数理解析研究所講究録
第 604 巻 1987 年 20-31

ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の解の漸近公式について

早稲田大学　小池 茂昭
Shigeaki Koike

§0 序

次のハミルトン・ヤコビ・ベルマン(HJB)方程式の解 u^ε の $\varepsilon\,(>0)$ を 0 に近づけた時の挙動に関する結果を述べる。

$$(1)\quad \begin{cases} \max\limits_{1\le k\le m}\left\{-\dfrac{\varepsilon^2}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k} u^\varepsilon_{x_i x_j} + \lambda u^\varepsilon\right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon = 1 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

但し、ε と λ は正定数、Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域、Ω の境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。また、今後、和の記号は省略する。

HJB方程式(1)は、次の様な確率最適制御の問題から導かれる。まず、次の Ito 確率微分方程式を考える。

$$(2)\quad \begin{cases} dx_t^\varepsilon = \varepsilon\, C^{k_t}(x_t^\varepsilon)\, dW_t & t>0 \\ x_0^\varepsilon = x \end{cases}$$

但し、W_t は n 次元ブラウン運動であり $C^k(x) = (C_{ij}^k(x))$ は、$k\in\{1,2,\cdots,m\}$ と $x\in\mathbb{R}^n$ に依存した n 次元正方行列である。次にコスト関数 $J(x,k)$ を定める。

$$J(x,k) = E[e^{-\lambda\tau_x^\varepsilon}]$$

但し、$k=k_t$ は、値域を $\{1,2,\cdots,m\}$ とする、ブラウン運動を考えている確率空間上の progressively 可測過程であり、コ

コントロールと呼ぶことにする。Eは期待値、τ_x^εは(2)の解x_t^εのΩからの脱出時間$\inf\{t>0 \mid x_t^\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}$とする。P.L. Lions [9]は、$a_{ij}^{k}(x)=C_{\ell i}^{k}(x)C_{\ell j}^{k}(x)$の時に、最適コスト関数$u^\varepsilon(x)=\inf\{J(x,k) \mid k$は、すべてのコントロール$\}$が、(1)の解になる事を示した。

(1)の解の漸近挙動に関する研究について、知られている結果を簡単に述べておこう。まず、コントロールのない場合、つまり$m=1$の時の研究は、Varadhan[12]によって、解析的な手法で次の漸近公式が得られた。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\{-\varepsilon \log u^\varepsilon(x)\} = \sqrt{2\lambda}\, dist(x, \partial\Omega)$$

但し、$dist(x,\partial\Omega)$は、$(a_{ij})^{-1}$から作られるリーマン距離の意味における境界からの距離である。又、収束は、$x\in\overline{\Omega}$に関して一様収束の意味である。さらに、Ventcel と Freidlin [13]は、同じ結果を確率論的手法で得ている。さらに、最近 Evans と Ishii によって、粘性解の方法を用いてより単純に同じ結果が得られている([3]では、同様の方法で、(1)以外のHJB方程式の解の漸近公式も研究されている)。

今までの研究は、コントロールのない場合に限られていたが、コントロールのある場合($m\geq 2$)は、著者の知る限り Fleming と Souganidis[6]が、別の形の(放物型)HJB方程式に対して得た結果だけである。しかも、この研究は、低階の

項にコントロールがある場合のみ扱っており、二階微分の係数にコントロールが入る場合は、まだ研究されていないと考えられる。

§1　定理と証明

係数 a_{ij}^{k} に関して、次の仮定をする。

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{ij}^{k} \in C^2(\overline{\Omega}) \quad , \quad a_{ij}^{k} = a_{ji}^{k} \quad \text{in } \Omega \\ a_{ij}^{k}\xi_i\xi_j \geqq \theta|\xi|^2 \quad (\theta > 0) \quad \text{for } {}^\forall\xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

さらに次の様な記号を導入する。

$$\mathbb{K} \equiv \{ k : [0,\infty) \longrightarrow \{1,2,\cdots,m\} \mid k(\cdot) : \text{可測} \}$$

$$\mathbb{A} \equiv \{ y : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid y(\cdot) : \text{可測} \}$$

$$\Gamma \equiv \{ \alpha : \mathbb{K} \to \mathbb{A} \mid k, \hat{k} \in \mathbb{K} \text{ が } k(s) = \hat{k}(s) \text{ a.e. } 0 \leq s \leq t \text{ ならば、} \alpha[k](s) = \alpha[\hat{k}](s) \text{ a.e. } 0 \leq s \leq t \}$$

[定理]（[8]）

(3) の仮定の下で、(1) の解 u^ε に対し、次の漸近公式が得られる。

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \{ -\varepsilon \log u^\varepsilon(x) \} = v(x)$$

但し、収束は、$x \in \overline{\Omega}$ に対して一様収束であり、$v(x)$ は、次の様に与えられる。

$$v(x)=\inf_{\alpha\in\Gamma}\sup_{k\in K}\Big\{\int_0^{\tau_x}\Big(\frac{1}{2}a_{ij}^{k(t)}(x(t))\alpha_i[k](t)\alpha_j[k](t)+\lambda\Big)dt \;\Big|\; \dot{x}_i(t)=a_{ij}^{k(t)}(x(t))\alpha_j[k](t),\ x(0)=x\Big\}$$

[注意]

(i) [4], [1], [11] によって、仮定(3)の下で、各 $\varepsilon>0$ に対して、$W^{2,\infty}(\Omega)\cap C^{2,\sigma}(\overline{\Omega})$ ($\exists\sigma>0$) に属する解 u^ε は、唯一つ存在する。

(ii) 強最大値原理から、$0<u^\varepsilon\le 1$ in $\overline{\Omega}$ が得られるので、漸近公式の左辺は、意味がある。

(iii) $(a^{k,ij})=(a_{ij}^{k})^{-1}$, $N_k(x,v)=\{a^{k,ij}(x)v_iv_j\}^{\frac{1}{2}}$, $N(x,v)=\max\{N_k(x,v)\mid k\in\{1,2,\cdots,m\}\}$ とおく。さらに、境界からの距離 $d_k(x,\partial\Omega)$, $d^*(x,\partial\Omega)$ を次の様にとる。

$$d_k(x,\partial\Omega)=\inf\Big\{\int_0^{\tau_x}N_k(x(t),\dot{x}(t))dt \;\Big|\; y\in A,\ \dot{x}_i(t)=a_{ij}^{k}(x(t))y_j(t),\ x(0)=x\Big\}$$

$$d^*(x,\partial\Omega)=\inf\Big\{\int_0^{\tau_x}N(x(t),\dot{x}(t))dt \;\Big|\; x(0)=x\Big\}$$

すると、これらを用いて、$v(x)$ は、次の様に評価される。

$$\sqrt{2\lambda}\max_{1\le k\le m}d_k(x,\partial\Omega)\le v(x)\le\sqrt{2\lambda}\,d^*(x,\partial\Omega)$$

[定理の証明]

$v^\varepsilon=-\varepsilon\log u^\varepsilon$ とおき、v^ε が満たす方程式を導く。簡単な計算により次の様になる。

(4) $$\begin{cases} \max_{1\le k\le m}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon a_{ij}^{k} v_{ij}^{\varepsilon} - \frac{1}{2} a_{ij}^{k} v_i^{\varepsilon} v_j^{\varepsilon} + \lambda\right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ v^{\varepsilon} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ここで、v^{ε}の$W^{1,\infty}$評価に関する次の補題を述べる。

[補題]

εに依存しない定数Cで次式を満たすものがある。

(5) $$\|v^{\varepsilon}\|_{C(\overline{\Omega})} + \|Dv^{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \le C \qquad \varepsilon\in(0,1)$$

補題の証明は、次の章で述べるとして、(5)の評価を用いて定理の証明を続けよう。

[補題]より、0に収束する点列ε_jと、ある関数$\hat{v}\in W^{1,\infty}(\Omega)$が選べて、$\overline{\Omega}$上一様に$v_{\varepsilon_j}$が$\hat{v}$に収束するようにできる。粘性解の方法の一般論から(4)の解のεを0に収束させた時の一様収束の意味での極限は、次のハミルトン・ヤコビ(HJ)方程式の粘性解になっている。

(6) $$\begin{cases} \min_{1\le k\le m}\left\{\frac{1}{2} a_{ij}^{k} v_i v_j - \lambda\right\} = 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

又、方程式(6)は、次の様に書き換えられる。

(7) $$\begin{cases} \min_{1\le k\le m} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n}\left\{- a_{ij}^{k} v_i \alpha_j - \frac{1}{2} a_{ij}^{k} \alpha_i \alpha_j - \lambda\right\} = 0 \text{ in } \Omega \\ v = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

一方、[5]の中での議論と同様に(7)の粘性解は、定理の中の$v(x)$で与えられる。ここで、石井[7]の凸でないハミル

トニアンに対する粘性解の一意性の結果により $v(x)=\hat{v}(x)$ が得られ、定理が証明される。

§2 補題の証明

ψ を滑らかな非減少関数で、次の条件を満たすとする。

$$\psi(r)=0 \quad \text{for } r\leq 0, \quad \psi(r)=r-1 \quad \text{for } r\geq 2$$

$$\psi''\geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$\delta\in(0,1)$ に対して、$\beta_\delta(r)=\psi(r/\delta)$ ととる。

まず、$w^\varepsilon=-v^\varepsilon$ とおき、w^ε の満たす方程式を考えると、次の様になる。

$$(8)\quad \begin{cases} \max\limits_{1\leq k\leq m}\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon a_{ij}^k w_{ij}^\varepsilon-\frac{1}{2}a_{ij}^k w_i^\varepsilon w_j^\varepsilon+\lambda\right\}=0 & \text{in } \Omega \\ w^\varepsilon=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(8) の解を次の近似方程式系 (9) の解 $\{w^{\varepsilon,\delta,k}\mid 1\leq k\leq m\}$ で近似する事を考える。

$$(9)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\varepsilon a_{ij}^k w_{ij}^k-\frac{1}{2}a_{ij}^k w_i^k w_j^k+\lambda+\beta_\delta(w^k-w^{k+1})=0 & \text{in } \Omega \\ w^k=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

但し、$w^{m+1}=w^1$ とする。

最大値原理と、良く知られたバリヤー関数を用いると、$k\in\{1,2,\cdots,m\}$ と $\varepsilon,\delta\in(0,1)$ に依存しない定数 C_0 で次式を満たすものがある。

$$(10)\qquad -C_0\leq w^{\varepsilon,\delta,k}\leq 0, \quad \max_{\partial\Omega}|Dw^{\varepsilon,\delta,k}|\leq C_0$$

簡単のため、以後 $w^{\varepsilon,\delta,k}$ の ε と δ 及び β_δ の δ を省略しよう。$M=\max\{\|Dw^k\|_{L^\infty(\Omega)} \mid 1\le k\le m\}$ とし、$W^k=|Dw^k|^2+\mu M w^k$ とおく。但し、μ は後で固定する十分大きな正数とする。$\max_{1\le k\le m}\sup_\Omega W^k=\sup_\Omega W^1$ と仮定し、$x_0\in\overline{\Omega}$ を $W^1(x)$ の $\overline{\Omega}$ における最大値をとる点とする。

まず、$x_0\in\Omega$ と仮定すると、$W^1(x)$ に最大値原理を適用することにより、次式を得る。

$$\begin{aligned}0&\le -\tfrac12\varepsilon a^1_{ij}W^1_{ij}\\&= -\tfrac12\varepsilon a^1_{ij}(2w^1_{ki}w^1_{kj}+2w^1_k w^1_{kij}+\mu M w^1_{ij}) \quad \text{at } x_0\end{aligned}$$

仮定(3)と方程式(9)を用いると次の様になる。

$$\begin{aligned}0\le& -\varepsilon\theta|D^2w^1|^2-\varepsilon a^1_{ij}w^1_k w^1_{kij}\\&+\mu M\{\tfrac12 a^1_{ij}w^1_i w^1_j-\lambda-\beta(w^1-w^2)\} \quad \text{at } x_0\end{aligned}$$

ここで、方程式(9)を微分した式の変形：

$$\begin{aligned}-\tfrac12\varepsilon a^1_{ij}w^1_{ijk} =& \tfrac12\varepsilon a^1_{ij,k}w_{ij}+\tfrac12 a^1_{ij,k}w_i w^1_j\\&+a^1_{ij}w^1_i w^1_{jk}-\beta_k\end{aligned}$$

と、$W^1_k=2w^1_j w^1_{jk}+\mu M w^1_k=0$ at x_0 を用いると、次の様に変形できる。

$$\begin{aligned}0\le& -\varepsilon\theta|D^2w^1|^2+\tfrac12\mu a_{ij}w^1_i w^1_j-\lambda\mu M\\&-\mu M\beta(w^1-w^2)+2w^1_k\{\tfrac12\varepsilon a^1_{ij,k}w^1_{ij}+\tfrac12 a^1_{ij,k}w^1_i w^1_j\\&+a^1_{ij}w^1_i w^1_{jk}-\beta_k\}\end{aligned}$$

さらに、β の作り方から導かれる $-\beta(r)\le -r\beta'(r)+C$ や、

$W^1(x_0) \geq W^2(x_0)$ 等を用いると次の様になる。

$$0 \leq -\varepsilon\theta|D^2w^1|^2 - \frac{1}{2}\mu M\theta|Dw^1|^2 - \mu M\beta(w^1 - w^2)$$
$$+\beta'(w^1-w^2)(-2|Dw^1|^2 + 2w^1_{x_k}w^2_{x_k})$$
$$+\varepsilon C|Dw^1||D^2w^1| + C|Dw^1|^3$$
$$\leq -\frac{1}{2}M\mu\theta|Dw^1|^2 + C\mu M + C(M+1)|Dw^1|^2$$

但し、C は ε, δ, k に依存しない適当な定数であり、今後もことわらずに用いる事にする。上式より次の関係を得る。

$$0 \leq \mu M(C - |Dw^1|^2) + M|Dw^1|^2(C-\mu)$$

但し、$M \geq 1$ を仮定している。故に μ を十分大きくとると、$|Dw^1(x_0)|^2 \leq C$ を得る。よって、

$$M^2 \leq \max_{1\leq k\leq m} \sup_{\Omega} W^k + CM$$
$$= W^1(x_0) + CM \leq C + \frac{1}{2}M^2$$

を得るので、ε, δ, k に依存しない定数 C_1 で次式を満たすものが存在する。

(11) $$\|Dw^k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$$

次に、D^2w の δ と k に依存しない L^∞ 評価を求める。まず、$N = \max\{\|D^2w^k\|_{L^\infty(\Omega)} \mid 1 \leq k \leq m\}$ とおく。P.L.Lions [10] の 3(b) と同様にして次式を得る。

(12) $$\|D^2w^k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C + C\sqrt{N}$$

但し、今後、C は ε に依存するかもしれない定数としておく。今、$N = \|D^2w^1\|_{L^\infty(\Omega)}$ と仮定し、$\|D^2w^1\|_{L^\infty(\Omega)} =$

$|D^2w^1(x_0)|$ となる点を x_0 とする。$x_0 \in \partial\Omega$ の時は、(12) より N の評価は完了するので、$x_0 \in \Omega$ と仮定する。適当に変数変換して、次式が点 x_0 で成立するので、初めから仮定する。

(13) $$-a^1_{ij}w^1_{ij} = -\alpha_k w^1_{kk}, \quad a^1_{ij}w^1_i w^1_j = \alpha_k (w^1_k)^2$$

但し、$\alpha_k (\geq \theta)$ は、定数である。

$V^k = |D^2 w^k|^2 + \mu N \alpha_i w^k_{ii} + \nu N |Dw^k|^2$ とおく。但し、μ と ν は後で固定する正数とする。$\max_{1\leq k\leq m} \sup_{\Omega} V^k = \sup_{\Omega} V^r$ とおき、$\sup_{\Omega} V^r = V^r(x_1)$ と仮定しよう。

まず、$x_1 \in \Omega$ と仮定すると、最大値原理より、x_1 において

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\tfrac{1}{2}\varepsilon a^r_{ij} V^r_{ij} \\ &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon a^r_{ij}\big(2w^r_{kl}w^r_{klij} + 2w^r_{kli}w^r_{klj} + \mu N \alpha_k w^r_{kkij} \\ &\qquad + 2\nu N w^r_k w^r_{kij} + 2\nu N w^r_{ki} w^r_{kj}\big) \end{aligned}$$

が成立する。簡単のため $\varepsilon = 2$ とし、a^r_{ij}, w^r, w^{r+1} の代わりに a_{ij}, w, z と書き、β, β', β'' の変数 $w-z$ は省略する。ここで、方程式(9)を微分すると次式を得る。

$$-a_{ij}w_{ijk} = a_{ij,k}w_{ij} + \tfrac{1}{2}a_{ij,k}w_i w_j + a_{ij}w_i w_{jk} - \beta_k$$

$$\begin{aligned} -a_{ij}w_{ijkl} &= 2a_{ij,k}w_{ijl} + a_{ij,kl}w_{ij} + 2a_{ij,k}w_i w_{jl} - \beta_{kl} \\ &\quad + a_{ij}w_{ik}w_{jl} + \tfrac{1}{2}a_{ij,kl}w_i w_j + a_{ij}w_i w_{jkl} \end{aligned}$$

さらに、$V_k = 2w_{ij}w_{ijk} + \mu N \alpha_i w_{iik} + 2\nu N w_i w_{ik} = 0$ at x_1 も用いると次式の様に変形されていく。

$$0 \le -2\nu N\theta|D^2w|^2 + \beta''(C|D^2w| - \mu N\theta)|D(w-z)|^2$$
$$+\beta'\{-2|D^2w|^2 + 2w_{kl}z_{kl} - \mu N\alpha_k(w_{kk}-z_{kk})$$
$$-2\nu N|Dw|^2 + 2\nu N w_k z_k\}$$
$$+C(|D^2w|^3 + \mu^2N^2 + C\mu N|D^2w|^2 + \nu N|D^2w|)$$

ここで、μを十分大きく固定して、さらに$V^r(x_1) \ge V^{r+1}(x_1)$を用いると次の様になる。

$$0 \le N\{|D^2w|^2(C-\nu) + (1+\nu)(CN - |D^2w|^2)\}$$

νを十分大きく固定すると、$|D^2w(x_1)| \le C\sqrt{N}$ を得る。故に、

$$N^2 = V^1(x_0) + \frac{1}{2}\mu N\alpha_k(w^1_k(x_0))^2 - \mu N\beta(w^1-w^2)(x_0)$$
$$-\nu N|Dw^1|^2(x_0)$$
$$\le V^r(x_1) + CN \le C + CN^{\frac{3}{2}}$$

となり、δとkに依存しない定数C_εで次式を満たすものが存在する。

(14) $$\|D^2w^k\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_\varepsilon$$

次に、$x_1 \in \partial\Omega$ と仮定すると、上述の議論の中で定めたμ, νを固定すると、(12)より、簡単に(14)式が導かれる。

評価(10),(11),(14)より、各$\varepsilon \in (0,1)$に対し、0に収束する点列δ_jと関数$\hat{w}^\varepsilon \in W^{2,\infty}(\Omega)$と$\varepsilon$に依存しない定数$C_2$で、$w^{\varepsilon,\delta_j,k}$が$\hat{w}^\varepsilon$に$W^{1,\infty}$の意味で強収束し、$D^2w^{\varepsilon,\delta_j,k}$が$D^2\hat{w}^\varepsilon$に$L^\infty$の意味で弱*収束し、さらに、$\|\hat{w}^\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \le C_2$ を満足す

るものが存在する。従って、[2]と同様の議論により、$\widehat{w}^{\varepsilon}$ は(8)の解になり、方程式(8)の一意性より $w^{\varepsilon}=\widehat{w}^{\varepsilon}$ となり、補題の証明が終わる。

§3 引用文献

[1] L.C.Evans「Classical solutions of HJB equation for uniformly elliptic operators」Trans. A.M.S. 275 P.245~255 '83

[2] L.C.Evans & A.Friedman「Optimal stochastic switching & the Dirichlet problem for the Bellman equation」Trans. A.M.S. 253 P.365~389 '79

[3] L.C.Evans & H.Ishii「A pde approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities」Ann. I.Henri Poincaré 2 P.1~20 '85

[4] L.C.Evans & P.L.Lions「Résolution des équations de HJB」C.R.A.S. Paris 290 P.1049~1052 '82

[5] L.C.Evans & P.E.Souganidis「Differential games & representation formula for solutions of HJ-Isaacs equations」to appear in Indiana U.Math.J.

[6] W.H.Fleming & P.E.Souganidis「PDE-viscosity

solution approach to some problems of large deviation」 to appear

[7] H. Ishii「A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the HJB equations of Eikonal type」 to appear

[8] S. Koike「An asymptotic formula for solutions of HJB equations」 to appear in Nonlinear Analysis

[9] P.L. Lions「Optimal control of diffusion processes & HJB equations I」 Comm in P.D.E. 8 P.1101~1174 '83

[10] P.L. Lions「Résolution analytique des problèmes de Bellman-Dirichlet」 Acta Math. 146 P.151~166 '81

[11] P.L. Lions & N.S. Trudinger「Linear Oblique derivative problems for uniformly elliptic HJB equation」 Math. Z. 191 P.1~15 '86

[12] S.R.S. Varadhan「On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients」 C.P.A.M. 20 P.431~455 '67

[13] A.D. Ventcel & M.I. Freidlin「On small random perturbations of dynamical systems」 Russian Math. Surveys 25 P.1~56 '70