数理解析研究所講究録
第605巻 1987年 134-142

球面上の非コンパクト変換群を構成する一つの方法について

山形大・理　内田伏一 (Fuichi Uchida)

§0 序

行列 $M \in M_n(\mathbb{R})$ について，次の条件を考えよう。

$$(\mathrm{T}) \quad \frac{d}{dt}\|exp(tM)x\| > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n - \{0\}$$

この条件は，行列Mが定める一径数群 $exp(tM)$ による，各点 $x \in \mathbb{R}^n_0$ の軌道が原点を中心とする $n-1$ 次元同心球面のすべてと外向きに transversal に交わることを意味している。

行列 $M = (m_{ij})$ が条件 (T) を満足することと2次形式 $\sum_{i,j} m_{ij}x_i x_j$ が正定値であることとは同等であることが分かる。

条件 (T) を満足する行列Mに対して，関数

$$t \longmapsto \|exp(tM)x\| \quad (x \in \mathbb{R}^n_0)$$

は C^ω 級の狭義単調増加関数であり，さらに

$$\lim_{t\to+\infty}\|exp(tM)x\| = +\infty, \quad \lim_{t\to-\infty}\|exp(tM)x\| = 0 \quad \cdots (1)$$

が成り立つ。　従って，C^ω級の関数

$$\tau : \mathbb{R}^n_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \| \exp(\tau(x)M)x \| = 1$$

が一意に定まる。　さらに，C^ω級の写像 $\pi^M : \mathbb{R}^n_0 \longrightarrow S^{n-1}$ が

$$\pi^M(x) = \exp(\tau(x)M)x$$

によって定義できる。　とくに，$\pi^M | S^{n-1} = id$ である。

次に，リイ群Gの表現 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ と行列 $M \in M_n(\mathbb{R})$ の対 (ρ, M) について，次の条件を考えよう。

(i)　Mは条件(T)を満足する。

(ii)　$M \cdot \rho(g) = \rho(g) \cdot M$, $\forall g \in G$.

この２つの条件を満足する対 (ρ, M) を次数 n の TC-対と呼ぶことにしよう。　このような (ρ, M) に対して，C^ω級の写像

$$\xi : G \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

が，$\xi(g, x) = \pi^M(\rho(g)x)$ によって定義され，球面 S^{n-1} 上のリイ群Gの作用であることが分かる。　この作用ξを，表現ρに付随しMにより twist された，<u>twisted linear action</u> と呼ぶことにしよう。　とくに $M = I_n$ である場合，ξを表現ρに付随した <u>linear action</u> と呼ぶ。

注. 表現ρが直交行列表現，すなわち $\rho(G) \subset O(n)$ ，ならば，ρに付随した twisted linear action はすべてρに付随した linear action に一致する。

§1 条件(T)について

行列$M \in M_n(\mathbb{R})$が条件(T)を満足しているものとする。$f(t;x)=\|\exp(tM)x\|$ とおき，tについての導関数を考えれば，対応$(t,x)\longmapsto f'(t;x)$は$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_0$上で定義された正値連続関数である。コンパクト集合$0\times S^{n-1}$の上でとる値の最小値を$\varepsilon$とする。この場合

$$f'(0;x)\geqq \varepsilon>0 \quad \forall x\in S^{n-1}$$

が成り立つ。さらに，$\forall(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_0$ に対して

$$\begin{aligned} f'(t;x) &= f'(0;\exp(tM)x) \\ &= \|\exp(tM)x\|\cdot f'(0;\|\exp(tM)x\|^{-1}\exp(tM)x) \\ &\geqq \varepsilon\cdot\|\exp(tM)x\| = \varepsilon\cdot f(t;x) \end{aligned}$$

が成り立ち，

$$\frac{d}{dt}\log f(t;x)\geqq\varepsilon \quad \forall(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_0$$

となる。$t>0$の場合と，$t<0$の場合に分けて，この不等式の両辺を積分すると，次の不等式を得る。

$$f(t;x)\geqq\|x\|\cdot e^{\varepsilon t}\ (t>0),\quad f(t;x)\leqq\|x\|e^{\varepsilon t}\ (t<0).$$

故に，§0の(1)を満足することが分かる。

行列$M\in M_n(\mathbb{R})$について，$\frac{d}{dt}\|\exp(tM)x\|^2$を考察して

$$\exp(tM)x\cdot M\exp(tM)x=\|\exp(tM)x\|\cdot\frac{d}{dt}\|\exp(tM)x\|$$

を得るので，$M=(m_{ij})$が条件(T)を満足することと2次形式

$\sum_{i,j} m_{ij} x_i x_j$ が正定値であることとは同等であることが分かる。

$n=2$ の場合，次の行列はいずれも条件(T)を満足している。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : 0 < x \leqq 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & y \\ -y & 1 \end{pmatrix} : y > 0.$$

§2 TC-対の同値関係について

リイ群Gを一つ固定しておく。　次数 n のTC-対 (ρ, M), (σ, N) について，$A \in GL(n, \mathbb{R})$ と $c>0$ が存在して

$$A\rho(g) = \sigma(g)A \ (\forall g \in G), \quad AM = cNA$$

が成り立つ場合，(ρ, M) と (σ, N) は同値であると定義する。

TC-対 (ρ, M) が定める *twisted linear action* を $\xi_{(\rho,M)}$ で表わそう。　ここで，次数 n のTC-対 (ρ, M) と (σ, N) が同値であれば，2つのG多様体 $(S^{n-1}, \xi_{(\rho,M)})$ と $(S^{n-1}, \xi_{(\sigma,N)})$ の間には *equivariant analytic diffeomorphism* が存在することを示そう。

任意の $c>0$ に対して，$\xi_{(\sigma, cN)} = \xi_{(\sigma, N)}$ が成り立つので，$A \in GL(n, \mathbb{R})$ が存在して

$$A\rho(g) = \sigma(g)A \ (\forall g \in G), \quad AM = NA$$

が成り立つものと仮定できる。　この場合，S^{n-1} から自分自身への2つの C^ω 級の写像 h_A, k_A を

$$h_A(x) = \pi^N(Ax), \quad k_A(y) = \pi^M(A^{-1}y)$$

によって定義する。 行列Aに対する仮定によって，h_Aと$\tilde{h}_A$とは互いに他の逆写像であることが分かり，さらに

$$h_A(\xi_{(\rho,M)}(g,x)) = \xi_{(\sigma,N)}(g, h_A(x)) \quad (g \in G,\ x \in S^{n-1})$$

が成り立つことが示される。 従って，h_Aは$(S^{n-1}, \xi_{(\rho,M)})$から$(S^{n-1}, \xi_{(\sigma,N)})$への *equivariant analytic diffeomorphism* である。

§3 典型的な例について

$G = SL(n,\mathbb{R})$とする。 $\rho_n : G \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$を自然な表現とし，$\rho = \rho_n \otimes I_r = \overbrace{\rho_n \oplus \cdots \oplus \rho_n}^{r}$ とおく。 ρに付随した *twisted linear actions* について考察しよう。 $M \in M_r(\mathbb{R})$が条件(T)を満足すれば，対$(\rho, I_n \otimes M)$はTC-対になる。このTC-対が定義する *twisted linear action* をξ_Mで表わそう。 条件(T)を満足する行列$M, N \in M_r(\mathbb{R})$について，$n \geqq r+1$の場合，2つのG多様体(S^{nr-1}, ξ_M)と(S^{nr-1}, ξ_N)の間に *equivariant homeomorphism* が存在すれば，$A \in GL(r,\mathbb{R})$と$c > 0$が存在して，$AM = cNA$ が成り立つことを示そう。

$n \geqq r+1$の場合，$\mathbb{R}^n$の一次独立なベクトル$u_1, \cdots, u_r$に対して，行列$P \in SL(n,\mathbb{R})$で $Pe_i = \sqrt{r}\, u_i$ $(i = 1, \cdots, r)$を満足するものが常に存在するので，G多様体(S^{nr-1}, ξ_M)において$\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \cdots \oplus e_r)$ を通るG軌道はS^{nr-1} の中で稠密な開集合であることが分かる。 $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1 \oplus \cdots \oplus e_r)$ におけるξ_Mに関する

isotropy 群を $I^n(M)$ で表わそう。 ξ_M の定義に戻って計算すると

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \phantom{{}^t\exp(\theta M)} & \overbrace{}^{n-r} \end{array} \\ & \left(\begin{array}{c|c} {}^t\exp(\theta M) & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \quad {}^{\exists}\theta\in\mathbb{R} \end{array}$$

の形をした $SL(n,\mathbb{R})$ の元の全体が $I^n(M)$ になることが分かる。さて，G 多様体 (S^{nr-1},ξ_M) から (S^{nr-1},ξ_N) への *equivariant homeomorphism* が存在すれば，稠密な開集合の像はやはり稠密な開集合であるから，$\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1\oplus\cdots\oplus e_r)$ の像は $\frac{1}{\sqrt{r}}(e_1\oplus\cdots\oplus e_r)$ を通る G 軌道に属すことになり，行列 $P\in SL(n,\mathbb{R})$ で

$$P\cdot I^n(M)\cdot P^{-1} = I^n(N)$$

となるものが存在することが分かる。 一方，$\mathbb{R}^n$ 上の $I^n(M)$ の自然な作用に関して不変な r 次元部分空間は $e_1,\cdots,e_r$ によって生成される部分空間のみであることが，群 $I^n(M)$ に属する行列の形から分かるので，行列 P は

$$\begin{array}{c} \ \overbrace{}^{n-r} \\ P = \left(\begin{array}{c|c} P_1 & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array}$$

の形になることが分かる。 従って，${}^{\forall}\theta\in\mathbb{R}$ に対して

$$P_1\cdot{}^t\exp(\theta M)\cdot P_1^{-1} = {}^t\exp(\theta' N)$$

を満足する $\theta'\in\mathbb{R}$ が定まり，M, N が条件 (T) を満足するので $c>0$ が存在して $\theta'=c\cdot\theta$ となることが分かる。 故に

$${}^tP_1^{-1}\cdot M\cdot{}^tP_1 = c\cdot N$$

となる。

とくに，$r=2, n \geqq 3$ の場合には，§1 末に挙げた行列に対応する twisted linear actions について，異なる行列に対応する2つの twisted linear actionsの间には equivariant homeomorphismが存在しないことが分かる。

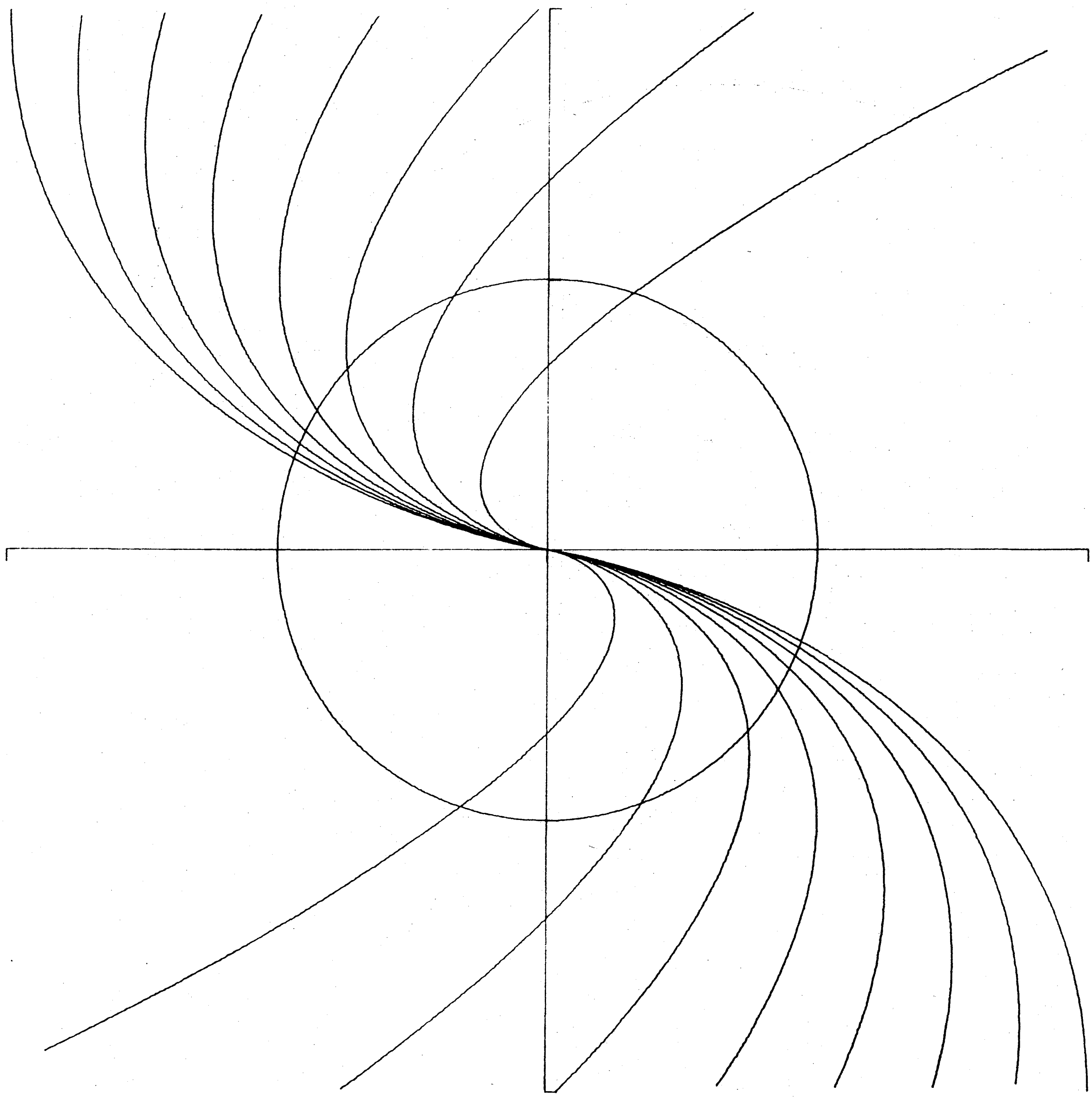
$n \leqq r$ の場合については研究中である。

注. Gがコンパクトリイ群である場合には，Gの任意の行列表現ρに対して，ρに付随した twisted linear action はすべてρに付随した linear action と equivariant analytic に diffeomorphicであることが証明できる。

参考までに，$n=2$ の場合について，条件(T)を満足する行列が定める一経数群の軌道の様子を2つの行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の場合を図示しておこう。

X=K*EXP(T)*(T-1)
Y=K*EXP(T)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



142

L= 3.00

X= K*EXP(T)*COS(L*T)

Y= K*EXP(T)*SIN(L*T)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$