数理解析研究所講究録
第604巻 1987年 32-45

$u_t=\triangle u^m+g$ の解のsupportについて

大阪大 理 D3 仙葉 隆 (Takasi Senba)

§1. 序. 本講演では、空間次元が一次元のporous media方程式

$$(\mathrm{E})\begin{cases} u_t=(u^m)_{xx}+g & ,(x,t)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \quad (m>1) \\ u(\cdot,0)=0 & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

の解のsupportについて考えたい。ここで g はcompactなsupportをもつ $\mathbb{R}$ 上の正なる連続関数とする。最初にこの方程式の物理的な意味であるが、$g\equiv 0$ そして初期値 $u(\cdot,0)$ が u_0 ($\geqq 0$) なるときは、多孔質媒体中の(初期分布が $u_0(\cdot)$ である)気体の時刻 t での濃度の分布が $u(\cdot,t)$ である。それに対して上の方程式(E)は外から単位時間ごとに場所 x に濃度 $g(x)$ の気体が流れこんでいる状況を考えている。もちろん、$x\in\mathbb{R}^3$ で考えるべき問題であるが、実験的考察と言う意味で、今回は、空間一次元で考える。

上の様な方程式(E)の解について、g がcompact supportを持てば、各時刻ごとに $u(x,t)$ もcompact supportを持つ。

そのときのsupportの大きさを評価したいと言うのが、今回の目的である。

この様な研究については、J.L.Vazquezが[1],[2]で

$$(E_0)\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \quad (m>1) \\ u(\cdot,0)=u_0(\cdot) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

について考えている。(E_0)について彼は、$u(x,t)$が、$t\to+\infty$なるとき、$\overline{u}(\cdot,0)=\delta_0(\cdot)$なる$(E_0)$の解$\overline{u}(x,t)=t^{\frac{1}{m+1}}(A-Bx^2t^{\frac{-2}{m+1}})_+^{\frac{1}{m-1}}$（ただしA，Bはmにのみ関係する定数）に近づくことを示した（supportも含めて）。そこで彼は *Shifting Comparison Principle* [*1*, *Lemma 2.1*]なる新しい比較定理を用いて結果を得ている。今回はその比較定理を(E)の方程式に適応して主結果を導きたい。

主結果

$g\in C_0(R)$，$g\geqq 0$，$\mathrm{support}\, g=[-a,a]$ $(a>0)$

とするとき，(E)の解$u(x,t)$に対して

$$\mathrm{supp}\, u(\cdot,t)=[\zeta_1(t),\zeta_2(t)] \quad (t>0)$$

とかけて，$\overline{\zeta}>0$が存在して

$$|\zeta_i(t)-(-1)^i\overline{\zeta}\,t^{\frac{m}{m+1}}|\leqq 4a \qquad (t>0)$$

と書ける。

§2．存在定理．　存在定理1

任意の$g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$に対して、次の様な解が、唯一存在する。$T>0$に対して

$$u \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \{u\varphi_t + (u)^m \varphi_{xx} + g\varphi\}\,dx\,dt = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall \varphi \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}) \\ u(\cdot\,,0) = 0 \end{cases}$$

上の事実に対して、*P. Bénilan - H. Brézis - M.G. Crandall* [3]とI. *Miyadera* [4]により$L^1(\mathbb{R})$上の*Integral solution*の存在と一意性がわかり、*H. Brézis - M.G. Crandall* [5]とM. Watanabe [6]により、*Integralsolution*と上の解とが同値であることがわかる。

次に主結果を得るために次の解と比較する。

$$(\bar{E}) \begin{cases} \bar{u}_t = (\bar{u})^m_{xx} + \delta_0 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ \bar{u}(\cdot\,,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

$(\bar{E})$の解を、正当化するために、$(\bar{E})$を次の様な空間で考える。$\forall \ell > 0$に対して

$$D(\Delta_\ell) \equiv \{w \in C_0[-\ell,\ell] \cap C^1[-\ell,\ell],\ w_{xx} \in C_0[-\ell,\ell]\}$$

$$\Delta_\ell v \equiv v_{xx} \qquad \forall v \in D(\Delta_\ell)$$

とするとき、Δ_ℓ^*を($C_0[-\ell,\ell]$上の作用素)Δ_ℓの共役作用素(従ってΔ_ℓ^*は$C_0^*[-\ell,\ell]$上の作用素)とするとき

$$D(A_\ell) \equiv \{ w \in L^1(-\ell,\ell) \; ; \; w^m \in D(\Delta_\ell^*) \}$$
$$A_\ell v \equiv \Delta_\ell^* v \qquad {}^\forall v \in D(A_\ell)$$

とする。そのとき

存在定理 2.

$A_\ell + \delta_0$ は $C_0^*[-\ell,\ell]$ 上での accretive 作用素となり．

$$R(I - \lambda(A_\ell + \delta_0)) \supset \overline{D(A_\ell)} = L^1(-\ell,\ell)$$

となる。従って $C_0^*[-\ell,\ell]$ 上．${}^\forall T>0$ に対して

$$\begin{cases} du/dt = A_\ell u + \delta_0 & t \in [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

なる．*Integral solution* が．唯一存在する。

定理の前半は Y. Kōmura - Y. Konisi [7. 第4章]．後半は．I. Miyadera [4] か Y. Kōmura - Y. Konisi [7. 第3章] を適用することにより示される。そして．存在定理2で得られた解を$(\overline{E})$の解と呼ぶことにする。

§3. 比較定理．次に(E) の解が *compact support* を持つこと．及び．その support を評価するために比較定理を用意する。次の定理は．J.L. Vazquez [1. Lemma 2.1]で示された。

比較定理 1 (*Elliptic Version*)

$\beta(x) = x^{\frac{1}{m}}$ ($|x|^{\frac{1}{m}} \operatorname{sign} x$ の意味) $f_i \in L^1(R)$ $(i=1,2)$

そして．u_i を $-u_i''+\beta(u_i)=f_i$ の解で $u_i\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$
そのとき
$$\int_{-\infty}^{x} f_1(y)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{x} f_2(y)\,dy \qquad {}^{\forall} x\in\mathbb{R}$$
ならば
$$\int_{-\infty}^{x} \beta(u_1(y))\,dy \leqq \int_{-\infty}^{x} \beta(u_2(y))\,dy \qquad {}^{\forall} x\in\mathbb{R}$$
をみたす。

この比較定理と(E₀)の解は
$$\lim_{\lambda\searrow 0}\left(I-\lambda\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)^m\right)^{-[t/\lambda]}u_0 \qquad \text{in } L^1(\mathbb{R})$$
なる形で得られることを利用し．比較定理１の f_i のかわりに(E₀)の初期値を対応させ．$\beta(u_i)$ のかわりに初期値に対応する解を対応させた形の．比較定理（*parabolic version*）を［1．Lemma 2.2］で．示している。そこで(E)の解も
$$\lim_{\lambda\searrow 0}\left(I-\lambda\left(\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)^m+g\right)\right)^{-[t/\lambda]}0$$
なる形で得られるから［1．Lemma 2.2］と同様にして次の比較定理を得る。

比較定理２

$g_i\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ $(i=1,2)$ とし．u_i $(i=1,2)$ を g_i に対応する(E)の解とする。そのとき
$$\int_{-\infty}^{x} g_1(y)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{x} g_2(y)\,dy \qquad {}^{\forall} x\in\mathbb{R}$$
ならば

$$\int_{-\infty}^{x} u_1(y,t)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{x} u_2(y,t)\,dy \qquad {}^\forall x \in \mathbb{R}.$$

をみたす。

§4. 収束定理. (E)と$(\bar{E})$では考えている空間と領域がちがう. それを結びつけるものとして. 次の収束定理が. 必要となってくる。

収束定理（I. Miyadera [4. 系 6.9]）

A. $\{A^{(n)}\}_{n\geqq1}$ はX上の accretive 作用素. ここでXは Banach 空間. さらに ${}^\forall\lambda>0$ に対し

$R(I-\lambda A^{(n)}) \supset \overline{D(A^{(n)})} \quad ({}^\forall n \geqq 1)$

$R(I-\lambda A) \supset \overline{D(A)}, \quad \overline{D(A^{(n)})} \supset \overline{D(A)} \quad ({}^\forall n \geqq 1)$

$\lim_{n\to\infty} (I-\lambda A^{(n)})^{-1}x = (I-\lambda A)^{-1}x \quad ({}^\forall\lambda>0, x\in\overline{D(A)})$

ならば $A^{(n)}, A$ から生成される半群 $T_n(t), T(t)$ に対して

$\lim_{n\to\infty} T_n(t)x = T(t)x \qquad {}^\forall x\in\overline{D(A)}, {}^\forall t \geqq 0$

上の定理を(E).$(\bar{E})$に適用するために. 次のことを示す。

補題 4.1.

${}^\forall l>1$ に対して $h_n\in C_0[-l,l]$. $\operatorname{supp} h_n \subset [-1,1]$ (超関数(distribution)の意味での support) ${}^\forall n\geqq1$

$h_n \xrightarrow{w^*} \delta_0$ in $C_0^*[-l,l]$ (汎弱位相で収束)

ならば

$$(I-\lambda(A_\ell+h_n))^{-1}v \longrightarrow (I-\lambda(A_\ell+\delta_0))^{-1}v$$

as $n\to\infty$ $\quad {}^\forall v \in \overline{D(A_\ell)} = L^1(-\ell,\ell) \quad {}^\forall\lambda>0$

ここで、$L^1(-\ell,\ell)$ は $C_0^*[-\ell,\ell]$ の閉部分空間であり $(I-\lambda(A_\ell+h_n))^{-1}v$, $(I-\lambda(A_\ell+\delta_0))^{-1}v \in L^1(-\ell,\ell)$ だから上の収束は $L^1(-\ell,\ell)$ での収束でもある。

${}^\forall n \geqq 1$, ${}^\forall\lambda>0$ に対して $w_n = (I-\lambda(A_\ell+h_n))^{-1}v$ とおく。$\varphi(x,y)$ を

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (y+\ell)(x-\ell) & , -\ell \leqq y \leqq x \leqq \ell \\ (x+\ell)(y-\ell) & , -\ell \leqq x \leqq y \leqq \ell \end{cases}$$

とおく。さらに、w_n は $C_0^*[-\ell,\ell]$ の中で有界だから部分列 $\{n'\}$ が存在して

$$w_{n'} \xrightarrow{w^*} \tilde{w} \quad \text{in } C_0^*[-\ell,\ell]$$

さらに

$$\int_{-\ell}^{\ell}\{w_{n'}(y)-\lambda(A_\ell w_{n'})(y)\}\varphi(x,y)\,dy = \int_{-\ell}^{\ell}\{v(y)+\lambda h_{n'}(y)\}\varphi(x,y)\,dy$$

より

$$\int_{-\ell}^{\ell} w_{n'}(y)\,dy - \lambda(w_{n'}(x))^m = \int_{-\ell}^{\ell}\{v(y)+\lambda h_{n'}(y)\}\varphi(x,y)\,dy$$

ここで $n'\to\infty$ とすると ${}^\forall x\in(-\ell,\ell)$ に対して

$$w_{n'}(x) \longrightarrow \tilde{\tilde{w}}(x)$$

一方 $\sup\{\|w_n\|_{C_0^*};\, n\geq 1\}$, $\sup\{\|h_n\|_{C_0^*};\, n\geq 1\}\leqq {}^{\exists}C$
より $\sup\{|\tilde{\tilde{w}}(x)|\,;\, x\in(-l,l)\}\leqq {}^{\exists}\tilde{C}$.
従って. Lebegue の収束定理より $w_{n'}\longrightarrow \tilde{\tilde{w}}$ in $L^1(-l,l)$
ゆえに. $\tilde{\tilde{w}}=\tilde{w}$. そして

$$\int_{-l}^{l}\tilde{w}(y)\,g(x,y)\,dy-\lambda(\tilde{w}(x))^m$$
$$=\int_{-l}^{l}\{v(y)+\lambda\delta_0(y)\}\,g(x,y)\,dy$$

なることより. $\tilde{w}=(I-\lambda(A_l+\delta_0))^{-1}v$. 左の解は一意だから. $w_n\longrightarrow(I-\lambda(A_l+\delta_0))^{-1}v$ in $L^1(-l,l)$。従って.
補題が言えた。

従って. 収束定理における. $A^{(n)}$ を A_l+h_n. A を $A_l+\delta_0$. $X=C_0^*[-l,l]$. としてやると. $\overline{u}_n$ を

$$(\overline{E}_n)\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\overline{u}_n=A_l\overline{u}_n+h_n\\ \overline{u}_n(0)=0\end{cases}$$

の Integral solution としたとき ${}^{\forall}t\geq 0$ に対して

$$\overline{u}_n(\cdot,t)\longrightarrow\overline{u}(\cdot,t)\quad\text{in } L^1(-l,l)\quad\text{as } n\to\infty$$

が言えた。

§5. support の評価. 前の Section で定義した $\overline{u}_n$ に対して. ${}^{\forall}T>0$ に対して $l>1$ を十分大きくとれば. 存在定理1の解（g のかわりに h_n ととる）と $0\leqq t\leqq T$ なるとき.

一致することを言いたい。このことが言えれば u と $\overline{u}_n$ とを $L^1(-\ell,\ell)$ 上で比較したのち $C_0^*[-\ell,\ell]$ 上で収束させることにより (E) と ($\overline{\text{E}}$) の解を比較することができる。

<u>$g \geqq 0$, $g \in C_0(\mathbb{R})$ なるとき (E) の解が compact support を持つこと。</u>今 $\max\{g(x)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \leqq C_*/2$ とする。C_* は下で定義する。さらに $\operatorname{supp} g = [-a, a]$ とおく。

今 $\forall T > 0$ を固定する。さらに

$$v(x,t) = \alpha t^{\frac{1}{m+1}} \left(1 - \beta |x| t^{-\frac{m}{m+1}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}}$$

ただし $\alpha^{m-1}\beta^2 = \dfrac{m-1}{m(m+1)}$, $\alpha^m \beta = \dfrac{1}{2m(m-1)}$, $\alpha, \beta > 0$

とすると distribution の意味で次の方程式をみたす。

$$v_t = (v^m)_{xx} + \delta_0 + F \quad , \quad v(\cdot, 0) = 0$$

ただし

$$F(x,t) = \beta \frac{|x|}{t^{m/m+1}} \left(1 - \beta \frac{|x|}{t^{m/m+1}}\right)_+^{\frac{2-m}{m-1}}$$

である。今

$$F(x,t) \geqq \min\left\{ \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2-m}{m-1}}, \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2-m}{m-1}} \right\} \fallingdotseq C_*$$

$$\text{ただし} \quad \frac{1}{4} \leqq \beta \frac{|x|}{t^{m/m+1}} \leqq \frac{3}{4}$$

従って x_0 を

$$(4\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right) \geqq T+1$$

とし $\ell = \beta^{-1}\left(T + 1 + \left(\frac{4}{3}\beta x_0\right)^{\frac{m+1}{m}}\right)$ とおき

$$\begin{cases} \hat{u}_t = (\hat{u})^m_{xx} + g(\cdot - x_0)\chi_{[(\frac{4}{3}\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}},\infty)}(t) \\ \hat{u}(\cdot,0) = 0 \end{cases}$$

を$C_0^*[-\ell,\ell]$上で考えること．*distribution* の意味で

$$0 \leqq \hat{u}(x,t) \leqq v(x,t) \qquad (x,t) \in (-\ell,\ell)\times(0,\ T+1+ (\tfrac{4}{3}\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}})$$

となる。これはY. Komura - Y. Konisi [7. 第4章] の中で述べられている．半群の順序保存を示す方法と同様にして．上の方程式の解に関する各点での比較定理を示すことができる。従って $\tilde{u}(x,t) = \hat{u}(x+x_0,\ t-(\frac{4}{3}\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}})$ とおくと、$\tilde{u}$ は $t\in[0,T]$ なるとき $C_0^*[-\ell-x_0,\ \ell+x_0]$ 上の compact support をもつ関数となるから．$\tilde{u}$ は $[0,T]$ 上 (E) の解 u と一致する。

<u>(E)と($\overline{\text{E}}$)．それぞれの解の support の比較</u>

$h_n \in C_0(\mathbb{R})$．$\operatorname{supp} h_n \subset [-a,a]$ $(\forall n \geqq 1)$，$h_n \geqq 0$ で $h_n \xrightarrow{w^*} \delta_0 \|g\|_{L^1}$ in $C_0^*[-\ell,\ell]$ とし．$\forall n \geqq 1$ に対して $\|h_n\|_{L^1} = \|g\|_{L^1}$

$$(\mathrm{E}_n)\begin{cases} u^{(n)}_t = (u^{(n)})^m_{xx} + h_n & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u^{(n)}(\cdot,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

なる$L^1(\mathbb{R})$上の解を$u^{(n)}$と書く。そのとき

$$\int_{-\infty}^{x} h_1(y-2a)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{x} h_n(y)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{x} h_1(y+2a)\,dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

が成立するから．比較定理2より

$$\int_{-\infty}^{x} u^{(1)}(y-2a,t)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{x} u^{(n)}(y,t)\,dy \leqq \int_{-\infty}^{x} u^{(1)}(y+2a,t)\,dy$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. $\forall n \geqq 1$, $\forall t \geqq 0$. さらに

$$\int_{\mathbb{R}} u^{(n)}(y,t)\,dy = \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot t \qquad \forall n \geqq 1,\ \forall t \geqq 0$$

従って $\forall n \geqq 1$, $\forall t \geqq 0$ に対して

$$\operatorname{supp} u^{(n)}(\cdot,t) \subset (\operatorname{supp} u^{(1)}(\cdot+2a,t)) \cup (\operatorname{supp} u^{(1)}(\cdot-2a,t))$$

ゆえに. $\forall T>0$ に対して $\exists \ell = \ell(T) > 0$ を十分大きくとれば $\bigcup_{n\geqq 1} \bigcup_{t\in[0,T]} \operatorname{supp} u^{n}(\cdot,t) \subset [-\ell,\ell]$ となる。

そこで. $C_0^*[-\ell-2a,\ell+2a]$ 上で考えたときの解 $\overline{u}_n(x,t)$ (Section 4) と $u^{(n)}$ は $t\in[0,T]$ に対して一到する。従って. 収束定理より. $n\to\infty$ とすると

$$\int_{-\ell-2a}^{x} \overline{u}(y-2a,t)\,dy \leqq \int_{-\ell-2a}^{x} u(y,t)\,dy \leqq \int_{-\ell-2a}^{x} \overline{u}(y+2a,t)\,dy$$

$\forall x \in [-\ell-2a,\ell+2a]$, $\forall t \geqq 0$. が成立し.

$$\int_{-\ell-2a}^{\ell+2a} \overline{u}(y\pm 2a,t)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{-\ell-2a}^{\ell+2a} \overline{u}_n(y\pm 2a,t)\,dy = \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot t$$

従って

$$\operatorname{supp} \overline{u}(\cdot,t) = [-\overline{\zeta}(t), \overline{\zeta}(t)] \qquad T \geqq \forall t \geqq 0$$

$$\operatorname{supp} u(\cdot,t) = [\zeta_1(t), \zeta_2(t)] \qquad T \geqq \forall t \geqq 0$$

とかくと.

$$-\overline{\zeta}(t) - 2a \leqq \zeta_1(t) \leqq -\overline{\zeta}(t) + 2a$$

$$\overline{\zeta}(t) - 2a \leqq \zeta_2(t) \leqq \overline{\zeta}(t) + 2a$$

$0 \leqq t \leqq T$ となる。ここで $\ell>0$ を $\overline{u}$, u が compact supportを$(-\ell-2a,\ \ell+2a)$の中で持つ様にとってやれば、$\overline{u}$, u ともℓによらない。従って$\forall t \geqq 0$に対して

$$|\zeta_i(t)-(-1)^i\overline{\zeta}(t)| \leqq 4a$$

が成立する。

最後に、$\overline{\zeta}(t)=\overline{\zeta}(1)t^{\frac{m}{m+1}}$ なること を示せば、主結果が言えたことになる。このことは、簡単な変数変換により示すことができる。$\forall a, b, c>0$に対して

$v(y,s) \equiv a\overline{u}(by, cs)$ とおくと

$$\frac{\partial v}{\partial s}(y,s)=\frac{c}{a^{m-1}b^2}\frac{\partial^2 v^m}{\partial y^2}(y,s)+\frac{ac}{b}\delta_0(y)$$

をみたす。そこで

$$\frac{c}{a^{m-1}b^2}=\frac{ac}{b}=1$$

をとくと、$b=c^{\frac{m}{m+1}}$ となる。$\forall T>0$ に対して$\ell=\ell(T)>0$を十分大きくとると $v(x,t)=\overline{u}(x,t)$ $\forall t\in[0,T]$ in $C_0^*[-\ell,\ell]$。従って

$\mathrm{supp}\,\overline{u}(\cdot,t)=\mathrm{supp}\,v(\cdot,t)$ となり

$$[-\overline{\zeta}(t),\overline{\zeta}(t)]=[-b^{-1}\overline{\zeta}(ct),\ b^{-1}\overline{\zeta}(ct)]$$

ゆえに、$\overline{\zeta}(ct)=c^{\frac{m}{m+1}}\overline{\zeta}(t)$ $\quad 0\leqq t\leqq T$

ここでℓを十分大きくとれば、$\overline{u}$, v はℓに無関係だか

ら. $\bar{\xi}(t) = \bar{\xi}(1)\, t^{\frac{m}{m+1}}$ （$t \geqq 0$）が成立する。従って $\bar{\xi}$ を $\bar{\xi}(1)$ ととれば，主結果が言えたことになる。

以上

参考文献

[1] J.L. Vazquez, *Asymptotic behaviour and propagation properties of the one-dimensional flow of gas in a porous medium*, Trans. Amer. Math. Soc. 277 ('83), 507-527.

[2] J.L. Vazquez, *Behaviour of the velocity of one-dimensional flows in porous media*, Trans. Amer. Math. Soc. 286 ('84) 787-802.

[3] P. Bénilan - M.G. Crandall - H. Brézis, *A semilinear Equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 2 ('75), 523-555.

[4] 宮寺 功，非線形半群，紀伊国屋書店，'77.

[5] H. Brézis - M.G. Crandall, *Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\phi(u) = 0$*, J. Math. Pures et Appl. 58 ('79), 153-163.

[6] M. Watanabe, *Solutions with compact support of the porous medium equation in arbitrary dimension*, (to appear).

[7]小西芳雄　高村 幸男，非線型発展方程式，岩波講座基礎数学，'77．