数理解析研究所講究録
第605巻 1987年 1-6

Almost complex S^1-action

東大・理　服部晶夫 (Akio Hattori)

以下において，X は compact connected almost complex S^1-manifold，$\dim_{\mathbb{C}} X = n$ とし，次の仮定を設ける．

(1) 不動点は全部孤立している．それらを $P_1, \cdots, P_\chi$ とする（このとき，必然的に，その個数 χ は X の Euler 数と一致する）．

(2) X 上の complex line bundle ξ とその上への S^1 作用の持ち上げが存在し，次の性質をみたす。

(i) t を standard S^1-module として，

$$\xi | P_i = t^{a_i} \quad , \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

と書いたとき，$\{a_i\}$ は互いに異なる。

(ii) $x = c_1(\xi) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ として，

$$x^n[X] > 0$$

（このような ξ は quasi-ample であるという）．

(3) $c_1(X) = k_0 x, \quad k_0 > 0$ の形に書ける。

モデルは複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 上の線型作用であり，これに対し，*hyperplane section bundle* は *quasi-ample* になる．なお，一般に $\chi = n+1$ のときは，(2) において，(i)が(ii)から導かれることに注意しておく．

以上の仮定の下に，まず次の定理が成り立つ。

定理 1 ([1]) $k_0 \leq n+1 \leq \chi$

この定理から，$k_0 = n+1$ および $n+1 = \chi$ の場合が，次の研究の目標になる。前者は，複素多様体における小林－落合の定理に対応する場合である。小林－落合の定理では，可能な多様体は $\mathbb{C}P^n$ に限られるというのが結論であった。後者，すなわち $n+1 = \chi$ となる典型的な多様体は $\mathbb{C}P^n$ である。したがって，いずれの場合も，状況は $\mathbb{C}P^n$ 上の線型作用に近いものであろうと予想される。以下，この方面での結果についていくつか触れてみたい。

TX を X の（複素）接バンドルとする。各 i に対し，$TX|P_i$ は S^1-*module* だから

$$TX|P_i = \sum_{k=1}^{n} t^{m_{ik}} \quad , \quad m_{ik}(\neq 0) \in \mathbb{Z}$$

と書ける．$\{m_{ik}\}_{1\leq k\leq n}$ を P_i のまわりの *weights* という．これに対し，次の等式が成り立つことが証明される。

(4) $$\sum_k m_{ik} = \frac{k_0}{\chi} \sum_j (a_i - a_j)$$

各 i に対し

$$(5) \qquad \varphi_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i}(1 - t^{a_i - a_j})}{\prod_k (1 - t^{m_{ik}})}$$

とおく。先の仮定の下に次の定理が成り立つ。

定理 2 ([1]) $\ell_0 = \chi - k_0$ とおく。次の性質 (i), (ii), (iii) をみたすような

$$r_0(t),\ r_1(t),\ \cdots,\ r_{\ell_0}(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] = R(S^1)$$

が存在する:

(i) 各 i に対し

$$\varphi_i(t) = r_0(t) + r_1(t)t^{a_i} + \cdots + r_{\ell_0}(t)t^{\ell_0 a_i}$$

(ii) $$r_{\ell_0 - s}(t) = (-1)^{\chi - (n+1)} r_s(t^{-1})\, t^{-\frac{\ell_0}{\chi}\sum a_j}$$

(iii) $$p_i = \#\{k ;\ m_{ik} > 0\}$$

$$\rho_q = \#\{i ;\ p_i = q\}$$

とおくと

$$r_0(t) = \rho_0 = \rho_n$$

注意 各 q に対し, $\rho_{n-q} = \rho_q$ が成り立つ。また, $\rho_0 = \rho_n$ は X の Todd genus $T[X]$ に等しい。特に, 上の仮定の下に,

$$T[X] \geq 0$$

である. また, すべての i に対し,

$$\varphi_i(1) = x^n[X]$$

が成り立つ。

定理1の最も極端な場合 $k_0 = n+1 = \chi$ においては，定理2から

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(1) = x^n[X] = T[X]$$

でなければならないことがわかる。実は，もっと精密に，次の定理が成り立つ。

<u>定理3</u>（[1]） $k_0 = n+1 = \chi$ ならば，各 i に対し，

$$\varphi_i(t) = 1 \quad \text{で,} \qquad \{m_{i,k}\} = \{a_i - a_j\}_{j \neq i}$$

である。

この定理の結論は，各点のまわりの weights が $\mathbb{C}P^n$ 上の線型作用と同じ形であることを示している。その意味で，この定理は小林－落合の定理の変換群論での類似と考えられる。ただし，小林・落合の定理では仮定は $k_0 = n+1$ だけであった。定理3において，仮定のうち $n+1=\chi$ が不可欠であるかどうかは不明である。

一方，$\chi = n+1$ という仮定の下に，次の予想が考えられる。

<u>予想</u>　先の仮定 (1), (2), (3) に，さらに

(1)′　$\chi = n+1$

(2)　(ii)′　$x^n[X] = 1$

(6)　$T[X] \neq 0$

を追加すると，$k_0 = n+1$ のみが起り得る。

この予想が正しければ，定理3により，各点のまわりでの

weights が完全に定まることになる。

この予想に関して、次の純代数的問題を提出したい。

問題　各 $i=0,1,\cdots,n$ に対し、整数 a_i と 0 でない整数 $\{m_{ik}\}_{1\le k\le n}$ が与えられ、$\{a_i\}$ は互いに異なり、また、すべての i に対し等式 (4) が成り立つような整数 $k_0>0$ が存在するとする。更に、各 i に対し、$\rho_i(t)$ を (5) によって定義すると、定理2の (i), (ii), (iii) をみたすような、$r_0(t), r_1(t), \cdots, r_{l_0}(t)$ が存在するとする。ただし、$l_0=n+1-k_0$。

ここで、もし、$\rho_i(1)=1$ かつ $\rho_0=\rho_n>0$ ならば $k_0=n+1$ (i.e. $l_0=0$) となるか？

注意　幾何学的には、P_i のまわりの weights $\{m_{ik}\}$ は、更に次の条件をみたすことが証明される。

(7) 各整数 m に対し

$$\#\{(i,k);\ m_{ik}=m\} = \#\{(i,k);\ m_{ik}=-m\}$$

(8) $\rho_q=\rho_{n-q}$ で、かつ

$$\sum_i \prod_k \left(\frac{1}{1-t^{m_{ik}}}-\lambda\right) = \sum_{q=0}^{n} \rho_q (1-\lambda)^q(-\lambda)^{n-q}$$

したがって、上の問題でも、必要があれば、$\{m_{ik}\}$ に対し上の条件 (7), (8) を追加してもよい。

上の予想は未解決であるが、$n\le 4$ までは正しいことが確かめられている [2]。その方法は $\mathbb{Z}/m \subset S^1$ の不動点集合を

同時に考察するものであり，$n=3$ のときでも相当複雑である．そのままの形で一般の n に拡張するのは困難が大き過ぎると思われる．その意味で，上の問題に対するなんらかの形の解答が望まれる．

文献

[1] A. Hattori, *S^1-actions on unitary manifolds and quasi-ample line bundles*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 31 (1985), 433-486

[2] ———, *Almost complex S^1-actions on cohomology complex projective spaces*, to appear in Proc. Transformation Groups Poznan 1985