数理解析研究所講究録
第 599 巻 1986 年 108-118

Analyticity of certain Dirichlet series.

東工大・理学部　高瀬幸一 (Koichi Takase)

§1. 問題　有限次代数体 F に対して、Φ を automorphic form on GL(2) over F とする。(automorphic form on GL(2) の一般論については Weil [13] を参照)。Φ は Hecke eigen form であるとして、$T(\mathfrak{a})\Phi = \Lambda(\mathfrak{a})\Phi$ とする ($\mathfrak{a}$ は F の integral ideal)。Φ に附随する standard L-function を

$$L(s,\Phi) = \sum_{\mathfrak{a}} \Lambda(\mathfrak{a})\cdot N(\mathfrak{a})^{-s}$$
$$= \prod_{\mathfrak{p}} (1-\Lambda(\mathfrak{p})\cdot N(\mathfrak{p})^{-s} + N(\mathfrak{p})^{1-2s})^{-1} \qquad (s\in\mathbb{C})$$

とする。ここで $\sum_{\mathfrak{a}}$ は F の integral ideal $\mathfrak{a}$ の上にわたる和、$\prod_{\mathfrak{p}}$ は F の prime ideal $\mathfrak{p}$ の上にわたる積で、$N(\mathfrak{a})$ は ideal $\mathfrak{a}$ の絶対ノルムである。$L(s,\Phi)$ は $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で絶対収束して、全 s-平面上へ有理型関数として解析接続される。そこで問題は、

問題　Dirichlet series $\sum_{0<n\in\mathbb{Z}} \Lambda(n)\cdot n^{-s}$ は全 s-平面上へ解析接続されるか？

結論を先に言えば、$(F:\mathbb{Q})=2$ の場合は肯定的、$(F:\mathbb{Q})=3$ の場合

には否定的である。

§2. 2次体の場合.　この§では $F/\mathbb{Q}$ は2次拡大であるとして、§1の記号を用いる。F の prime ideal $\mathfrak{p}$ に対して、複素数 $a(\mathfrak{p}), b(\mathfrak{p})$ を、$a(\mathfrak{p})+b(\mathfrak{p})=\Lambda(\mathfrak{p})$, $a(\mathfrak{p})\cdot b(\mathfrak{p})=N(\mathfrak{p})$ により定めると、問題の Dirichlet series は次の様な Euler 積表示をもつ；

$$\zeta(2s-2)\cdot\sum_{0<n\in\mathbb{Z}}\Lambda(n)\cdot n^{-s}=\prod_p H_p(p^{-s})^{-1}$$

ここで、$\prod_p$ は素数 p 上の積として、

$$H_p(T)=\begin{cases}(1-p^2T^2)(1-a\cdot T)(1-b\cdot T) & \text{if } (p)=\mathfrak{p} \text{ in } F\\ (1-a\cdot a'\cdot T)(1-a\cdot b'\cdot T)(1-b\cdot a'\cdot T)(1-b\cdot b'\cdot T) & \text{if } (p)=\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}' \text{ in } F\\ (1-pT)(1-a^2\cdot T)(1-b^2\cdot T) & \text{if } (p)=\mathfrak{p}^2 \text{ in } F\end{cases}$$

とする（$\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}'$ は p 上の F の prime ideal で、$a=a(\mathfrak{p})$, $b=b(\mathfrak{p})$, $a'=a(\mathfrak{p}')$, $b'=b(\mathfrak{p}')$ とした）。

Prop. 1　Φ が cusp form であれば、Dirichlet series $\sum_{0<n\in\mathbb{Z}}\Lambda(n)\cdot n^{-s}$ は、全 s-平面上へ有理型関数として解析接続される。

証明　F が実2次体の場合には、Asai [1] により示された。証明の概要は次の通り。まず Φ は adele 群 $GL(2,F_A)$ 上で定義されているとして、Φ を $GL(2,F_A)$ の infinite part に制限することにより、$SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ 上の automorphic form φ が得られる。一方 $SL(2,\mathbb{R})$ を写像　$g\mapsto(g,\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot g\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix})$　により $SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$

の部分群と考えて，φ を $SL(2,\mathbb{R})$ に制限したものを f とする。

$$\Gamma = SL(2,\mathbb{Z}) \quad , \quad \Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$$

として，$SL(2,\mathbb{R})$ 上の Eisenstein series

$$E(g,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} |\alpha(\gamma g)|^{-s} \quad \text{for } g \in SL(2,\mathbb{R}),\ s \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}\, s \gg 0$$

（但し，$\alpha(g) = c\sqrt{-1} + d$ for $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ ）と f との Rankin convolution により問題の Dirichlet series が生ずる。一方 $E(g,s)$ は，全 s-平面上へ有理型関数として解析接続されるから，これにより問題の Dirichlet series の解析接続を得る。

F が虚2次体の場合にも，同様の方法で示される。この場合には，$SL(2,\mathbb{C})$ への $SL(2,\mathbb{R})$ の自然な埋め込みを用いればよい（Takase [10] 参照）。

§3. 3次体の場合．　この§では，$F/\mathbb{Q}$ は3次巡回拡大であるとする。Galois 群 $Gal(F/\mathbb{Q})$ の指標群の生成元を χ として，$F/\mathbb{Q}$ の絶対判別式を D とする。

f を Hecke eigen cuspidal automorphic form on $GL(2)$ over $\mathbb{Q}$ とすると，base change lifting の一般論により（Langlands [7]），$\hat{f}$ なる Hecke eigen automorphic form on $GL(2)$ over F があって，

$$L(s,\hat{f}) = \prod_{i=0}^{2} L(s,f,\chi^i)$$

となる。ここで

$$L(s,\hat{f}) = \sum_{(\mathfrak{a},D)=1} \hat{\lambda}(\mathfrak{a})\cdot N(\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid D} \hat{H}_{\mathfrak{p}}(N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

$$\hat{H}_{\mathfrak{p}}(T) = 1-\hat{\lambda}(\mathfrak{p})T + N(\mathfrak{p})\cdot T^2 = (1-a(\mathfrak{p})\cdot T)(1-b(\mathfrak{p})\cdot T)$$

で，$\sum_{(\mathfrak{a},D)=1}$ は D と互に素な F の integral ideal $\mathfrak{a}$ 上の和，$\prod_{\mathfrak{p}\nmid D}$ は D を割らない F の prime ideal $\mathfrak{p}$ 上の積，$\hat{\lambda}(\mathfrak{a})$ は $\hat{f}$ の Hecke eigen value (i.e. $T(\mathfrak{a})\cdot\hat{f} = \hat{\lambda}(\mathfrak{a})\cdot\hat{f}$) とする。又，

$$L(s,f,\chi^i) = \sum_{(n,D)=1} \lambda(n)\cdot\chi^i(\sigma_n)\cdot n^{-s} = \prod_{p\nmid D} H_p(\chi^i(\sigma_p)\cdot p^{-s})^{-1}$$

$$H_p(T) = 1-\lambda(p)T + p\cdot T^2 = (1-\alpha_p\cdot T)(1-\beta_p\cdot T)$$

で，$\sum_{(n,D)=1}$ は D と互に素な有理正整数 n 上の和，$\prod_{p\nmid D}$ は D を割らない有理素数 p 上の積，$\lambda(n)$ は f の Hecke eigen value (i.e. $T(n)f = \lambda(n)\cdot f$)，$\sigma_p \in Gal(F/\mathbb{Q})$ は素数 p に対応する Frobenius automorphism とする。

上の関係式から，D を割らない有理素数 p と，p 上の F の prime ideal $\mathfrak{p}$ に対して，

$$\hat{\lambda}(\mathfrak{p}) = \begin{cases} \lambda(p^3) - p\cdot\lambda(p) & \text{if } \sigma_p \neq 1 \\ \lambda(p) & \text{if } \sigma_p = 1 \end{cases}$$

となる。よって，D を割らない有理素数 p に対して，

$$\sum_{e\geq 0} \hat{\lambda}(p^e)\cdot T^e = H_{B,p}(p\cdot T)\cdot\tilde{H}_p(T)^{-1}$$

$$\tilde{H}_p(T) = (1-\alpha_p^3\cdot T)(1-\alpha_p^2\cdot\beta_p\cdot T)(1-\alpha_p\cdot\beta_p^2\cdot T)(1-\beta_p^3\cdot T)$$

$$H_{B,p}(T) = 1+(\chi^2(\sigma_p)+\chi(\sigma_p))\cdot\lambda(p)\cdot T + p\cdot T^2$$

となる。よって，

$$\sum_{(n,D)=1} \hat{\lambda}(n)\cdot n^{-s} = L_B(s-1, f)^{-1}\cdot L(s, f, \mathrm{Sym}^3)$$

$$L_B(s, f) = \prod_{p \nmid D} H_{B,p}(p^{-s})^{-1}, \quad L(s, f, \mathrm{Sym}^3) = \prod_{p \nmid D} \tilde{H}_p(p^{-s})^{-1}$$

となる。

Langlands [6] により示されたことであるが，$L(s, f, \mathrm{Sym}^3)$ は全 s-平面上へ有理型関数として解析接続される。以下では，$L_B(s, f)$ の解析性を，Krokawa [4, 5] の一般論を用いて考察する。

まず始めに，f が $\mathbb{Q}$ の Weil group の 2 次元表現に対応している場合を考える。$\mathbb{Q}$ の absolute Weil group $W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の 2 次元 unitary 表現 ρ があって，ρ に附随した Artin-Hecke L-function $L(s, \rho)$ に対して，$L(s, f) \doteqdot L(s-\frac{1}{2}, \rho)$ となるとき，f は Artin-Hecke type であるという。ここで記号 $\doteqdot$ は，有限個の Euler factor を除いて一致することを示す。又，右辺で $s-\frac{1}{2}$ が現われるのは，L-function $L(s, f)$ の normalization による。（Artin-Hecke L-function については，Tate [12] 参照）。Deligne-Serre [3] により示された通り，f が重さ 1 の holomorphic cusp form であれば，f は Artin-Hecke type である。

<u>Lemma 1</u>　f が Artin-Hecke type ならば，$L_B(s, f)$ は，半平面 $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ 上へ有理型関数として解析接続され，$\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ は自然境界となる。

<u>証明</u>　表現 $\rho: W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to U(2)$ に対して，$L(s, f) = L(s-\frac{1}{2}, \rho)$ とする。有理素数 p で，条件 1) $p \nmid D$ かつ表現 ρ は p で不分岐，2) p に対応

する "inverse Frobenius" を Φ_p として $H_p(p^{-\frac{1}{2}}\cdot T) = \det(1-\rho(\Phi_p)\cdot T)$，を満すものの全体を $\mathcal{P}$ とする。$W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の共役類の全体を $\mathrm{Conj}(W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$ として，$p\in\mathcal{P}$ に対して Φ_p を含む共役類を対応させる写像を $\alpha:\mathcal{P}\to\mathrm{Conj}(W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$ とする。このとき Euler data $E=(\mathcal{P}, W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \alpha)$ は "complete" である（[4] and [5] part II §2)。[4, 5] の記号を用いれば

$$L_B(s,f) = L(s-\tfrac{1}{2}, E, H) \quad , \quad H(T) = 1+(\chi^2+\chi)\cdot \mathrm{tr}(\rho)\cdot T + T^2$$

ただし，$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の指標 χ は $W(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の指標と同一視している。ここで $H(T)$ は [4,5] の意味で "unitary" ではない。よって，[4, 5] の一般論により，$L(s,E,H)$ は半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ 上へ有理型関数として解析接続され，$\mathrm{Re}\,s=0$ は自然境界となる。

Lemma 1 より次の命題を得る，

<u>Prop. 2</u>　f が Artin-Hecke type ならば，Dirichlet series $\sum_{(n,D)=1} \hat{\lambda}(n)\cdot n^{-s}$ は，半平面 $\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{2}$ 上へ有理型関数として解析接続され，$\mathrm{Re}\,s=\frac{3}{2}$ は自然境界である。

一般の f に対して考察を進めるために，"変形 Sato-Tate 予想" と Ramanujan 予想 を述べる。$0<r\in\mathbb{Z}$ と $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の指標 ω に対して，

$$L(s,f,\mathrm{Sym}^r,\omega) = \prod_{p\nmid D} H_{r,p}(\omega(\sigma_p)\cdot p^{-s})^{-1}$$

$$H_{r,p}(T) = \prod_{j=0}^{r}(1-\alpha_p^{r-j}\cdot\beta_p^{j}\cdot T)$$

とおく。このとき，

変形 Sato-Tate 予想　各 $0<r\in\mathbb{Z}$ と $Gal(F/\mathbb{Q})$ の指標 w に対して，適当な Γ-factor（conductor part を含む）$\Gamma_{r,w}(s)$ と D の素因数 p に対して適当な Euler p-factor $H_{r,w,p}(T)$ が存在して，

$$Z(s,f,Sym^r,w) = \Gamma_{r,w}(s)\times L(s,f,Sym^r,w)\times\prod_{p|D}H_{r,w,p}(p^{-s})^{-1}$$

は次の条件 1) 2) 3) を満たす；

1) $Z(s,f,Sym^r,w)$ は全 s-平面上へ正則に解析接続され，$\mathrm{Re}\,s = 1+\frac{r}{2}$ 上には 0-点をもたない，

2) 関数等式 $Z(s,f,Sym^r,w) = c(r,w)\cdot Z(r+1-s,\check{f},Sym^r,\bar{w})$ が成り立つ。ここで，$c(r,w)$ は r と w により定まる絶対値 1 の複素数，$\check{f}$ は適当な Hecke eigen cuspidal automorphic form on $GL(2)$ over $\mathbb{Q}$ である，

3) $Z(s,f,Sym^r,w)$ は各垂直領域 $a\leq \mathrm{Re}\,s\leq b$ で有界である。

Langlands による一般的な予想（Langlands [8] 参照）によれば，generic な f に対しては，$L(s,f,Sym^r,w)$ は cuspidal automorphic representation of $GL(r+1)$ over $\mathbb{Q}$ に附随する standard L-function と（Γ-factor と有限個の Euler factor を除いて）一致するので，上の"変形 Sato-Tate 予想"は，generic な f に対しては，正しいと思われている。

<u>Ramanujan予想</u>　ほとんど全ての有理素数 p に対して $|\lambda(p)| \leq 2\cdot\sqrt{p}$ である。

f が holomorphic cusp form の場合には，f に対する Ramanujan 予想は，Deligne [2] により証明された。

<u>Prop. 3</u>　f に対して，"変形 Sato-Tate 予想" と Ramanujan 予想が正しいとすると，Dirichlet series $\sum_{(n,D)=1} \hat{\lambda}(n)\cdot n^{-s}$ は，半平面 $\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{2}$ 上へ有理型関数として解析接続され，$\mathrm{Re}\, s = \frac{3}{2}$ は自然境界となる。

<u>証明</u>　D を割らない有理素数 p で条件 $|\lambda(p)| \leq 2\cdot\sqrt{p}$ を満すもの全体を $\mathcal{P}$ とする。$G = SU(2) \times Gal(F/\mathbb{Q})$ として，G の共役類の全体を $\mathrm{Conj}(G)$ とする。$p \in \mathcal{P}$ に対して，$\left(\begin{pmatrix} \alpha_p/\sqrt{p} & 0 \\ 0 & \beta_p/\sqrt{p} \end{pmatrix}, \sigma_p\right)$ を含む共役類を対応させる写像を $\alpha : \mathcal{P} \to \mathrm{Conj}(G)$ とする（条件 $|\lambda(p)| \leq 2\sqrt{p}$ より，$|\alpha_p| = |\beta_p| = \sqrt{p}$ となることに注意）。このとき $E = (\mathcal{P}, G, \alpha)$ は [4, 5] の意味で Euler data となり，[4, 5] の記号を用いれば

$$L_B(s, f) = L(s - \tfrac{1}{2}, E, H), \quad H(T) = 1 + (\chi^2 + \chi)\cdot tr(S_t)\cdot T + T^2$$

となる。ここで $S_t : G \to GL(2, \mathbb{C})$ は第一因子への projection とし，$tr(S_t)$ は表現 S_t の trace (i.e. character) である。又 χ は，自然に G の指標と考える。$H(T)$ は [4, 5] の意味で unitary ではない。"変形 Sato-Tate 予想" の下で，Euler data E は "complete" である

([4] and [5] part II Theorem 7)。よって，[4,5]の一般論により，$L(s, E, H)$ は半平面 $\mathrm{Re}\, s > 0$ へ有理型関数として解析接続され，$\mathrm{Re}\, s = 0$ は自然境界である。

Remark 1. Prop. 2, Prop. 3 で扱った Dirichlet series $\sum_{(n,D)=1} \hat{\lambda}(n) \cdot n^{-s}$ と，§1 の問題で扱った Dirichlet series $\sum_{0<n\in\mathbb{Z}} \hat{\lambda}(n) \cdot n^{-s}$ とは，有限個の Euler factor を除いて一致する。よって，Prop. 2, Prop. 3 は，$F/\mathbb{Q}$ が 3 次拡大の場合に，問題に対する否定的例となっている。

Remark 2. "変形 Sato-Tate 予想" の original version について述べる。$\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E に対して，その Hasse ζ-function $\zeta(s, E)$ は，

$$\zeta(s, E) \doteqdot \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot \prod_p{}' (1 - a_p \cdot p^{-s} + p^{1-2s})$$

となるが，

$$1 - a_p \cdot T + p \cdot T^2 = (1 - \pi_p \cdot T)(1 - \bar{\pi}_p \cdot T) \qquad |\pi_p| = \sqrt{p}$$

である。$\pi_p = \sqrt{p} \cdot \exp(\sqrt{-1} \cdot \theta_p)$ $(0 < \theta_p < \pi)$ とおくと，次の予想がある；

Sato 予想　E が虚数乗法をもたないとき，任意の $0 < a < b < \pi$ に対して

$$\lim_{x \to \infty} \#\{x \text{以下の素数} p \text{で} a \leqq \theta_p \leqq b\} / \#\{x \text{以下の素数}\} = \frac{2}{\pi} \int_a^b \sin^2\theta \cdot d\theta 。$$

Tate は，上の Sato 予想を次の様に言い換えた（Tate [11]）；

$0 < m \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$L_m(s) = \prod_p{}' \prod_{j=0}^{m} (1 - \pi_p^{m-j} \cdot \bar{\pi}_p^{j} \cdot p^{-s})^{-1}$$

とおくて，

<u>Sato-Tate 予想</u>　E が虚数乗法をもたないとき，全ての $0 < m \in \mathbb{Z}$ に対して，$L_m(s)$ は $\mathrm{Re}\, s \geq 1 + \frac{m}{2}$ で正則かつ 0-点をもたない。

Sato-Tate 予想から Sato-予想が導かれる（Serre [9] 参照）。

<u>References.</u>

[1] Asai,T.: On certain Dirichlet series associated with Hilbert modular forms and Rankin's method. Math.Ann. 226 (1977) 81-94.

[2] Deligne,P.: La conjecture de Weil I. Publ.Math. I.H.E.S. 43 (1973) 273-307.

[3] Deligne,P. and Serre,J.P.: Formes modulaires de poids 1. Ann.Sci. Ecole Norm.Sup. (4) 7 (1974) 507-530.

[4] Kurokawa,N.: On some Euler products I,II. Proc. Japan Acad. 60 Ser.A No.9 (1984) 335-338. ibid. No.10 (1984) 365-368.

[5] Kurokawa,N.: On the meromorphy of Euler products I,II. Proc.London Math.Soc. 53 (1986) 1-47.

[6] Langlands,R.P.: Euler products. Yale Univ. (1971)

[7] Langlands,R.P.: Base change for GL(2), the theory of Saito-Shintani with applications.
Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. (1975)

[8] Langlands,R.P.: Automorphic representations, Shimura varieties and motives. Ein Marchen.
Proc.Sympos.Pure Math. 33 part 2, Amer.Math.Soc. Providence, R.I. (1979) 205-246.

[9] Serre,J.-P.: Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves. Benjamin, New York. (1968)

[10] Takase,K.: On certain Dirichlet series associated with automorphic forms on SL(2,C). (preprint)

[11] Tate,J.: Algebraic cycles and poles of zeta functions. Proc.Purdue Univ. Conf. (1965) 93-110.

[12] Tate,J.: Number theoretic background.
Proc.Sympos. Pure Math. 33 part 2, Amer.Math.Soc Providence, R.I. (1979) 3-26.

[13] Weil,A.: Dirichlet series and automorphic forms.
Lecture Notes in Math. 189 (1971) Springer-Verlag.