数理解析研究所講究録
第605巻 1987年 63-72

Steenrod代数と Λ-代数.

西田吾郎（京大，理）.

Steenrod作用素と Dyer-Lashof作用素は，共に対称群のホモロジー群を基にして定義されるが，それらの環構造を定める Adem の関係式はみかけ上は異なっている。一方 Dyer-Lashof 代数と Λ- 代数は本質的に同一の Adem関係式をもつことが Singer 等により知られている．本論の目標は，対称群のホモロジーのある種の局所化と不変式論を用いることにより，Steenrod代数と Dyer-Lashof 代数（従って Λ-代数）を統一的に定義できることを示すことである。本論では mod 2 の理論をあつかう。以後コホモロジーの係数は常に標数2の素体 $\mathbb{F}_2$ と約束する．

§1. 対称群のコホモロジーと不変式.

$\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{Z}_2^n$ の線型変換群，Affine 変換群，および集合としての置換群をそれぞれ $GL_n(\mathbb{F}_2)$，$Aff(\mathbb{Z}_2^n)$ および Σ_{2^n} と表わす．また $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の上半三角行列全体のなす部分群を U_n とする。このとき 群拡大

$$\mathbb{Z}_2^n \longrightarrow Aff(\mathbb{Z}_2^n) \xrightarrow{\pi} GL_n(\mathbb{F}_2)$$

から誘導される次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_2^n & \longrightarrow & \pi^{-1}(U_n) & \longrightarrow & U_n \\ \| & & \cap & & \cap \\ \mathbb{Z}_2^n & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_2^n) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{F}_2) \end{array}.$$

U_n は $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の 2-Sylow 部分群であり，$[\Sigma_{2^n}, \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_2^n)]$ は奇数だから，$\pi^{-1}(U_n)$ は Σ_{2^n} の 2-Sylow 部分群である．従って $\pi^{-1}(U_n)$ を $\Sigma_{2^n,2}$ と表わすとき，次の包含写像

$$\mathbb{Z}_2^n \xrightarrow{d} \Sigma_{2^n,2} \xrightarrow{i} \Sigma_{2^n}$$

が得られ，$N_{\Sigma_{2^n}}(\mathbb{Z}_2^n)/\mathbb{Z}_2^n \cong GL_n(\mathbb{F}_2)$，$N_{\Sigma_{2^n,2}}(\mathbb{Z}_2^n)/\mathbb{Z}_2^n \cong U$ となる。但し $N_{(\ )}(\ )$ は正規化部分群である．従って次の可換図式が得られる．

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccc} H^*(B\Sigma_{2^n}) & \xrightarrow{i^*} & H^*(B\Sigma_{2^n,2}) & \xrightarrow{d^*} & H^*(B\mathbb{Z}_2^n) \\ \downarrow d^* & & \downarrow d^* & & \| \\ \mathbb{Z}_2[t_1,\cdots,t_n]^{GL_n} & \subset & \mathbb{Z}_2[t_1,\cdots,t_n]^{U_n} & \subset & \mathbb{Z}_2[t_1,\cdots,t_n] \end{array}.$$

ここで，不変式の環はよく知られているように $\mathbb{Z}_2[t_1,\cdots,t_n]^{GL_n} \cong \mathbb{Z}_2[g_{n,0},\cdots g_{n,n-1}]$，但し $g_{n,i}$ は Dickson 不変式で $|g_{n,i}| = 2^n-2^i$ である。一方 H. Mui によってある種の U_n-不変式 v_i ($|v_i|=2^i$) が定義され，$\mathbb{Z}_2[t_1,\cdots,t_n]^{U_n} \cong \mathbb{Z}_2[v_1,\cdots,v_n]$ となることが知られている。

注意 1．対称群 Σ_{2^n} の 2^n-次元の標準的置換表現を V とすると，$V|\mathbb{Z}_2^n$ は $\mathbb{Z}_2^n$ の regular 表現である．V の全 Stiefel

Whitney 類は

$$w(V) = 1 + g_{n,n-1} + \cdots + g_{n,0}$$

で与えられる．特に $V-1$ の Euler 類は $e(V-1) = g_{n,0}$，従って $g_{n,0} = \prod e(\gamma_i) = \prod(t_1, \cdots, t_n$ の一次式$)$ である．但し γ_i は $\mathbb{Z}_2^n$ のすべての非自明な 1-dim 表現を動く．

注意 2．$\Sigma_{2^n,2} = \mathbb{Z}_2 \int \mathbb{Z}_2 \int \cdots \int \mathbb{Z}_2$ に対しては

$$\begin{aligned} V|_{\Sigma_{2^n,2}} - 1 &= \xi_1 + E(\xi_2 + E(\cdots + E(\xi_n)\cdots)) \\ &= \xi_1 + E(\xi_2) + E^2(\xi_3) + \cdots + E^{n-1}(\xi_n) \end{aligned}$$

が成り立つ．但し ξ_i は i 番目の $\mathbb{Z}_2$ の 1-dim 非自明表現で，$E(\ )$ は表現の extended power である．このとき不変式 v_i は Euler 類 $e(E^{i-1}(\xi_i))$ で与えられる．特に $v_1 \cdots v_n = g_{n,0}$ である．

<u>定理 1</u>．図式 $(*)$ を $g_{n,0}$ によって局所化するとき，次の可換図式と同型が得られる．

$$\begin{array}{ccccc} H^*(B\Sigma_{2^n})[g_{n,0}^{-1}] & \xrightarrow{i^*} & H^*(B\Sigma_{2^n,2})[g_{n,0}^{-1}] & \xrightarrow{d^*} & H^*(B\mathbb{Z}_2^n)[g_{n,0}^{-1}] \\ \cong \big\downarrow d^* & & \cong \big\downarrow d^* & & \| \\ \mathbb{Z}_2[g_{n,0}^{\pm}, g_{n,1}, \cdots, g_{n,n-1}] & \subset & \mathbb{Z}_2[v_1^{\pm}, \cdots, v_n^{\pm}] & \subset & \mathbb{Z}_2[t_1, \cdots, t_n, g_{n,0}^{-1}] \end{array}$$

§ 2．基本関係式．

$w_i = v_i/(v_1 \cdots v_{i-1}) \in H^1(B\Sigma_{2^n,2})[g_{n,0}^{-1}]$ とおくと，明らかに

$H^*(B\Sigma_{2^n,2})[g_{n,0}^{-1}] \cong \mathbb{Z}_2[w_1^{\pm},\cdots,w_n^{\pm}]$ である．$M^*[n]=H^*(B\Sigma_{2^n,2})[g_{n,0}^{-1}] \cong \mathbb{Z}_2[w_1^{\pm},\cdots,w_n^{\pm}]$，$D^*[n]=H^*(B\Sigma_{2^n})[g_{n,0}^{-1}] \cong \mathbb{Z}_2[g_{n,0}^{\pm},g_{n,1},\cdots g_{n,n-1}]$ とおき，環の直和 $\bigoplus_n M^*[n]$，$\bigoplus_n D^*[n]$ をそれぞれ M^*，D^*と表わす。各 n に対し

$$\psi_n : M^*[n] \longrightarrow \bigoplus M^*[k]\otimes M^*[n-k]$$

を $\psi_n(w_1^{i_1}\cdots w_n^{i_n})=\sum(w_1^{i_1}\cdots w_k^{i_k})\otimes(w_1^{i_{k+1}}\cdots w_{n-k}^{i_n})$ とおくと，M^*は $\psi=\oplus\psi_n$ を余積とする Hopf 代数となる．このとき Dickson 不変式の性質から次の定理が容易に得られる．

<u>定理２</u>．　D^* は M^* の部分 Hopf 代数である．

次に $M^*[n]$ の basis は $I=(i_1,\cdots,i_n)$，$i_q\in\mathbb{Z}$ に対し $w_{[n]}^I=w_1^{i_1}\cdots w_n^{i_n}$ で与えられるものとし，この basis に関する dual を $\lambda_I=\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n}\in \mathrm{Hom}(M^*[n],\mathbb{F}_2)$ と書く．また，このような λ_I で生成される $\mathrm{Hom}(M^*[n],\mathbb{F}_2)$ の submodule を $M_*[n]$，$M_*=\oplus M_*[n]$ とする．同様に，$D^*[n]$ の basis を $K=(k_0,\cdots,k_{n-1})$，$k_0\in\mathbb{Z}$，$k_q\in\mathbb{Z}^+$ $(q>0)$ に対し $g_{[n]}^K=g_{n,0}^{k_0}\cdots g_{n,n-1}^{k_{n-1}}$ とおき，$g_{[n]}^K$ の dual 元で生成された $\mathrm{Hom}(D^*[n],\mathbb{F}_2)$ の submodule を $D_*[n]$，$D_*=\oplus D_*[n]$ とおく。

M_*，D_* はそれぞれ M^*，D^* の dual Hopf 代数であり，自然な射影 $\pi: M_*\to D_*$ が存在する．M^*の余積の定義から，$(\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n})\cdot(\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_m})=\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n}\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_m}$ は容易にわかるから，M_* は symbol λ_i，$i\in\mathbb{Z}$ で生成される free associative algebraとなる.

次に加群の同型 $\delta[n]: M^*[n] \to M_*[n]$ を $\delta[n](\omega_{[n]}^I)$ $= \lambda_{-I-1} = \lambda_{-i_1-1}\lambda_{-i_2-1}\cdots\lambda_{-i_n-1}$ と定義する. $\delta = \oplus\delta[n]: M^* \to M_*$ とおくとき, 次の基本定理を得る.

<u>定理3</u>. 次の完全列が存在する.

$$0 \longrightarrow D^* \xrightarrow{\delta} M_* \xrightarrow{\pi} D_* \longrightarrow 0.$$

環 D_* は自由環 M_* から関係式の ideal $\mathrm{Ker}\,\pi$ によって定義されるが, 上の定理は, 関係式全体が D_* 自身と同型になることを主張する. 定理の証明には次の事実を用いる. $M^* \ni x$ に対し, $\psi(x) = \sum x_i \otimes x_i'$ ならば, $\delta(x) = \sum \delta(x_i)\delta(x_i')$. 従って $\pi\circ\delta = 0$ を示すには $\pi\circ\delta(D^*[2]) = 0$ を示せばよいが, これは直接計算で確められる。この事実から, 特に $\mathrm{Ker}\,\pi$ は 2項関係式 ($\delta(D^*[2])$) で生成されることもわかる. $D^*[2] = \mathbb{Z}_2[g_{2,0}^{\pm}, g_{2,1}]$, $g_{2,0} = \omega_1^2\omega_2$, $g_{2,1} = \omega_1(\omega_1+\omega_2)$ だから $g_{2,0}^a g_{2,1}^b = \omega_1^{2a+b}\omega_2^a(\omega_1+\omega_2)^b$ である. 従って $\delta(g_{2,0}^a g_{2,1}^b)$ を計算すれば 次の結果を得る.

<u>系4</u> (Adem relation). $\mathrm{Ker}\,\pi$ は次の関係式

$$\sum_i \binom{b}{i} \lambda_{-2a-2b-1+i}\lambda_{-a-1-i}$$

で生成される. ただし $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 0$.

§3. Extended power とコホモロジー作用素.

前節において，対称群のコホモロジーから純代数的に環 D_* を定義したが，本節では Steenrod 代数や Λ-代数は D_* の部分環であることを示す．

n 次対称群 Σ_n の部分群 G と，空間 X に対し Extended power $D_G X = (EG_+ \wedge X^{(n)})/G$ を考える．ただし EG は普遍 G 空間，$X^{(n)} = \underbrace{X \wedge \cdots \wedge X}_{n}$ である．次の写像

$$D_G X = (EG_+ \wedge X^{(n)})/G \simeq (EG_+ \wedge EG_+ \wedge X^{(n)})/G \to BG_+ \wedge D_G X$$

によって $\widetilde{H}^*(D_G X)$ は $H^*(BG)$-加群となる．$H^*(BG) \ni \alpha$ に対し，$\alpha\cdot : \widetilde{H}^*(D_G X) \to \widetilde{H}^{*+|\alpha|}(D_G X)$ の双対を

$$/\alpha \ : \ \widetilde{H}_*(D_G X) \longrightarrow \widetilde{H}_{*-|\alpha|}(D_G X)$$

と表わし，$\widetilde{H}_*(D_G X)$ も $H^*(BG)$-加群と考える．

$$\Delta \ ; \ BG_+ \wedge X \longrightarrow D_G X$$

を対角写像 $X \to X^{(n)}$ から誘導される写像とすると

$$\Delta_* \ : \ H_*(BG) \otimes \widetilde{H}_*(X) \longrightarrow \widetilde{H}_*(D_G X)$$

は $H^*(BG)$-準同型である．

次に，§1 の注意1で述べたように，Σ_n の置換表現 V_n に対し Euler 類 $e_n = e(V_n|_G - 1) \in H^{n-1}(BG)$ を考える．e_n の slant 積 $/e_n$ による逆系

$$\widetilde{H}_*(D_G X) \xleftarrow{/e_n} H_{*+n-1}(D_G X) \xleftarrow{/e_n} \cdots$$

を考え，その逆極限を $\widetilde{H}_*(D_G X)^\wedge$ と表わす．$\widetilde{H}_*(D_G X)^\wedge$ は明らかに $\widetilde{H}^*(D_G X)[e_n^{-1}]$ の dual である．

$\widehat{H}_*(X)$ の basis $x_1, x_2, \cdots$ を固定すると，次の同型が存在する.

$$\widehat{H}_*(X^{(n)}) \cong \Big(\bigoplus_i \mathbb{F}_2(x_i\otimes\cdots\otimes x_i)\Big)\oplus \text{others} \quad \text{as } \Sigma_n\text{-module}.$$

従って $\widehat{H}_*(D_G X) \cong \bigoplus_i H_*(G\,;\mathbb{F}_2(x_i\otimes\cdots\otimes x_i)) \oplus H_*(G:\text{others})$.

ここで $x_i\otimes\cdots\otimes x_i \in H_0(G\,;\mathbb{F}_2(x_i\otimes\cdots\otimes x_i))$ を $\int x_i$ と表わすと $H_*(G\,;\mathbb{F}_2(x_i\otimes\cdots\otimes x_i)) \cong \{a\int x_i\ ;\ a\in H_*(BG)\}$ と表わせる. このとき degree preserving な準同型

$$\phi_*\ :\ H_*(BG)^\wedge\otimes \widehat{H}_*(X) \longrightarrow \widehat{H}_*(D_G X)^\wedge$$

を $\phi_*(a\otimes x) = (a/e_n^{|x|})\int x$ と定義する. このとき

<u>定理5</u>. ϕ_*, Δ_* ; $H_*(BG)^\wedge\otimes\widehat{H}_*(X)\longrightarrow\widehat{H}_*(D_G X)^\wedge$ は共に同型である. ただし X は有限複体とする.

証明は, Euler 類 e_n が上に述べた $H_*(G:\text{others})$ を零化することから示される.

さて $\xi\ ;\ H_*(BG)^\wedge\otimes\widehat{H}_*(X)\longrightarrow\widehat{H}_*(X)$ を次の写像の合成として定義する.

$$H_*(BG)^\wedge\otimes\widehat{H}_*(X)\xrightarrow{\phi_*}\widehat{H}_*(D_G X)^\wedge\xrightarrow{\Delta_*^{-1}} H_*(BG)^\wedge\otimes\widehat{H}_*(X)\xrightarrow{\pi\otimes 1}\widehat{H}_*(X).$$

ただし $\pi\ ;\ H_*(BG)^\wedge\longrightarrow\mathbb{F}_2$ は $1\in H^0(BG)[e_n^{-1}]$ に対応する準同型である. また $X=Y_+$, Y は無限ループ空間のとき, Dyer-Lashof によって定義された写像 $\theta : D_G X\subset D_{\Sigma_n}X\to X$ を用いて $\xi_\Omega\ ;\ H_*(BG)^\wedge\otimes\widehat{H}_*(X)\longrightarrow\widehat{H}_*(X)$ を

$$H_*(BG)^\wedge\otimes\widehat{H}_*(X)\xrightarrow{\phi_*}\widehat{H}_*(D_G X)^\wedge\xrightarrow{p}\widehat{H}_*(D_G X)\xrightarrow{\theta_*}\widehat{H}_*(X)$$

と定義する．ただし p は自然な射影である．定義から容易にわかるように $H_*(BG)^\wedge \ni a$ に対し

$$\xi_a = \xi(a,\ ) : \hat{H}_*(X) \longrightarrow \hat{H}_{*-|a|}(X)$$

はホモロジー作用素で dualをとれば次数 $|a|$ のコホモロジー作用素を与える．無限ループ空間の圏では，同様に $\xi_\Omega(a,\ )$ はホモロジー作用素である．このとき

<u>定理6</u>．$G = \mathbb{Z}_2 = \Sigma_2$ とし，$H_i(B\mathbb{Z}_2)^\wedge$ の basis を e_i，$i \in \mathbb{Z}$，$|e_i| = i$ とする．

i)．$\xi(e_i,\ ) = (c\,S_q^{-i})_*$，ただし $i > 0$ のとき $\xi(e_i,\ ) = 0$，c は canonical な逆同型，また $(\ )_*$ は dualを表わす．

ii)．$\xi_\Omega(e_i,\ ) = Q^i$，ただし Q^i は Dyer-Lashof 作用素で $i < 0$ のとき $\xi_\Omega(e_i,\ ) = 0$．

定理の ii) は Q^i の定義に他ならない．i) は dual をとれば S_q^i の定義から容易にわかる．

次に $G = \Sigma_{2^n,2} = \mathbb{Z}_2 \int \cdots \int \mathbb{Z}_2 < \Sigma_{2^n}$ の場合を考える．このとき $D_G(X) = D_{\mathbb{Z}_2} \cdots D_{\mathbb{Z}_2}(X)$ であり，特に $B\Sigma_{2^n,2} = D_{\mathbb{Z}_2} \cdots D_{\mathbb{Z}_2}(S^0)$ である．また $H_*(B\Sigma_{2^n,2})^\wedge = \mathrm{Hom}(H^*(B\Sigma_{2^n,2})[q_{n,0}^{-1}], \mathbb{F}_2) \supset M_*[n]$ に注意すると次の系が得られる．

<u>系7</u>．$M_*[n] \ni \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}$ に対し

i)．すべての k に対し $i_k \leq 0$ であれば

$$\xi(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n},\ ) = (c\,S_q^{-i_1})_* \cdots (c\,S_q^{-i_n})_* = (c(S_q^{-i_1} \cdots S_q^{-i_n}))_*.$$

ii) すべての k に対し $i_k \leq 0$ であれば

$$\xi_\Omega(\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n},\ ) = Q^{i_1}\cdots Q^{i_n}.$$

さて λ_i, $i \geq 0$ で生成された M_* の部分環を M_*^{pos}, また λ_i, $i \leq 0$ で生成された部分環を M_*^{neg} と表わす．上の系より 環の全射準同型 $M_*^{pos} \xrightarrow{\pi_1} R$ および $M_*^{neg} \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{A}_2$ が得られる．ただし R は Dyer-Lashof 代数，$\mathcal{A}_2$ は mod 2 Steenrod 代数である．一方 定理3の全射 $\pi : M_* \to D_*$ を考えると ξ および ξ_Ω の定義から $\pi_1(\mathrm{Ker}\,\pi) = \pi_2(\mathrm{Ker}\,\pi) = 0$ が容易に示される．従って環の全射

$$\pi(M_*^{pos}) \longrightarrow R \quad , \quad \pi(M_*^{neg}) \longrightarrow \mathcal{A}_2$$

が得られる。このとき

<u>定理8</u>. D_* の部分環について次が成り立つ.

i). $\pi(M_*^{pos}) \cong \Lambda$; Λ- algebra.

ii). $\pi(M_*^{neg}) \cong \widetilde{\mathcal{A}}_2$, Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2$ において関係式 $Sq^0 = 1$ を除いたもの.

証明は, i) は Λ-代数の定義と系4の Adem relation を比べると容易にわかる. ii) は D_* において $\lambda_0 \neq 1$ であることと, 次元を比べることから容易にわかる.

注意3. $\pi(M_*^{pos}) \cong \Lambda$ から Dyer-Lashof 代数 R を得るには, $\pi(M_*^{pos})$ をさらに excess condition から定義される関係式で割ればよい.

注意4. 系4の Adem relation は λ_i の言葉で書かれている. これを Sq^i で書き直せば次の通りである.

$$\sum_i \binom{b}{i} Sq^{2a+2b+1-i} Sq^{a+1+i} = 0$$

ただし $b>0,\ a\geq -1$ あるいは $b=0,\ a\geq 0$.