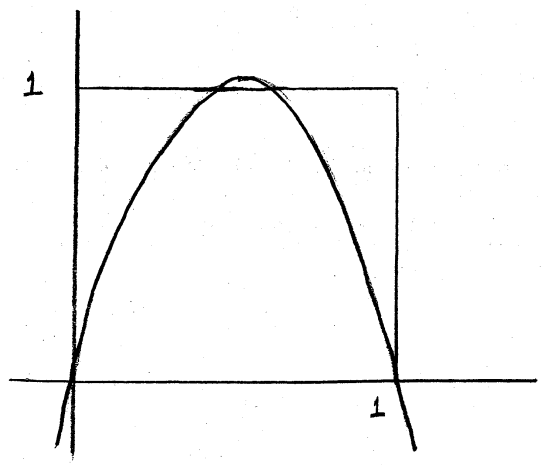
数理解析研究所講究録
第602巻 1986年 222-227

ある種の極小集合の測度

日大 理工 松元重則

1° 1次元力学系 $f(x)=4\mu x(1-x)$ にて パラメーター μ の値が 1 を超えた場合を考える。



いま, $C=\{x\in\mathbb{R}\mid f^n(x)\in[0,1],\ \forall n\geq 0\}$

とおけば, C は f-不変である。 μ が十分大きければ, f は C 上双曲的、すなわち、$\underline{\lim}\,\frac{1}{n}|Df^n|\leqq\lambda<1$ をみたし, 従って C は, Cantor 集合と同相である。このとき, C の各点の f^{-1}-軌道は C の中で稠密であり、さらに $\mu(C)=0$ がなりたつ。(μ は Lebesgue 測度) それでは, μ の値が 1 に非常に近いとき, どの程度のことが, いえるか。これを調べるのは大変興味深いことと思われるが, これについてひとつの知見をつけ加えるのが

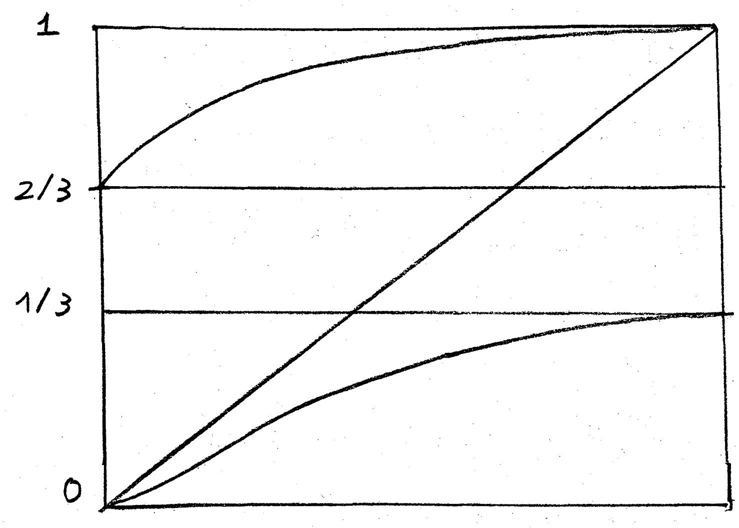
本稿の目的である。我々の得た結論は，「Cが内点をもたねば$\mu(C)=0$である」ということである。

今、簡単のため、2次関数を例にひいて話を進めたが，実際に我々の取り扱うものは，一般のC^2級の関数である。また先の例では，graphの一部が，$f'<0$となっており、このことは，議論を複雑化させる。

そこで次のようなものを考えよう。

(1) f_0, f_1は，$I=[0,1]$で定義されたC^2級関数で，$f_i'>0$ かつ $f_0(I)=[0,1/3]$，$f_1(I)=[2/3,1]$

(2) 任意の0, 1−値系列 $(i_0, i_1, i_2, \cdots)$に対し
$\cap_n f_{i_1}\cdots f_{i_n}(I)$は1点のみから成る。



さて(2)のとき，そのような点の全体はCantor集合をなすが，これを，Cで表わすことにしよう。

<u>定理1</u>　(1), (2)のとき $\mu(C)=0$

(注意1)　f_i の値域は、話をきめるため 1/3, 2/3 で区切ったが、他の値でも同様である。

(注意2)　C^2 級という条件は本質的である。Denjoy 流れの構成を模倣して、C^1 級の反例をつくることができる。(東工大土曜セミナー：とくに、矢野公一氏)

(注意3)　$f_i' < 0$ でも話は同じ。

2°　定理1の証明のあらましを述べよう。いま、$f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}$ を調べるのであるが、

(3)　$$g_K = f_{i_{n-K+1}}, \quad h_K = g_K\circ\cdots\circ g_1$$

と書くことにしよう。

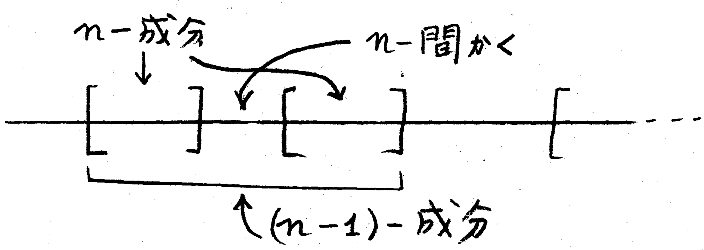
<u>命題2</u> (Denjoy 不等式)　$n \geqq 0$, $x, y \in I$

$$\log(h_n'(x)/h_n'(y)) \leqq \theta \sum_{j=1}^{n} |h_{j-1}(x) - h_{j-1}(y)|$$

この証明は、まず、$h_n'(x)$, $h_n'(y)$ を、チェイン則で書き下し、次に左辺を平均値の定理により評価することにより

与えられる。

さて ここで 定理1の証明の大体のイメージを得るために $\tau = \sup\{f_0', f_1'\} < 1$ なる特別の場合の証明を試みよう。f_i 達の n 回合成による I の像を C の n-成分，$(n-1)$ 回合成による $(1/3, 2/3)$ の像を C の n-間かくと呼ぼう。



Aを，ある n-成分，Bをその隣りの n 間かくとすれば 命題2により

$$\log(\mu(A)/\mu(B)) \leq \theta \sum_{j=1}^{n-1} h_{j-1}(I) < \frac{\theta}{1-\tau} = \log \kappa$$

ここに，h_j は (3)により Bを定義する系列より定まるもの。

このとき，$\mu(C_n)/\mu(C_{n-1}) < 2\kappa/(2\kappa+1) < 1$.

ここに C_n とは n-成分全体の和。これより $\mu(C)=0$ が従う。

一般に，$\tau < 1$ を仮定しない場合，もはや $\mu(A)/\mu(B)$ の評価を一般に得ることはできない。しかし Cの点のうち その定義系列 $(i_1, i_2, \cdots\cdots)$ をさかのぼれば 点2/3 の近くを，無限回通過したようなものについては，これと同様のことが成りたつ。

命題3．正数δが存在し，十分大きいNに対しAをN－成分，Bをその隣りのN－間かくで，ともに$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}+\delta)$に含まれるものとすれば，$\mu(h_n(A))/\mu(h_n(B)) \leqq \lambda < 1$

(注意)　δは，nおよび$h_n = f_{i_1} \cdots f_{i_n}$のとり方によらずきまる。$\lambda$もそうだが，$\lambda$は$N$には依存する。

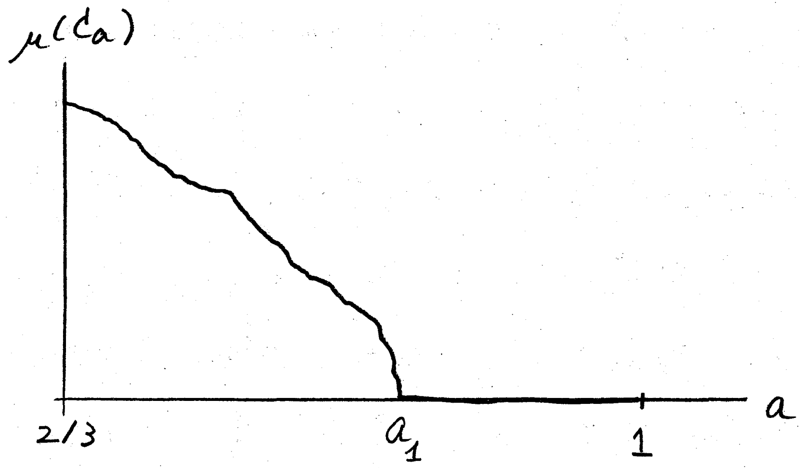
命題3の証明のあらましは次のとおり。まず$(1/3, 2/3)$の$h_1, \cdots, h_n$による像が交わらないことがポイントであり，これより命題2を用いて，$\sum_{j=0}^{n} h_j'(2/3)$を一定値以下に抑えることができる。次に，再び命題2より帰納的に$|x-\frac{2}{3}|<\delta \Rightarrow h_k'(x) \leqq 2h_k'(2/3)$なる$\delta$の存在がいえる。これから，命題3が導かれる。

$3°$　さてCはふたつの部分集合XとY'の和に分けられる。Xは，それを定義する系列$(i_1, i_2, \cdots)$をさかのぼれば，命題3にいう，Aのような形の集合を無限回通ってきた点である。命題3より，$\mu(X)=0$が示されるわけである。さて，Xの補集合Y'は，Aのようなところを一度もとおらなかった点のつくる集合Yの連続像の可算和であり，従って$\mu(C)=0$のためには，$\mu(Y)=0$をいえばよい。

いま，$2/3 < a < 1$に対し

$$C_a = C \setminus \bigcup f_{i_1} \cdots f_{i_n} [2/3, a)$$ とおけば

Y は C_a の形である。（定義中 U は、任意長さの系列 $(i_1 \cdots i_n)$ に渉るもの）　さて、実際の定理1の証明は、背理法に依る。いま、もしも $\mu(C)>0$ と仮定すれば、$2/3<a<1$ に対し、$\mu(C_a)$ は a の単調減少関数であり、a が 1 に十分近ければ値は 0 である。



先程命題3より、$\mu(X)=0$ を導いたが、これを上のグラフによっていいかえると、$\mu(C)>0$ ならば、$\mu(C_{2/3+\delta})>0$ がいえるということである。そこでこの議論を a_1 に近い値に対して行えば、矛盾を生じさせることができるのである。そのためには、命題3を特定の点 $2/3$ から解放し、形式的に一般の形にしておくことが必要である。　以上が、定理1の証明のあらましである。