

反自己双対接続のモジュライ空間の計量に関する考察

東大理 松本幸夫 (Yukio Matsumoto)

4次元多様体上の反自己双対な $SU(2)$ -接続のなすモジュライ空間の構造は, Donaldson [3], 古田 [4] 等により詳しく研究されているが, モジュライ空間の許容する計量についての考察はまだそれほどなされていまいようである. このノートでは, モジュライ空間の計量についてのいくつかの実験的計算結果を述べる. いずれも, 4次元球面 S^4 上の BPST-インスタントンに関する計算である.

§1. 正の曲率を与える計量.

反自己双対接続のモジュライ空間に一番素直な方法で計量を入れるには, $\Omega^1(\text{ad } \eta)$ の内積から決まる計量を入れるのがよいが, 4次元球面 S^4 の BPST-インスタントンについて計算すると, この計量は正の断面曲率を与える. これは, 広島大学の松本堯生氏と土井英雄氏, さらに筆者の協同作業の結果

である.

まず記号を決めよう. η を S^4 上の Hopf bundle $S^1 \rightarrow S^4$ に付随した \mathbb{C}^2 -bundle とする. 第2 Chern類は $C_2(\eta) = 1$ であることがわかる.

η の構造群を $SU(2)$, 張り合わせの関数を $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SU(2)$ としよう. このとき, U_α 達と, $SU(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の直積 $\{U_\alpha \times \mathfrak{su}(2)\}_{\alpha \in A}$ を次の同値関係

$$(x_\alpha, u_\alpha) \sim (x_\beta, u_\beta) \stackrel{\text{def}}{\iff} x_\alpha = x_\beta, u_\alpha = g_{\alpha\beta} u_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$$

で張り合わせで得られるベクトル束を $\text{ad}\eta$ と記す. $\text{ad}\eta$ のファイバーは $\mathfrak{su}(2)$ である.

非負整数 $p \geq 0$ について $\Omega^p(\text{ad}\eta) = \Gamma(\text{ad}\eta \otimes \wedge^p T^*M)$ とおく. (ただし, 今の場合は $M = S^4$)

η 上の接続 ∇ は, 局所的には $\mathfrak{su}(2)$ -valued 1-form A_α で与えられる: $\nabla = \{A_\alpha\}$. η 上に2つの接続 $\nabla = \{A_\alpha\}$, $\nabla' = \{A'_\alpha\}$ があつたとき, 差 $\nabla' - \nabla = \{A'_\alpha - A_\alpha\}$ は大域的な $\text{ad}\eta$ -valued 1-form $\in \Omega^1(\text{ad}\eta)$ になることがわかる: $\nabla' - \nabla \in \Omega^1(\text{ad}\eta)$.

η 上の接続全体を \mathcal{C} と記すと, \mathcal{C} は無限次元の空間になるが, 上のことから, \mathcal{C} の ∇ における "接ベクトル空間" は,

$\Omega^1(\text{ad}\eta)$ に他ならない。すなわち $T_{\nabla}C = \Omega^1(\text{ad}\eta)$ 。

S^4 の自然な計量に関する * 作用素 $*$: $\Lambda^p T^*S^4 \rightarrow \Lambda^{4-p} T^*S^4$ を $\text{id} \otimes *$ により $*$: $\Omega^p(\text{ad}\eta) \rightarrow \Omega^{4-p}(\text{ad}\eta)$ に拡張しよう。すると、 $u, v \in \Omega^p(\text{ad}\eta)$ に対し、

$$\langle u, v \rangle = - \int_{S^4} \text{Trace}(u \wedge *v)$$

とおいで、 $\Omega^p(\text{ad}\eta)$ に正定値内積が定まる。ただし、Trace は u と $*v$ の係数 (ともに $\mathfrak{su}(2)$ に属す) の複素行列としてこの積をとったものの Trace である。

$\nabla = \{A_\alpha\}$ による共変外微分 $d^\nabla : \Omega^p(\text{ad}\eta) \rightarrow \Omega^{p+1}(\text{ad}\eta)$ を、 $u \in \Omega^p(\text{ad}\eta)$ に対し、

$$d^\nabla u = du + A_\alpha \wedge u - (-1)^p u \wedge A_\alpha$$

と定義すると、これは大域的につながって well-defined である。 $d^\nabla : \Omega^p(\text{ad}\eta) \rightarrow \Omega^{p+1}(\text{ad}\eta)$ の、内積 \langle, \rangle に関する形式的伴随作用素を $\delta^\nabla : \Omega^{p+1}(\text{ad}\eta) \rightarrow \Omega^p(\text{ad}\eta)$ とする。

C の、接空間 $T_{\nabla}C$ は内積 \langle, \rangle に関して、 $T_{\nabla}C = \text{Im} d^\nabla \oplus \text{Ker } \delta^\nabla$ と直交分解される。($d^\nabla : \Omega^0(\text{ad}\eta) \rightarrow \Omega^1(\text{ad}\eta)$, $\delta^\nabla : \Omega^1(\text{ad}\eta) \rightarrow \Omega^0(\text{ad}\eta)$.) これは、次のような幾何的な

意味をもつ。

η の各ファイバーには自然に Hermitic 計量が入っていると
してよいが, この計量を保つ η の自己同型 $f: \eta \rightarrow \eta$ を ゲ-
ジ変換 と呼ぶ. ゲ-ジ変換の全体 \mathcal{G} を ゲ-ジ群 といい, \mathcal{G} は
自然に \mathbb{C} に作用している. 実は, 直交分解 $T_{\mathbb{C}} = \text{Im } d^{\nabla} \oplus$
 $\text{Ker } \delta^{\nabla}$ において, $\text{Im } d^{\nabla}$ は \mathcal{G} の Orbit 方向の接空間で
あり, $\text{Ker } \delta^{\nabla}$ は, その直交補空間である. (Sobolev norm
による完備化等の話は省略した.)

$\nabla = \{A_{\alpha}\}$ につき, $F_{\alpha} = dA_{\alpha} + A_{\alpha} \wedge A_{\alpha}$ とおくと, $su(2)$
-valued 2-form F_{α} は大域的につながって $\Omega^2(\text{ad } \eta)$ の元
 $F_{\nabla} = \{F_{\alpha}\}$ を与える. F_{∇} を接続 ∇ の 曲率 といい, F_{∇} が,
 $*F_{\nabla} = -F_{\nabla}$ を満たすとき, ∇ を反自己双対接続と
いう. この性質はゲ-ジ変換で不変である. 反自己双対接続全体の
なる \mathbb{C} の部分空間を \mathcal{G} で割って得られる空間が (反自己双対
接続の) モジュライ空間 \mathcal{M} である.

我々の場合, (底空間が S^4 のとき), \mathcal{M} は 5次元円板の内
部 \mathring{D}^5 と自然に同一視される. (Atiyah-Hitchin-Singer [1])
 $\Omega^1(\text{ad } \eta)$ の内積を $\text{Ker } \delta^{\nabla}$ に制限したものを $T_{[\nabla]} \mathcal{M}$ に落
すことによつて, \mathcal{M} は "自然に" Riemann 計量を持つとい
える. 我々の計算したのは, この計量である.

計算結果を述べよう.

$\mathbb{H} = \{ x \mid x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \}$ を 4 元数体とする.

$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ に対し, $\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k$, $|x|^2 = x \bar{x}$ (ただし $|x| \geq 0$), $\text{Im}(x) = x_2 i + x_3 j + x_4 k$ とおく.

立体射影の逆に相当する写像

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & \left(\frac{2x_1}{|x|^2+1}, \frac{2x_2}{|x|^2+1}, \frac{2x_3}{|x|^2+1}, \frac{2x_4}{|x|^2+1}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1} \right) \\ \mathbb{M} & & \mathbb{M} \\ \mathbb{R}^4 = \mathbb{H} & & S^4 \end{array}$$

により \mathbb{H} を S^4 の局所座標と見う. Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ を $\text{Im} \mathbb{H}$ と同一視する. S^4 上の BPST - インスタントンと呼ばれる反自双対接続の \mathbb{H} における connection form A は, $A = \frac{\text{Im}(\bar{x} dx)}{\lambda^2 + |x|^2}$ ($\lambda > 0$) で与えられる. これを 2-パラメータファミリーにした

$$A_{a,\lambda} = \frac{\text{Im} \{ (1 + \lambda^2 |a|^2) \bar{x} dx + (\lambda^2 - 1) \bar{a} dx \}}{|x - a|^2 + \lambda^2 |\bar{a} x + 1|^2} \quad (a \in \mathbb{H}, \lambda \in (0, 1))$$

が $M = D^5$ の回転不変な座標を与える.

補題. $\left. \frac{\partial A_{a,\lambda}}{\partial a_\nu} \right|_{a=0}$, $\nu = 1, 2, 3, 4$ と $\left. \frac{\partial A_{a,\lambda}}{\partial \lambda} \right|_{a=0}$ の $\text{Ker } \delta^\nabla \wedge$ の horizontal lift は $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

$$\left(\frac{\partial A_{a\lambda}}{\partial a_1} \Big|_{a=0} \right)^h = \frac{2(1-\lambda^2)\lambda^2}{1+\lambda^2} \left\{ -\frac{(1+|x|^2) \operatorname{Im}(dx)}{(\lambda^2+|x|^2)^2} + \frac{2x_1}{\lambda^2+|x|^2} A \right\}, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{\partial A_{a\lambda}}{\partial \lambda} \Big|_{a=0} \right)^h = \frac{-2\lambda}{\lambda^2+|x|^2} A, \quad \text{ここに } A = \frac{\operatorname{Im}(\bar{x}dx)}{\lambda^2+|x|^2} = \sum_{\nu=1}^4 A_\nu dx_\nu,$$

で与えらる。

これから次の結果を得る。

計算結果 ([21]) 点 $(a, \lambda) \in \mathcal{M}$ における \mathcal{M} の計量は

$$\frac{16\pi^2}{(|a|^2+1)^2} \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda^4}{5} F(4, 3, 6; 1-\lambda^2) \right\} |da|^2 + \frac{16}{5} \pi^2 \lambda^2 F(4, 3, 6; 1-\lambda^2) d\lambda^2$$

である。ここに $F(4, 3, 6; \xi)$ は超幾何関数。また断面曲率

のふるまいは、 $\lambda \rightarrow 0$ (\mathcal{M} の周辺部) では $K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}) \rightarrow \frac{4}{16} \frac{1}{\pi^2} > 0$, $K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}) \rightarrow \frac{3}{16} \frac{1}{\pi^2} > 0$. また $\lambda \rightarrow 1$ (\mathcal{M} の中心部) では $K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}) \rightarrow \frac{5}{16} \frac{1}{\pi^2} > 0$, $K(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}) \rightarrow \frac{5}{16} \frac{1}{\pi^2} > 0$.

§2. 負の曲率を与える計量

松本堯生氏 ([5]) は、 \mathcal{M} に負の定曲率空間の構造を与える計量の入れ方を見出した。彼の方法は曲率形式 F の (パラメータによる) 微分を利用するものであるが、 S^4 から一般の単連結 4次元多様体にもそのままでは拡張できない。そこで、一般の単連結 4次元多様体にも拡張できそうな計量の入れ方

を彼の方法を少し変形して述べよう。そして S^4 の場合に計算して見る。新しく modify した方法は彼のもとの計量と異なり、 S^4 に負の定曲率空間の構造は与えない。

定義. $v, w \in T_{[v]}M$ の horizontal lifts を $v^h, w^h \in \ker \delta^\nabla (\subset T_\nabla C)$ とする。 v と w の新しい "内積" $\langle\langle v, w \rangle\rangle$ を

$$\langle\langle v, w \rangle\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle d^\nabla(v^h), d^\nabla(w^h) \rangle$$

により定義する。ただし、 $d^\nabla: \Omega^1(\text{ad}\eta) \rightarrow \Omega^2(\text{ad}\eta)$ であり、また上式右辺の \langle, \rangle は $\Omega^2(\text{ad}\eta)$ における内積である。

新しい "内積" $\langle\langle v, w \rangle\rangle$ が $T_{[v]}M$ の正定値な形式であることは前以って証明できないうが、 S^4 の場合に計算してみると確かに正定値内積になつてくる。 S^4 上の計算は前節の補題 (horizontal lifts の explicit formula) により出来る。

計算結果. 点 $(a, \lambda) \in M$ において計算した上の内積 $\langle\langle, \rangle\rangle$ による計量は

$$\frac{32\pi^2}{5(|a|^2+1)^2} \frac{(1-\lambda^2)^2}{\lambda^2} \left\{ 1 + \frac{(1-\lambda^2)^2}{2(1+\lambda^2)^2} \right\} |da|^2 + \frac{32\pi^2}{5} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda^2 \text{ である.}$$

また断面曲率は $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}\right) < 0$ が証明できる。(ただし

$K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) < 0$ が常に成立つかどうかは計算していいない。)

 曲率のふるまいは、 $\lambda \rightarrow 0$ (M の周辺部) では、 $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}\right) \rightarrow -\frac{5}{32\pi^2}$ 、 $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \rightarrow -\frac{5}{32\pi^2}$ 、また $\lambda \rightarrow 1$ (M の中心部) では $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial a_\nu}\right) \rightarrow -\left(\frac{5}{8\pi}\right)^2$ 、 $K\left(\frac{\partial}{\partial a_\mu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \rightarrow -\left(\frac{5}{8\pi}\right)^2$ 。

§§ 1, 2 の計量を比較してみると、§ 1 の“素直なはずの計量”には超幾何関数などが顔を出しているが、§ 2 の計量は、 a と λ の有理関数だけで記述されている。§ 2 の計量の方がどうやら扱いやすそうである。

前頁で述べたように、§ 2 の“計量”が本当に計量であるかどうかは一般の単連結 4 次元多様体 M についてはまだわからない。§ 2 の“計量”が本当の計量であることは、次の予想と同値である。(S^4 については、この予想が正しいことが前頁の計算結果からわかる。)

予想 η を単連結 4 次元多様体 M 上の \mathbb{C}^2 -bundle $Z = C_2(\eta)$ $= 1$ をみたすものとする。 ∇ を η 上の反自己双対接続とする。このとき、 $u \in \Omega^1(\text{ad } \eta)$ につき、 $d^\nabla u = 0$ かつ $\delta^\nabla u = 0$ ならば $u = 0$ である。(反自己双対接続に関する調和 1 形式は自明なものしかない!?)

(1986. 5月12日記)

References

- [1] M.F.Atiyah,N.J.Hitchin,I.M.Singer; Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc.Roy.Soc.London, A362 (1978),425-461
- [2] H.Doï,Y.Matsumoto,T.Matsumoto; in preparation
- [3] S.K.Donaldson; An application of gauge theory to four-dimensional topology, J.Diff.Geom.18 (1983) 279-315
- [4] M.Furuta; Perturbation of Moduli Spaces of Self-dual Connections,preprint
- [5] T.Matsumoto; Hyperbolic metric on the moduli space of 1-instantons over S^4 , preprint.