数理解析研究所講究録
第605巻 1987年 37-44

周期系の周期解とbraid

阪大理 松岡 隆 (Takashi Matsuoka)

本稿は、向きを保つ中への同相写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の周期点とbraidとの関係について、最近得られた結果の総合報告である。

本論に入る前に、本稿で紹介される結果の微分方程式論への応用について簡単に触れておく。次の形の微分方程式系を考えよう。

$$(E) \qquad \frac{dx}{dt} = F(t, x) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2)$$

ここに、F は C^1-級写像で t に関し周期的であるとする。更に、任意の $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ を初期値とする(E)の解 $\phi(t; t_0, x_0)$ は無限の未来まで延長できると仮定する。F の周期を ω とおいて、写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x) = \phi(\omega; 0, x)$$

で定義すると、仮定より f は向きを保つ中への同相写像である。更に、f の周期点と(E)の周期解で周期が ω の有理数倍で

あるものとの間に一対一の対応が存在することが容易に導かれる。従って、f の周期点に関して得られた結果は、(E) の形の微分方程式系、すなわち周期系の周期解に関する研究に直ちに応用できる。

さて、$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を向きを保つ中への同相写像としよう。通常、写像の周期点はその周期により分類されるが、f の周期点に対しては "braid type" によるより細かい分類方法がある。以下では、より一般的に f-不変有限集合に対して、その braid type を定義する。n を自然数とし、B_n を n 次 braid group とする。B_n は平面 $\mathbb{R}^2$ 内の n 個の点からなる部分集合全体のつくる位相空間 W_n の基本群である。B_n の元は n-braid、または単に braid と呼ばれる。群 B_n に次の同値関係 $\sim$ を入れる。

$$\sigma \sim \sigma' \iff {}^\exists \alpha \in B_n,\ {}^\exists \theta \in \text{Center of } B_n$$
$$\text{s.t. } \sigma' = \theta\, \alpha \sigma \alpha^{-1}$$

そして、

$$BT_n = B_n/\sim$$

とおき、BT_n の元を <u>n-braid type</u>、または単に <u>braid type</u> とよぶ。Σ を f-不変 (i.e. $f(\Sigma)=\Sigma$) 有限集合とする。このとき、braid type $\beta(\Sigma)$ が次の様に定義される。id と f を結ぶ isotopy $f_t: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を 1 つ選び、$\Sigma = \{x_1, \cdots, x_n\}$ と

表わしておく。このとき

$$[0,1]\ni t \longrightarrow \{f_t(x_1),\cdots,f_t(x_n)\}$$

は W_n 内の loop である。この loop により定められる braid を $b(\Sigma)$ とかき、$\beta(\Sigma)$ を $b(\Sigma)$ の同値類として定義する。

<u>定義</u>1. $\beta(\Sigma)$ を f-不変集合 <u>Σ の braid type</u> という。

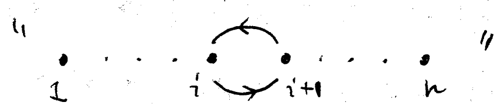
本稿の最初の結果は、Σ の braid type と f の周期点との関係に関するものである。

$$B : B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t,t^{-1}])$$

を B_n の被約 Burau 表現とする。すなわち、B は B_n から不定元 t の Laurant 多項式環 $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ 上の一般線型群への準同形で、次式で定義されるものである。

$$B(\sigma_i)=\left(\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & t & -t & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & & 0 & & I_{n-i-2} \end{array}\right) \qquad (1\leqq i\leqq n-1)$$

ここに、I_j は j 次単位行列, σ_i は次図で示されるような n-braid である。($\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1}$ は B_n を生成する。)

$\sigma_i =$ 

n-braid σ と整数 k に対し、整数 $r_k(\sigma)$ を次で定める。

$$\mathrm{trace}\, B(\sigma) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_k(\sigma)\, t^k .$$

更に、braid type β と自然数 p に対し、

$$M(\beta,p) = \#\{k\in\mathbb{Z} \mid r_k(\sigma^p)\neq 0,\ (k,p)=1,\ n\nmid k\}$$

とおく。ここに、σ は β の代表元。以上の準備の下に、次の定理を述べる。

<u>定理</u> 1 (Matsuoka [7]〜[10]) Σ を f-不変有限集合とし、f は Σ で微分可能とする。このとき、

(1) $\#\{f$ の p-周期点$\} \geqq p(M(\beta(\Sigma),p)-n)$ for $\forall p\in\mathbb{N}$

(2) $\#\Sigma = 3$, $\beta(\Sigma) = [\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{j_1}\cdots\sigma_1^{i_d}\sigma_2^{j_d}]$, $i_1,\cdots,i_d>0$, $j_1,\cdots,j_d<0$ ならば f は無限個の周期の異なる周期点をもつ。

上の定理において、p-周期点とは、最小周期が p である f の周期点のことである。

定理 1 の (2) の主張は、f がある条件をみたす場合に、Kobayashi [3]〜[5] により、一般化されている。

定理2 (Kobayashi). $\mathbb{R}^2$内にある円板 D が存在して, $f(D)\subset D$; $\Sigma\subset \mathrm{Int}\, D$ をみたし, f は Σ で微分可能とする。このとき, もし link $L(\Sigma)$ が graph link でなければ, f は周期の異なる無限個の周期点を D 内にもち, 更に $f|_D : D\to D$ の位相的エントロピーは零でない。

上において, link $L(\Sigma)$ は braid $b(\Sigma)(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n)(\sigma_n\cdots\sigma_2\sigma_1)$ を閉じてできる link である。また link L が graph link であるとは次の条件をみたすときである。

$^\exists M_1, \cdots, M_k$ s.t.

$S^3-(L\text{の開管状近傍})=\bigcup_{i=1}^{k} M_i$

$\mathrm{Int}\, M_i$; $i=1,\cdots,k$ は互いに素, $\partial M_i = T^2$

$M_i = (\text{a surface})\times S^1$

graph link のより見やすい特徴付けは [3] に与えられている。

定理1, 2の例 : n を素数とし, x を f の n-周期点とする。$\Sigma=\{x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\}$ とおき, σ を $\beta(\Sigma)$ の1つの代表元とする。このとき, もし σ の exponent sum $e(\sigma)$ が次をみたすならば, $L(\Sigma)$ は graph link でない。

$$e(\sigma)\not\equiv 0 \pmod{n-1}$$

($e(\sigma)$ は $\sigma=\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots\sigma_{i_r}^{\varepsilon_r}$ に対し, $e(\sigma)=\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_j$ で決まる数)。

例えば、$\beta(\Sigma) = [\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\sigma_4]$ のとき $e(\sigma) = 6 \not\equiv 0 \pmod 4$ であるので、$L(\Sigma)$ は graph link でない。

定理1の証明の主要部分は次の定理を応用することである。

定理（equivariant Lefschetz formula [2]）X を有限複体、$\pi : \tilde{X} \to X$ を正則被覆で被覆変換群 H は可換とする。$g : X \to X$ を連続写像とし、$\tilde{g} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ を $\forall h \in H$ と可換な g の lift とする。このとき generalized Lefschetz number

$$L_H(\tilde{g}) = \sum_{h \in H} \mathrm{ind}(g, \pi(\mathrm{Fix}(h^{-1}\tilde{g})))h \in \mathbb{Z}[H]$$

は次式をみたす。

$$L_H(\tilde{g}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \,\mathrm{trace}[\tilde{g}'_{\#} : C_i(\tilde{X}) \to C_i(\tilde{X})]$$

ここに、Fix( ) は不動点集合、ind は不動点指数、g' は g と homotopic な胞体写像である。

定理1の証明においては、$X = D^2$ の Σ での blowing up, $\tilde{X} = X$ の universal abelian cover, $g = f$ の $\tilde{X}$ への拡張に対し、上の定理を適用する。

注意：$\tilde{X} = X$ のとき、$L_H(\tilde{g})$ は通常の Lefschetz 数 $L(g)$ と

一致する。

定理2は、Nielsen-Thurston の2次元微分同相写像の分類理論の応用として得られる。

最後に、braid type の Sharkovskii 型順序について述べる。この順序は、一次元写像の周期点の存在に関する有名な Sharkovskii の定理（以下で紹介）の2次元版を考えるために、Boyland によって導入されたものである。([1])

定理（Sharkovskii, [11]を参照）　自然数全体の集合に次の様な順序 $\succ$ を導入する。

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \cdots$$
$$\cdots \succ 2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ \cdots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2$$

このとき、連続写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が m-周期点をもてば、h は ${}^\forall n \prec m$ に対し、n-周期点をもつ。

<u>定義</u>2　$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} BT_n$ に次の関係 $\geqq$ を入れる。β_1, β_2 を braid type とするとき、

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ 向きを保つ中への同相写像}$$
$$\text{s.t.}\ \ulcorner {}^\exists \Sigma : f\text{-inv. with } \beta(\Sigma) = \beta_1 \lrcorner$$
$$\text{に対し、} {}^\exists \Sigma' : f\text{-inv. with } \beta(\Sigma') = \beta_2$$

関係 $\geqq$ は反射律，推移律をみたす。すなわち，$\geqq$ は擬順序である。$\geqq$ が反対称律をみたすかどうかは不明である。[9]において，順序 $\geqq$ の若干の具体的計算が行なわれている。例えば

(1) $\forall$ braid type $\geqq [e]$ （e は B_1 の唯一つの元）

(2) $\cdots > [\sigma_1^5 \sigma_2^{-1}] > [\sigma_1^3 \sigma_2^{-1}] > [\sigma_1 \sigma_2^{-1}] > [\sigma_1 \sigma_2]$
$> [(\sigma_1 \sigma_2)^{-1}]$

(3) $[\sigma_1^i \sigma_2^{-1} \sigma_1^j \sigma_2^{-1}] > [\sigma_1^{i-2} \sigma_2^{-1} \sigma_1^j \sigma_2^{-1}]$

i, j: odd, $i \geqq 3$

不等式 (1) は Brouwer の translation theorem の Massera による改良([6])

"平面から平面への向きを保つ中への同相写像が，有界な軌道をもてば，不動点をもつ。"

より，ただちに得られる。

参考文献

1 P. Boyland, Braid types and a topological method of proving positive entropy, preprint.
2 D. Fried, in Lecture Note in Math. 1007.
3 T. Kobayashi, Invent. Math. 80 (1985), 153-159.
4 ＿＿＿＿＿, Proc. Japan Acad. 60 (1984), 381-383.
5 ＿＿＿＿＿, The Theory of Dynamical Systems and Its Applications to Nonlinear Problems (H. Kawakami, ed.), World Sci. Publ., Singapore, 1984, 42-49.
6 J. L. Massera, Duke Math. J. 17 (1950), 457-475.
7 T. Matsuoka, Invent. Math. 70 (1983), 319-340.
8 ＿＿＿＿＿, Japan J. Appl. Math. 1 (1984), 417-434.
9 ＿＿＿＿＿, World Scientific Advanced Series in Dynamical Systems, Vol. 1 (1986), 58-72.
10 ＿＿＿＿＿, The number and linking of periodic solutions of nondissipative systems, preprint.
11 P. Stefan, Commun. Math. Phys. 54 (1977), 237-248.