいとき,

$$\sum_{(i,\ell,q)\in B_0} E_{iq}^{(\ell)}(m)\gamma_i^{e_m} \neq 0$$

証明. $|B_0|$に関する帰納法で証明する. $|B_0|=1$の時には命題は成り立つ。$|B_0|\geqq 2$とする。

$$\sum_{(i,\ell,q)\in B_0} E_{iq}^{(\ell)}(m)\gamma_i^{e_m} = 0$$

が無限に多くのmについて成り立つとする。

Case 1. あるi_0 $(1\leqq i_0\leqq t)$に対して $(i,q,\ell)\in B_0$ なら $i=i_0$でなくてはならない時を考える。

$$\ell_0 = \max\{\ell \mid (i_0,\ell,q)\in B_0 \text{ for some } q\}$$

とおく。無限に多くのmに対して

$$P_{\ell_0}(e_m)\sum_{(i_0,\ell_0,q)\in B_0} \partial F/\partial y_{i_0 q}^{(\ell_0)}(U_m)\, D_{i_0 q}^{(\ell_0)}$$
$$= -\sum_{\substack{(i_0,\ell,q)\in B_0\\ 0\leqq \ell<\ell_0}} P_\ell(e_m)\,\partial F/\partial y_{i_0 q}^{(\ell)}(U_m)\, D_{i_0 q}^{(\ell)}$$

を得る。両辺を$P_{\ell_0}(e_m)$で割って$m\to\infty$とすれば

$$\sum_{(i_0,\ell_0,q)\in B_0} \partial F/\partial y_{i_0 q}^{(\ell)}(U)\, D_{i_0 q}^{(\ell_0)} = 0$$

を得る. total degree F の最小性より

$$\sum_{(i_0,\ell_0,q)\in B_0} \partial F/\partial y_{i_0 q}^{(\ell)}\, D_{i_0 q}^{(\ell_0)} = 0$$

でなければならない。これは$\{\partial F/\partial y_{i_0 q}^{(\ell_0)}\}_{q\in Q_{i_0}^{(\ell_0)}}$が$\overline{\mathbb{Q}}$上線形独立であったことに反する。

Case 2. $(i_j, l_j, g_j) \in B_0$ $(j=1,2)$ で $i_1 \neq i_2$ となるものが存在する時。$0<\varepsilon<1$ なる ε を fix する。Prop 1 と帰納法の仮定より、Evertse の定理を $c=1$, $d=1-\varepsilon$ の場合に適用すると、無限に多くの m に対して

$$\prod_{v\in S} \prod_{(i,l,g)\in B_0} \| E_{ig}^{(l)}(m)\gamma_i^{e_m}\|_v$$
$$> H(\cdots : E_{ig}^{(l)}(m)\gamma_i^{e_m} : \cdots)^{1-\varepsilon}$$

を得る。$\gamma_{i_1}/\gamma_{i_2}$ は 1 の巾根でないから、ある $v\in S_K$ に対して、$\|\gamma_{i_1}/\gamma_{i_2}\|_v > 1$ となる。すると、

$$\text{右辺} \geq \| E_{i_1 g_1}^{(l_1)}(m)/E_{i_2 g_2}^{(l_2)}(m)\|_v^{1-\varepsilon} \ \|\gamma_{i_1}/\gamma_{i_2}\|_v^{e_m(1-\varepsilon)}$$

となり、$\prod_{v\in S}\|\gamma_i\|_v = 1$ に注意すれば

$$c_5^{\log e_m + e_{m-1} + \log M_{m-1} + \log A_{m-1}} > \|\gamma_{i_1}/\gamma_{i_2}\|_v^{e_m(1-\varepsilon)}$$

を得る。$m\to\infty$ のとき、(1) に矛盾する。

定理の証明にもどる。$e_m \equiv a \pmod N$ なる m に対して、

(5) $$\sum_{(i,g,l)\in B} E_{ig}^{(l)}\gamma_i^{e_m} + \delta_m = 0, \quad \delta_m = O(A^{e_m} M_{m-1}^{g})$$

が成り立つ。ここで $E_{ig}^{(l)}\gamma_i^{e_m}$, δ_m は S-integer である。

Case 1. ある i_0 $(1\leq i_0\leq t)$ に対して、$(i,l,g)\in B$ なら $i=i_0$ でなければならない時を考える。

$$l_0 = \max\{l \mid (i_0, l, g)\in B \text{ for some } g\}$$

とおく。この時

$$P_{l_0}(e_m)\sum_{(i_0,l_0,q)\in B}\partial F/\partial y_{i_0 q}^{(l_0)}(U_m)\,D_{i_0 q}^{(l_0)}\,\gamma_{i_0}^{e_m}$$

$$=-\sum_{\substack{(i_0,l,q)\in B\\ 0\leqq l\leqq l_0}} P_l(e_m)\,\partial F/\partial y_{i_0 q}^{(l)}(U_m)\,D_{i_0 q}^{(l_0)}\,\gamma_{i_0}^{e_m}+O(A^{e_m})$$

両辺を $P_{l_0}(e_m)\gamma_{i_0}^{e_m}$ で割って $m\to\infty$ とすれば、$A<|\alpha_{11}|=|\gamma_{i_0}|$ より、

$$\sum_{(i_0,l_0,q)\in B}\partial F/\partial y_{i_0 q}^{(l_0)}(U)\,D_{i_0 q}^{(l_0)}=0$$

を得る。これは矛盾。

Case 2. $(i_j,\ l_j,\ q_j)\in B$ $(j=1,2)$ で、$i_1\neq i_2$ となるものが存在する時。ε は $0<\varepsilon<1$ をみたす任意の数とする。また $K\neq\mathbb{R}$ で、ある $v_0\in S_\infty$ に対し、$|\ |^2=\|\ \|_{v_0}$ であるとしてよい。命題1，命題2より、(5) に Evertse の定理を適用すると、$e_m\equiv a\pmod N$ で m が十分大きいなら、

$$\prod_{v\in S}\prod_{(i,l,q)\in B}\|E_{iq}^{(l)}(m)\|_v\prod_{v\in S}\|\sigma_m\|_v$$
$$>H(\cdots:E_{iq}^{(l)}(m)\gamma_i^{e_m}:\cdots:\sigma_m)^{1-\varepsilon}$$

を得る。

$$\text{左辺}\leqq C_6^{\log e_m+e_{m-1}+\log M_{m-1}+\log A_{m-1}}\Bigl(\prod_{\substack{v\in S\\ v\neq v_0}}\max_{(i,l,q)\in B}\|\gamma_i\|_v\Bigr)^{e_m}A^{2e_m}$$

$$\text{右辺}\geqq C_7^{\log e_m+e_{m-1}+\log M_{m-1}+\log A_{m-1}}\Bigl(\prod_{v\in S}\max_{(i,l,q)\in B}\|\gamma_i\|_v\Bigr)^{(1-\varepsilon)e_m}$$

従って、

$$C_8^{\log e_m+e_{m-1}+\log M_{m-1}+\log A_{m-1}}A^{2e_m}$$
$$\geqq|\alpha_{11}|^{2(1-\varepsilon)e_m}\Bigl(\prod_{\substack{v\in S\\ v\neq v_0}}\max_{(i,l,q)\in B}\|\gamma_i\|_v\Bigr)^{-\varepsilon e_m}$$

を得る。$m\to\infty$ の時，

$$2\log A \geqq 2(1-\varepsilon)\log|\alpha_{11}| - \varepsilon\log\Big(\prod_{\substack{v\in S\\ v\neq v_0}} \max_{(i,l,q)\in B}\|\gamma_i\|_v\Big)$$

ε は任意だったから，

$$\log A \geqq \log|\alpha_{11}|.$$

これは $A<|\alpha_{11}|$ に反する。以上により，定理が証明できた。

複素数体 $\mathbb{C}$ の代わりに，p-進体 C_p (p は素数) をとる時，西岡 [4] において，$f(z)$ の特殊値の代数的独立性が論じられているが，ここでは次の定理を得る。C_p は $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の p-進付値 $|\ |_p$ による完備化を表わし，$f(z)$ の C_p での収束半径を R_p，$\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$，$(0<|\alpha|<R_p)$ に対し，C_p での $f(z)$ の $z=\alpha$ での値を $f(\alpha)_p$ で表わす。

<u>定理 2.</u> 代数的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，$0<|\alpha_i|_p<R_p$ $(1\leqq i\leqq n)$ に対して，次の (i)(ii)(iii) は同値である。

(i) $f(\alpha_1)_p,\cdots,f(\alpha_n)_p$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的従属。

(ii) $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ のある空でない部分集合が $\{e_k\}$-dependent。

(iii) $1, f(\alpha_1)_p,\cdots,f(\alpha_n)_p$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上線形従属。

証明は $f(z)$ の導関数を考えないことを除いて，定理 1 の証明と全く同じである。

参考文献

1. P. Bundschuh und F.-J. Wylegala, Über algebraische Unabhängigkeit bei gewissen nichtfortsetzbaren Potenzreihen, Arch. Math. 34 (1980), 32-36.

2. P. L. Cijsouw and R. Tijdeman, On the transcendence of certain power series of algebraic numbers, Acta Arith. 23 (1973), 301-305.

3. J.-H. Evertse, On sums of S-units and linear recurrences. Compositio Math. 53 (1984), 225-244.

4. K. Nishioka, Algebraic independence of certain power series of algebraic numbers. to appear in J. Number Theory.

5. K. Nishioka, Algebraic independence of three Liouville numbers. to appear in Arch. Math.

6. K. Nishioka, Proof of Masser's conjecture on the algebraic independence of values of Liouville series. to appear in Proceedings of the Japan Academy.