数理解析研究所講究録
第605巻 1987年 92-99

BPホップ加群スペクトラムと BP$_*$-Adamsスペクトル系列

大阪市大 理　吉村善一
Yosimura Zen-ichi

[1] p を素数とし，$H\mathbb{Z}/p$ を $\mathbb{Z}/p$ 係数の Eilenberg-MacLane スペクトラム，$A_p = H\mathbb{Z}/p^* H\mathbb{Z}/p$ を法 p の Steenrod 代数とする。素約作用素 $\mathcal{P}^i$，$i>0$，($p=2$ のとき $\mathcal{P}^i = Sq^{2i}$) によって生成される A_p のホップ部分代数を $\mathcal{P}$ で表すと，$p \neq 2$ のとき $\mathcal{P}$ は多元環として $A_p/(Q_0)$ に同型である。但し，(Q_0) は Bockstein 作用素 $Q_0 = \Delta$ によって生成される A_p の両側イデアルである。Brown-Peterson (1966) は $\mathbb{Z}/p$ 係数コホモロジー群が A_p 加群として $A_p/(Q_0)$ になるスペクトラム BP を構成した。

又，Milnor 元 $Q_i = [\mathcal{P}^{p^{i-1}}, Q_{i-1}]$，$i \geq 0$，によって生成される A_p のホップ部分代数を Q で表すと，$p \neq 2$ のとき積が同型 $Q \otimes \mathcal{P} \cong A_p$ を与える。Q は外積代数 $E(Q_0, Q_1, ---)$ であるから，$\mathbb{Z}/p$ 係数コホモロジー群が A_p 加群として $E(Q_0, Q_1, ---, Q_n)$ となるスペクトラムを $V(n)$ によって表す。$V(0)$ は $\mathbb{Z}/p$ 型 Moore スペクトラム $S\mathbb{Z}/p$ であるから全ての素数 p に対し存在する。Toda(-Smith) (1971) は $p \geq 3$ のとき $V(1)$ の存在，$p \geq 5$ のとき

$V(2)$の存在，$p \geqq 7$のとき$V(3)$の存在を示し，$p=2$のとき$V(1)$の非存在，$p=3$のとき$V(2)$の非存在を示した。この存在証明にはAdamsスペクトル系列$E_2^{*,*} = \mathrm{Ext}_{A_p}^{*,*}(H\mathbb{Z}/p^*Y, H\mathbb{Z}/p^*X) \Rightarrow [X, Y]_*$が用いられた。

[2]．複素ThomスペクトラムMUのp局所化$MU\mathbb{Z}_{(p)}$はBrown-Petersonスペクトラムのウェッヂ和$\bigvee_i \Sigma^{n(i)} BP$として書ける。BPホモロジー$BP_*(\ )$は乗法的なので$BP$は環スペクトラムである。その係数群は$BP_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, \cdots, v_n, \cdots]$であり，BPホモロジー群$BP_*BP = BP_*[t_1, \cdots, t_n, \cdots]$である。但し，$\dim v_n = \dim t_n = 2(p^n-1)$．$BP^*BP \cong \mathrm{Hom}_{BP_*}(BP_*BP, BP_*)$であるから，$t^E = t_1^{e_1} \cdots t_n^{e_n}$，$E = (e_1, \cdots, e_n, 0, \cdots)$，の双対元を$r_E : BP \to \Sigma^{|E|}BP$，$|E| = \sum_{i=1}^{n} 2(p^i-1)e_i$，とするとBPコホモロジー群$BP^*BP = \prod_E BP^*\{r_E\}$となる。従って，BPホモロジー群$BP_*X$は$BP_*$加群であって，BP作用素$r_E$がその上に作用している。このような$BP_*$加群を$BP_*BP$余加群とよぶ．

BP_*のイデアルJが全てのBP作用素r_Eに対し$r_EJ \subset J$と閉じているとき，Jを不変イデアルとよぶ。このとき，BP_*/JはBP_*BP余加群になる。イデアル$I_n = (p, v_1, \cdots, v_{n-1})$，$1 \leqq n \leqq \infty$，は明らかに不変素イデアル

であるが，逆に不変素イデアルは I_n 以外にはない。又，$V(n)$ のBPホモロジー群は BP_*BP 余加群として BP_*/I_n と同型である。

BP_* の不変イデアル $J=\{g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\}$ が正則であるとは，$J_m=\{g_0, \cdots, g_{m-1}\}$，$0 \leqq m \leqq n$，とおくと $0 \to BP_*/J_m \xrightarrow{g_m} BP_*/J_m \to BP_*/J_{m+1} \to 0$，$0 \leqq m \leqq n-1$，が完全列になるときに云う。不変素イデアル I_n の一般化とみなせる不変正則イデアル J に対し，そのBPホモロジー群が BP_*BP 余加群として BP_*/J と同型になるスペクトラム X_J の存在，非存在を調べることは興味深い。その方向での一つの部分的な存在定理として，次の結果が得られる。

$\boxed{\text{定理}}$（下村－吉村）　p は奇素数で，$J=\{g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\}$ は BP_* の不変正則イデアルとする。$n^2+n<2p$ のとき，BP_*Y_J が BP_*BP 余加群として $v_n^{-1}BP_*/J$ と同型になるBP局所化スペクトラム Y_J が唯一つ存在する。

［3］　Adams-Novikovスペクトル系列 $E_2^{*,*}=\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{*,*}(BP_*, BP_*Y) \Rightarrow \pi_*(BP\wedge Y)$ は BP_*Y の相対移入分解を幾何学的に構成することにより与えられる。実際，コファイバー列 $S \xrightarrow{i} BP \xrightarrow{\pi} \overline{BP}$ に対し，次の列

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] Y \arrow[r, "i\wedge 1"] & BP\wedge Y \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\pi\wedge 1"'] & & \overline{BP}\wedge BP\wedge Y \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & \overline{BP}^2\wedge BP\wedge Y \arrow[r, "d_3"] & \cdots \\ & & \overline{BP}\wedge Y \arrow[ur, "1\wedge i\wedge 1"'] & & \overline{BP}^2\wedge Y \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

を考えると，これは拡大 BP_*BP 余加群による BP_*Y の相対移入分解

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to BP_*Y & \to & BP_*(BP\wedge Y) & \to & BP_*(\overline{BP}\wedge BP\wedge Y) & \to & \cdots \\
 & & \cong & & \cong & & \\
 & & BP_*BP\otimes_{BP_*}BP_*Y & & BP_*BP\otimes_{BP_*}BP_*(\overline{BP}\wedge Y) & &
\end{array}
$$

を導く。 写像 $\overline{BP}^{m+1}\wedge Y \to \Sigma^{m+1}Y$ のファイバー K_mY が作る逆系 $\{\Sigma^{-m}K_mY\}_{m\geq 0}$ を用いてスペクトル系列 $\{E_r^{*,*}\}_{r\geq 1}$ を構成すると，$BP^\wedge Y = \varprojlim \Sigma^{-m}K_mY$ のホモトピー群に収束する Adams-Novikov スペクトル系列が得られる。

そこで，BP_*BP 余加群 BP_*Y よりもっと一般的な BP_*BP 余加群，例えば BP_*/J，J は不変正則イデアル，に対し幾何学的な相対移入分解を構成したい。

$\boxed{\text{定義1}}$ CWスペクトラム E が BPホップ加群スペクトラムであるとは，E が結合的BP加群スペクトラムであって，$\varphi\cdot\eta = 1$ と $(1\wedge\eta)\eta = (1\wedge i\wedge 1)\eta$ をみたすBP加群写像 $\eta : E \to BP\wedge E$ をもつときに云う.

$BP\wedge Y$ は $\eta = 1\wedge i\wedge 1 : BP\wedge Y \to BP\wedge BP\wedge Y$ をもつBPホップ加群スペクトラムである。 E が BPホップ加群スペクトラムならば，そのホモトピー群 E_* は BP_*BP 余加群である。

BP_* の不変正則イデアル $J = \{g_0, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ に対し，ホモトピー群が BP_*加群として BP_*/J になる結合的BP加

群スペクトラム BPJ が存在する。しかも，BPJ_m と BPJ_{m+1} との間に，コファイバー列 $\Sigma^{d_m} BPJ_m \xrightarrow{\cdot g_m} BPJ_m \xrightarrow{j_m} BPJ_{m+1} \xrightarrow{k_m} \Sigma^{d_m+1} BPJ_m$ が得られる。ここに，$d_m = \dim g_m$ で $\cdot g_m$ は g_m による積写像である。合成写像 $j_{n-1} \cdots j_0 : BP \to BPJ$ を j と書く。

$\boxed{\text{命題 1}}$ $J = \{g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\}$ を BP_* の不変正則イデアルとする。$n < 2(p-1)$ のとき，BPJ は BP ホップ加群スペクトラムであって，$j : BP \to BPJ$ は BP ホップ加群写像である。

証明は BP^*BP 余加群の原始生成 BP^* 加群の計算により代数的に示されるので，その際 $n < 2(p-1)$ の仮定が必要となる。この仮定を除くには，命題を代数的でなく幾何的に証明することが必要と思える。

[4] $\boxed{\text{定義 2}}$ E を BP ホップ加群スペクトラムとする。CW スペクトラムと写像からなる複体 $W = \{W_k, d_k : W_k \to W_{k+1}\}_{k \geq 0}$ が E 上の BP 幾何分解であるとは，次の i), ii), iii) をみたすときに云う。

i) $(1 \wedge d_0)\delta = 0$ をみたす BP ホップ加群写像 $\delta : E \to BP \wedge W_0$ が存在する。

ii) 次の列は BP 加群スペクトラムとして分解する。

$$* \to E \xrightarrow{\delta} BP \wedge W_0 \xrightarrow{1 \wedge d_0} BP \wedge W_1 \xrightarrow{1 \wedge d_1} \cdots \to BP \wedge W_k \to \cdots$$

すなわち，BP加群写像 $\varepsilon : BP \wedge W_0 \to E$ と $s_k : BP \wedge W_{k+1} \to BP \wedge W_k$ が存在して，$\varepsilon s_0 = 0 = s_k s_{k+1}$，$\varepsilon \delta = 1$，$\delta \varepsilon + s_0(1 \wedge d_0) = 1$，$(1 \wedge d_k) s_k + s_{k+1}(1 \wedge d_{k+1}) = 1$，$k \geqq 0$，をみたす。

iii) 結合的BP加群スペクトラム Y_k，$k \geqq 0$，が存在して $BP \wedge Y_k$ は BPホップ加群スペクトラムとして $E \wedge W_k$ と同型である。

$\boxed{\text{定理 2}}$ EをBPホップ加群スペクトラムとすると，E上のBP幾何分解 $W_E = \{W_k = \overline{BP}^k \wedge E,\ d_k : W_k \to W_{k+1}\}$ が存在する。

E が BPホップ加群スペクトラムならば，$\overline{BP} \wedge E$ も又 BPホップ加群スペクトラムになるので，$d_E = (\pi \wedge 1)\eta : E \to BP \wedge E \to \overline{BP} \wedge E$ と定義することにより d_k，$k \geqq 0$，は帰納的に得られる。

$W_{BP,Y} = \{W_k = \overline{BP}^k \wedge BP \wedge Y,\ d_k\}_{k \geqq 0}$ を Adams BP幾何分解とすると，コファイバー列 $K_{m-1}Y \xrightarrow{b_{m-1}} W_m \xrightarrow{c_m} K_m Y \xrightarrow{a_m} \Sigma^1 K_{m-1} Y$ が次の可換図式を与える。

$$\begin{tikzcd}
W_0 \arrow[r, "d_0"] & W_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[dr, "c_1"'] & W_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[dr, "c_2"'] & W_3 \arrow[r] & \cdots \\
& & K_1 Y \arrow[u, "b_1"'] & K_2 Y \arrow[u, "b_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{定義 3}}$ BP幾何分解 $W = \{W_k, d_k\}_{k \geqq 0}$ が因子系 $\{X_m, a_m, b_{m-1}, c_m\}_{m \geqq 1}$ をもつとは

i) $X_{m-1} \xrightarrow{b_{m-1}} W_m \xrightarrow{c_m} X_m \xrightarrow{a_m} \Sigma^1 X_{m-1}$ がコファイバー列で

ii) $d_m = b_m \cdot c_m : W_m \to X_m \to W_{m+1}$

をみたすときに云う.

L_n を $v_n^{-1} BP_*$ 局所化関手とする。 BP_* の不変正則イデアル $J = \{q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}\}$ に対し, $L_n BPJ = v_n^{-1} BPJ$ で, これは $n < 2(p-1)$ のとき BP ホップ加群スペクトラムである.

$\boxed{\text{定理 3}}$ p を奇素数とし, $J = \{q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}\}$ を BP_* の不変正則イデアルとする。 $n^2 + n < 2p$ のとき, BP 幾何分解 $W_{v_n^{-1}BPJ} = \{L_n W_k = \overline{BP}^k \wedge v_n^{-1} BPJ, d_k\}_{k \geq 0}$ は因子系 $\{X_m\}_{m \geq 1}$ を唯一つ持つ。

$\mathrm{Ext}^{m+k, -m-t}_{BP_*BP}(BP_*, v_n^{-1} BPJ_*) = 0$, $m \geq 1$, $k \geq 1$, $t \in \Lambda_J = \{\Sigma_{0 \leq i \leq n-1} t_i(d_i+1) \,;\, t_i = 0, 1 \quad d_i = \dim q_i\}$ が示せるので, $k = 2$ のとき因子系の存在の障害が消え, $k = 1$ のとき因子系の唯一性の障害が消えるので, 定理が得られる。

$\boxed{\text{命題 4}}$ $J = \{q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}\}$ を BP_* の不変正則イデアルとし, $W = \{W_k, d_k\}_{k \geq 0}$ を $v_n^{-1} BPJ$ 上の BP 幾何分解で因子系 $\{X_m\}_{m \geq 1}$ を持つとする。 もし $p-1 \nmid n$ ならば, $BP \wedge X_\infty$ は BP ホップ加群スペクトラムとして $v_n^{-1} BPJ$ と同型である。 ここに, $X_\infty = \varprojlim \Sigma^{-n} X_n$ で

ある。

W の因子系 $\{X_m\}_{m\geq 1}$ を用いて構成される BP_*-Adams スペクトル系列 $E_2^{*,*} = Ext_{BP_*BP}^{*,*}(BP_*, v_n^{-1}BPJ_*Y) \Rightarrow \pi_*(Y \wedge X)_\infty$，但し $(Y \wedge X)_\infty = \varprojlim \Sigma^{-m} Y \wedge X_m$，は $p-1 \nmid n$ のとき有限収束する。これより，$Y \wedge X_\infty$ は $(Y \wedge X)_\infty$ と同型になり，特に $BP \wedge X_\infty$ は $(BP \wedge X)_\infty$ と同型である．そしてこのとき，$BP \wedge X_\infty$ が $v_n^{-1}BPJ$ と BP ホップ加群スペクトラムと同型になることが示せる。

定理3と命題4を用いると次の主定理が得られる．

$\boxed{\text{定理5}}$ p を奇素数とし，$J = \{q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}\}$ を BP_* の不変正則イデアルとする。$n^2 + n < 2p$ のとき，$BP \wedge Y_J$ が BP ホップ加群スペクトラムとして $v_n^{-1}BPJ$ と同型になる BP 局所化スペクトラム Y_J が唯一つ存在する．

詳細は K. Shimomura - Z. Yosimura "BP-Hopf module spectrum and BP_*-Adams spectral sequence" を参照して頂きたい。