

Three-wave-equation の可積分性と complex t-plane 上の  
singularity の構造について.

東大・理学部 木村 芳文

( Yoshifumi Kimura )

## § 1 問題

次のような常微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_1 + \mu_1 u_1 = K_1 u_2^* u_3^* \\ \frac{d}{dt} u_2 + \mu_2 u_2 = K_2 u_3^* u_1^* \\ \frac{d}{dt} u_3 + \mu_3 u_3 = K_3 u_1^* u_2^* \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで変数および係数は複素数とし、\*は複素共役を表わす。  
この系は三波相互作用方程式と呼ばれ、流体力学やプラズマ  
理論等ではよく知られているものであるが、例えば Navier-  
Stokes 方程式をフーリエ変換し、3つのモードだけをヒリ出  
したものと考えることができる。本来は係数の間には  $K_1 + K_2$   
 $+ K_3 = 0$  他の条件があるが、今はそれらを特別考えずに、  
整関数の自励系として扱う。

本講の目的は次の通りである。

(1.1) は

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0,$$

$K_1, K_2, K_3$  がすべて実、または純虚、

のとき楕円関数で表わせる解を持つことが知られている (可積分)。では上の条件が成り立たない時は可積分の場合とどのようなちがいがあるのか。これを複素平面における特異点の分布ということから考察する。

## § 2 楕円関数解

$u_1 = u_2 = u_3 = 0$  のとき (1.1) を再び書くと、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_1 = K_1 u_2^* u_3^* \\ \frac{d}{dt} u_2 = K_2 u_3^* u_1^* \\ \frac{d}{dt} u_3 = K_3 u_1^* u_2^* \end{cases} \quad (2.1)$$

$u_j = r_j e^{i\phi_j}$ ,  $K_j = k_j + il_j$  ( $j=1,2,3$ ) を代入して整理すると、

$$\begin{cases} \frac{dr_1}{dt} = r_2 r_3 (k_1 \cos \phi + l_1 \sin \phi) \\ \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{r_2 r_3}{r_1} (l_1 \cos \phi - k_1 \sin \phi) \\ \frac{dr_2}{dt} = r_3 r_1 (k_2 \cos \phi + l_2 \sin \phi) \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{r_3 r_1}{r_2} (l_2 \cos \phi - k_2 \sin \phi) \\ \frac{dr_3}{dt} = r_1 r_2 (k_3 \cos \phi + l_3 \sin \phi) \\ \frac{d\phi_3}{dt} = \frac{r_1 r_2}{r_3} (l_3 \cos \phi - k_3 \sin \phi) \end{cases} \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \quad (2.2)$$

を得る。特に  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$  の場合 ( $l_1 = l_2 = l_3 = 0$  も同様)

$$\begin{cases} \frac{dr_1}{dt} = l_1 r_2 r_3 \sin \phi \\ \frac{dr_2}{dt} = l_2 r_3 r_1 \sin \phi \\ \frac{dr_3}{dt} = l_3 r_1 r_2 \sin \phi \end{cases} \begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = l_1 \frac{r_2 r_3}{r_1} \cos \phi \\ \frac{d\phi_2}{dt} = l_2 \frac{r_3 r_1}{r_2} \cos \phi \\ \frac{d\phi_3}{dt} = l_3 \frac{r_1 r_2}{r_3} \cos \phi \end{cases} \quad (2.3)$$

である。ここで  $r_j^2/l_j = J_j$  とおくと

$$\frac{dJ_1}{dt} = \frac{dJ_2}{dt} = \frac{dJ_3}{dt} = 2r_1 r_2 r_3 \sin \phi \quad (2.4)$$

であるから

$$\frac{d}{dt}(J_1 - J_2) \rightarrow J_1 - J_2 = D_1 \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt}(J_1 - J_3) \rightarrow J_1 - J_3 = D_2$$

$$\text{また } H = 2(l_1 l_2 l_3)^{1/2} (J_1 J_2 J_3)^{1/2} \cos \phi \quad (2.6)$$

とおくと

$$\frac{dJ_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi_j} \quad \frac{d\phi_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J_j} \quad (2.7)$$

という正準方程式を得る。(2.5)より  $J_2, J_3$  を  $J_1$  で表わし、(2.6)より  $\cos \phi$  を、そして  $\sin \phi$  を求め、それらを(2.4)に代入し整理すると

$$\frac{dJ_1}{dt} = \sqrt{4l_1 l_2 l_3 J_1^3 - 4l_1 l_2 l_3 (D_1 + D_2) J_1^2 + 4l_1 l_2 l_3 D_1 D_2 J_1 - H^2} \quad (2.8)$$

となり、 $J_1$  が  $S_n$  関数で表現できることがわかる。

以下、ある場合を例にとって話を進めよう。(2.8)において  $l_1 l_2 l_3 = 1$ ,  $D_1 + D_2 = 0$ ,  $D_1 D_2 = -7$ ,  $H^2 = 24$  と置くと、

$$\frac{dJ_1}{dt} = \sqrt{4(J_1 + 1)(J_1 + 2)(J_1 - 3)} \quad (2.9)$$

となり、上の条件をみたす初期条件としては、複素数  $x + iy$

を  $(x, y)$  のように表示するとして、例えば

$$\begin{aligned} u_1 &= (\sqrt{3}, 0) & K_1 &= (0, 1) \\ u_2 &= (\sqrt{3-\sqrt{7}}, 0) & K_2 &= (0, 1) \\ u_3 &= (\sqrt{3+\sqrt{7}}, 0) & K_3 &= (0, 1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

と選べばよいことがわかる。

次に楕円関数の特異点についてであるが、

$$t = \int_0^{J_1} \frac{dJ_1}{\sqrt{4(J_1-e_1)(J_1-e_2)(J_1-e_3)}} \quad (2.11)$$

は  $J_1 = e_3 + (e_1 - e_3)/z^2$  を代入することにより

$$t = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \quad k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \quad (2.12)$$

と変形でき、これより

$$z = S_m(\sqrt{e_1 - e_3}t, k) \quad (2.13)$$

よって  $J_1$  は

$$J_1 = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{S_m^2(\sqrt{e_1 - e_3}t, k)} \quad (2.14)$$

となることがわかり、また  $S_m(\sqrt{e_1 - e_3}t, k)$  の零点が特異点を与えることもわかる。楕円関数は独立変数を複素数に拡張すると一般に2重周期性を持つことが知られているが、 $S_m(\sqrt{e_1 - e_3}t, k)$  は複素変数  $t$  に対して  $\operatorname{Re}(t)$  方向に  $2\omega_1$ 、 $\operatorname{Im}(t)$  方向に  $2\omega_2$  の周期性を持つことが知られている。ここで

$$\omega_1 = K(k)/\sqrt{e_1 - e_3}, \quad \omega_2 = K'(k)/\sqrt{e_1 - e_3} \quad (2.15)$$

であり,  $K(k)$  および  $K'(k)$  は

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K'(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-k^2) \sin^2 \varphi}} \quad (2.16)$$

で与えられる第1種完全楕円積分である。上の例においては  $e_1 = 3, e_2 = -1, e_3 = -2$  であるから

$$K(1/\sqrt{5}) \doteq 1.65962 \quad K'(1/\sqrt{5}) \doteq 2.25721$$

$$2\omega_1 \doteq 1.48440 \quad 2\omega_2 \doteq 2.01918$$

となる。

### §3 特異点の検出

複素変数平面上的の特異点の検出には古くからベキ級数解の収束半径を使う方法が知られているが、それはベキ級数の中心から収束円の半径に沿って解析接続を行うとき、少なくとも1つの半径においては収束円上に特異点が現われるということを基礎にしている。収束半径を決定するのに有効なのはいわゆる Cauchy-Hadamard の定理であり、 $a_n$  をある点におけるベキ級数解の係数とすると、その点における収束半径は

$$R = \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right]^{-1} \quad (3.1)$$

で与えられる。しかし、上の表式では  $\limsup$  をとるということであり、 $|a_n|$  が振動してしまう場合などには収束を調べるのが、特に数値計算などにおいては不便である。

そこで、ここでは(概念的には以前から知られていた方法のようであるが)最近 Chang らによって提案された Ratio-Like-Test を使うことにする。これを簡単に説明する。

ある関数  $g(z)$  が  $z = a$  で次のような特異性を持っているとする。

$$g(z) \sim (a-z)^{-\alpha} \quad (3.2)$$

今、 $g(z)$  を  $z = 0$  のまわりでべき級数展開する。

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n \quad (3.3)$$

ここで

$$G_i = g^{(i)}(0)/i! , \quad G_{i+1} = g^{(i+1)}(0)/(i+1)! \quad (3.4)$$

である。(3.4)に(3.2)を代入すると  $G_i$  と  $G_{i+1}$  の間には次の関係が成り立つことがわかる。

$$G_{i+1} = G_i \{1 + (\alpha-1)/i\} / a \quad (3.5)$$

今、 $R_i = G_{i+1}/G_i$  とおくと、

$$R_i = \{1 + (\alpha-1)/i\} / a , \quad R_{i-1} = \{1 + (\alpha-1)/(i-1)\} / a \quad (3.6)$$

となり、これより

$$a^{-1} = iR_i - (i-1)R_{i-1} , \quad \alpha = \frac{i(i-2)R_i - (i-1)^2 R_{i-1}}{-iR_i + (i-1)R_{i-1}} \quad (3.7)$$

を得る。よって  $\lim_{i \rightarrow \infty} [iR_i - (i-1)R_{i-1}]$  が存在すれば、その逆数として  $a$  が、一般に複素数として得られるわけである。

上の方法は Three-Term-Test と呼ばれ、極あるいは分岐点が孤立して存在する場合にその位置と位数を決定するのに

適した方法である。実際に数値計算をする場合に問題となるのは  $g(z)$  の高階微分の値が次々と必要になることであるが、これは多項式で与えられる力学系の場合には微係数についての漸化式が得られるのでたやすく計算できる。

最初に (1.1) に  $u_j = x_j + i y_j$ ,  $U_j = \alpha_j + i \beta_j$ ,  $K_j = k_j + i l_j$  を代入し、整理すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -(\alpha_1 x_1 - \beta_1 y_1) + k_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) + l_1(y_2 x_3 + x_2 y_3) \\ \frac{dy_1}{dt} = -(\beta_1 x_1 + \alpha_1 y_1) + l_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - k_1(y_2 x_3 + x_2 y_3) \\ \frac{dx_2}{dt} = -(\alpha_2 x_2 - \beta_2 y_2) + k_2(x_3 x_1 - y_3 y_1) + l_2(y_3 x_1 + x_3 y_1) \\ \frac{dy_2}{dt} = -(\beta_2 x_2 + \alpha_2 y_2) + l_2(x_3 x_1 - y_3 y_1) - k_2(y_3 x_1 + x_3 y_1) \\ \frac{dx_3}{dt} = -(\alpha_3 x_3 - \beta_3 y_3) + k_3(x_1 x_2 - y_1 y_2) + l_3(y_2 x_1 + y_1 x_2) \\ \frac{dy_3}{dt} = -(\beta_3 x_3 + \alpha_3 y_3) + l_3(x_1 x_2 - y_1 y_2) - k_3(y_2 x_1 + y_1 x_2) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

これに

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t^*)^n \\ y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t^*)^n \\ x_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t^*)^n \\ y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (t - t^*)^n \\ x_3 = \sum_{n=0}^{\infty} e_n (t - t^*)^n \\ y_3 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (t - t^*)^n \end{array} \right. \quad (3.9)$$

を代入すると  $a_n \sim f_n$  の間に次のような漸化式が成り立つことがわかる。

$$\begin{cases}
 a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[ \beta_1 b_n - \alpha_1 a_n + \sum_{m=0}^n \left\{ (k_1 c_m + l_1 d_m) e_{n-m} + (l_1 c_m - k_1 d_m) f_{n-m} \right\} \right] \\
 b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[ -\beta_1 a_n - \alpha_1 b_n + \sum_{m=0}^n \left\{ (l_1 c_m - k_1 d_m) e_{n-m} - (l_1 d_m + k_1 c_m) f_{n-m} \right\} \right] \\
 c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[ \beta_2 d_n - \alpha_2 c_n + \sum_{m=0}^n \left\{ (k_2 e_m + l_2 f_m) a_{n-m} + (l_2 e_m - k_2 f_m) b_{n-m} \right\} \right] \\
 d_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[ -\beta_2 c_n - \alpha_2 d_n + \sum_{m=0}^n \left\{ (l_2 e_m - k_2 f_m) a_{n-m} - (l_2 f_m + k_2 e_m) b_{n-m} \right\} \right] \\
 e_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[ \beta_3 f_n - \alpha_3 e_n + \sum_{m=0}^n \left\{ (k_3 a_m + l_3 b_m) c_{n-m} + (l_3 a_m - k_3 b_m) d_{n-m} \right\} \right] \\
 f_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left[ -\beta_3 e_n - \alpha_3 f_n + \sum_{m=0}^n \left\{ (l_3 a_m - k_3 b_m) c_{n-m} - (l_3 b_m + k_3 a_m) d_{n-m} \right\} \right]
 \end{cases} \quad (3.10)$$

これにより  $a_0 \sim f_0$  の値がわかれば逐次  $a_n \sim f_n$  まで計算できることになる。

#### §4 数値計算

以上の結果をふまえて数値計算をいくつかの場合について行う。その手順は以下の通りである。

- ① (3.8) の時間  $t$ , 変数およびパラメータを複素数と定義する。
- ② 適当な初期値 (今回は (2.10) を使用) に対して充分に小さな  $\Delta t$  を与えて (3.8) をできるだけ高精度に数値積分する。(今回は 4 次の Runge-Kutta 法をスキームとして使用)
- ③ ② で得られた値を  $a_0 \sim f_0$  とし (3.10) により  $a_1 \sim f_1 \dots$  を計算し, それより (3.6) を求め (3.7) が収束するまで続ける。



④ 得られた収束半径  $a$  (複素数) をそれまでの時間ステップの和に加えた値を最も近い特異点の位置とする。

以上の手続きのもとに実際に複素時間平面上の特異点を検出してみよう。まず計算精度を保証するために可積分の場合の check を行う。図 1 は (2.10) に対応する初期値, パラメータに対しての結果である。点が特異点の位置を表わしており、下部の線が  $(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$  を  $\text{Im}(t) = 0.2$  の線に沿ってプロットしたものである。確かに特異点が格子状に分布していることがわかる。また周期であるが  $\text{Re}(t)$  方向に 1.48441,  $\text{Im}(t)$  方向に

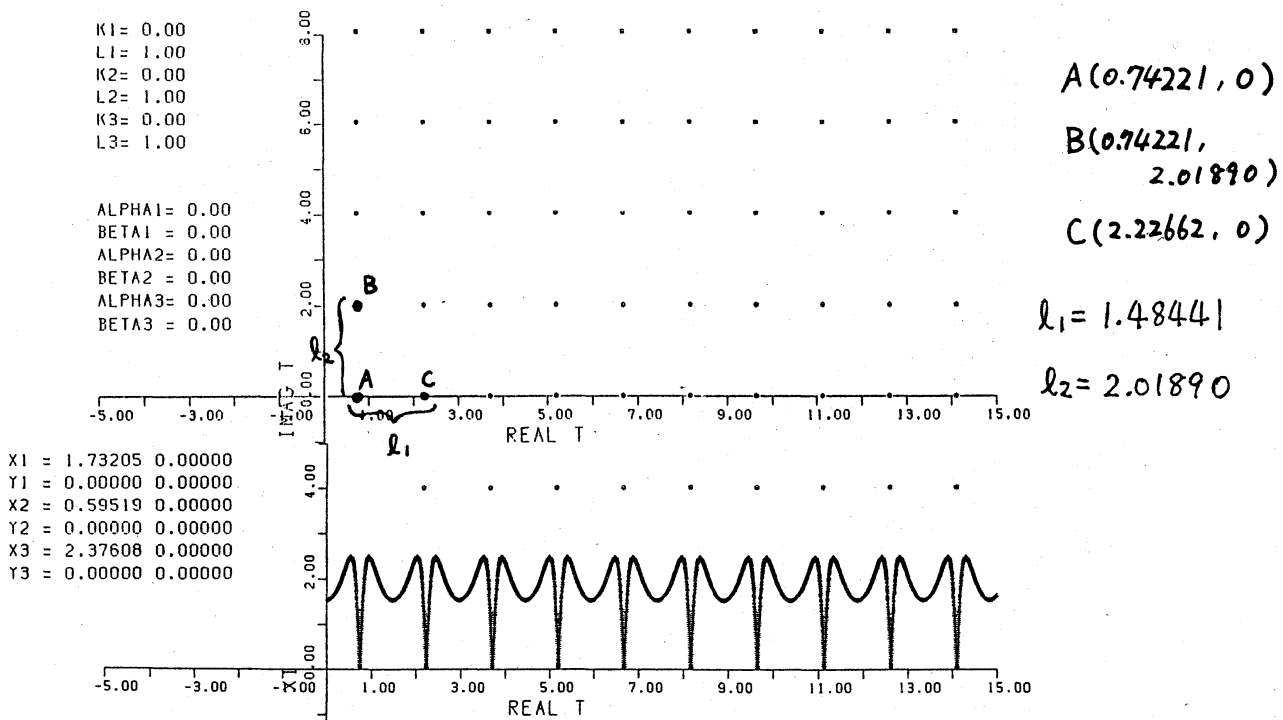


図 1

2.01890 と計算され、これらは理論による予想 1.48440, 2.01918 とよく合っていると言える。また変数の値も特異点の周期性と同様の周期性を持っていることがわかる。ではパラメータの値が可積分の場合からずれたらどのようなようになるであろうか。図 2 に 1 つの例を示す。これは初期値をそのままにして  $\alpha_1$  の値を 1.0 としたものである。式の上では減衰項が加ったことになるが、その通りに変数は振動減衰をし、特異点は実軸から離れていくことがわかる。(変数の変化は前と同様に複素時間  $(0, 0.2)$  から  $(15.0, 0.2)$  までの様子である。このように可積分からのずれは 1 つには特異点の位置の

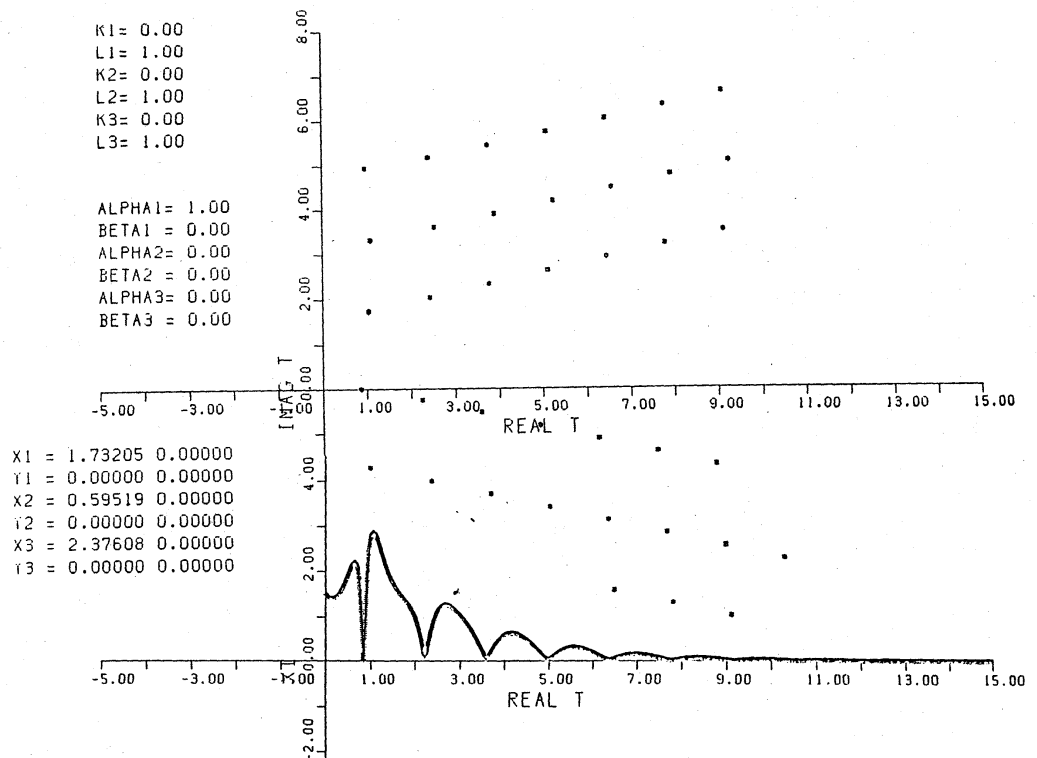
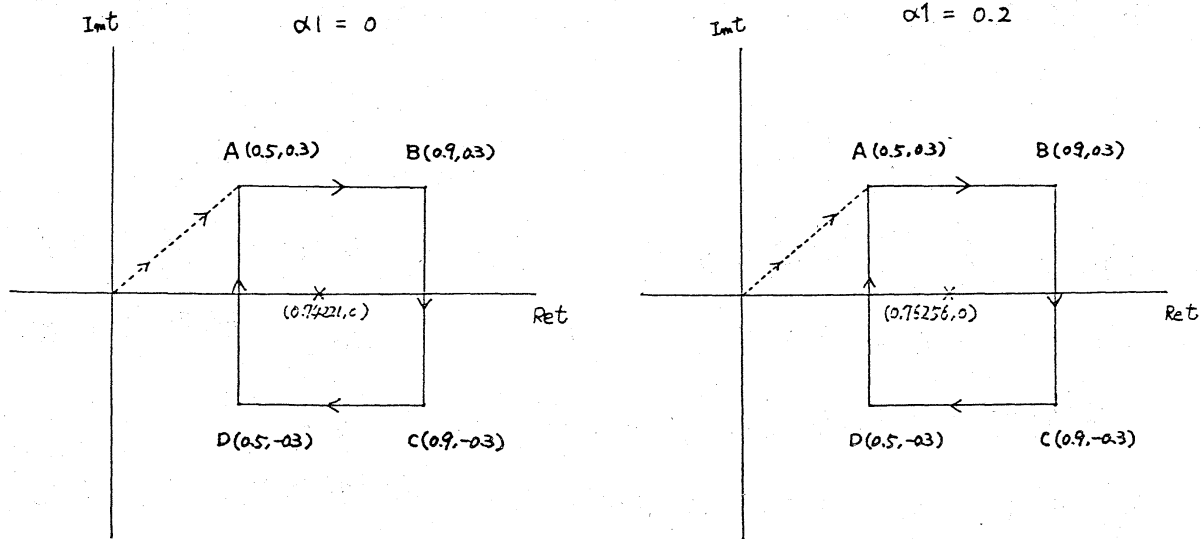


図 2

ずれとして現れることがわかる。それでは特異点自体の性質はどのように変化するのでしょうか。ここでは参考として1つの特異点のまわりを一周積分するときに変数の値がどのように変化するかを見てみよう。図3(a)は $\alpha_1 = 0$ で可積分の場合、楕円関数の理論から明らかな様に、特異点は極であり、一周しても値は変化しないのに対し、図3(b)では $\alpha_1 = 0.2$ と採っており可積分ではない。この場合には値は一周すると変化してしまい、多価性が生じていることがわかる。これは、新たにつけ加わった項により解の性質が本質的に変化してしまったためと考えられる。すなわち、可積分からのずれは、



A : ( 0.5, 0.3)

X<sub>1</sub> = 1.52749, 1.89475  
 Y<sub>1</sub> = 0.45387, 0.65325  
 X<sub>2</sub> = 0.53841, 0.93193  
 Y<sub>2</sub> = 1.20339, 2.23448  
 X<sub>3</sub> = 1.92604, 1.58433  
 Y<sub>3</sub> = 0.35270, 0.39470

BCD

A' : ( 0.5, 0.3)

X<sub>1</sub> = 1.52749, 1.89475  
 Y<sub>1</sub> = 0.45387, 0.65325  
 X<sub>2</sub> = 0.53841, 0.93193  
 Y<sub>2</sub> = 1.20339, 2.23448  
 X<sub>3</sub> = 1.92604, 1.58433  
 Y<sub>3</sub> = 0.35270, 0.39470

図3(a)

A : ( 0.5, 0.3)

X<sub>1</sub> = 1.48683, 1.71965  
 Y<sub>1</sub> = 0.45630, 0.62134  
 X<sub>2</sub> = 0.58765, 0.89899  
 Y<sub>2</sub> = 1.26723, 2.11176  
 X<sub>3</sub> = 2.05361, 1.49571  
 Y<sub>3</sub> = 0.36086, 0.36791

BCD

A' : ( 0.5, 0.3)

X<sub>1</sub> = 1.54184, 1.76002  
 Y<sub>1</sub> = 0.47209, 0.6327  
 X<sub>2</sub> = 0.57344, 0.8919  
 Y<sub>2</sub> = 1.23812, 2.0979  
 X<sub>3</sub> = 2.02907, 1.4583  
 Y<sub>3</sub> = 0.35680, 0.3635

図3(b)

解の多価性として現れることがわかった。

### §5 再び 問題

今まで述べてきたように可積分からのずれは特異点の位置のずれと多価性ということに現れることが定性的にわかった。その定量的な考察すなわち、「擾動項が入った時の特異点の位置のずれと多価性を定量的に予測する」という問題はまた他の機会で報告したい。ついでに言うならば、上の逆問題、すなわち特異点の情報を与えられた時に解の定量的な情報をさぐるという問題は Weierstrass の  $\rho$  関数に関する問題意識と共通する面を持っているが、これも考えていきたい問題である。

(1.1) は、また、あるパラメータの値の時はカオティックな振舞をするという報告がある。いわゆるカオスの時に特異点はどのような分布をするのであろうか。果して特異点が孤立せず集積して *Natural Boundary* をつくるようなことがおこるのかどうか、まだまだわからない問題はたくさんある。

### 参考文献

特異点検出の Chang の方法は

- Chang, Y. F. and Corliss, G. : J. Inst. Maths. Applies,

25, 349 - 359 (1980)

を参照。三波相互作用方程式の楕円関数解については

。谷内・西原：非線形波動（岩波書店）

等にくわしく出ている。